序　　言

这部书的第一卷终于交印了，它既是急就章，又是拖沓篇. 1958年匆匆上马，现想现写现印现讲，有时写稿不过三遍，仅仅经过起草、修改、誊正三道手续便拿去付印. 有时候校对来不及，就不校对了，因而原讲义上错误百出，疵谬迭见，所以说这是急就章. 如果能专心一志地连续地干下去，那还可能比较好些，但又经常为其它工作所打断，因而写一段停一停，改一章放一放的情况又经常出现，所以说是拖沓篇. 紧紧松松，赶赶拖拖. 因而详略不一，前后不贯，轻重失调，呼应不周等毛病在所难免的了.

情况是如此，虽然经过同志们的帮助和修改重写，但还可能留下不少后遗症. 这样的草率工作本来不该交印的，但不少同志热情鼓励，几经踌躇终于把它出版了，希望经过读者的帮助，人多、眼多、想法多，多提意见将来可以改写得更好些.

这个课自始至终是和王元同志合开的，他对原稿的形成与改写都提了不少意见，并且有不少章节都是出诸他的手笔. 在共同教学中一些心得已经吸收入我们合著的"积分的近似计算"一书中（科学出版社1961年初版），1961年龚升、吴方等同志又用这讲义教了一遍，修改了不少. 最后定稿又经过曾肯成、许以超、史济怀、邓诗涛、李炯生、刘碧梧等同志的细心校阅，提了不少意见. 个别章节还获得了戴元本、陆汝钤、韩京清、周永佩、罗祥钰、曹传书、吴松林、江嘉禾、李培信、邵秀民、陈志华、石赫、殷慰萍等同志的帮助，有关这些我在这儿表示谢意. 特别应该一提的是：在最后定稿的时候，获得了中山大学吴兹潜、林伟二同志的帮助，他们一字不苟地校阅推敲，使本书避免不少错误. 这样的主动地来自其他院校的帮助只能归功于集体主义的优越性.

在写作的过程中参考过熊庆来的"高等算学分析"（1934）；苏步青的"微分几何学"（1947）；赵访熊的"高等微积分"（1949）；孙光远、孙叔平的"微积分学"（1952）；陈建功的"实函数论"（1958）；杨宗磐的"数学分析入门"（1958）；樊映川等的"高等数学讲义"（1958）；陈戣民的"高等数学教程"（1958）；关肇直的"高等数学教程（第一卷）"（1959）；江泽坚的"数学分析"（1960）；北京大学、复旦大学、南京大学及高等数学教科书编审委员会的"高等数学教程"，我在此致谢. 其他作为参考的外文书籍不在此一一列举了.

在写作的过程中，曾经有过一些努力，企图能更好地体现党对教学改革的方针，但是由于自己的理论和业务水平，没有能够较好地做到，读者可能发现一些其它书上所没有的材料，也可能发现一些稍有不同的处理方法，但毕竟是太少了． 在谈到这一点的时候，感到空虚，并且诚恐会错误百出．大家所公认的、辗转传抄的已经成熟的材料，错误还有时难免，何况第一次写下来的东西，那更使人耽心了，但是还是斗胆地放进书里去，作为引玉之砖，作为试矢之的．特别是一些高的内容放低了，难的内容改易了，繁的内容化简了的部分更希望大家指正．但是我个人深信，只要每本书都有些章节改进，集腋成裘，我们教学改革会汇成巨流的，辛勤的点滴劳动，可能是大丰收的预兆．

大学教书不是照本讲，因此本书也准备了一些可教可不教的材料，教师们可以灵活掌握，余下的材料可以作为学有余力的同学的课外读物．习题应当做，并且适当地要多做些．本书没有组织好习题，希望老师们自己设法组织．习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西；其二是初步启发大家会灵活运用，独立思考；其三是融会贯通，出些综合性的习题把不同部门的数学沟通起来．

在教学过程中深得教学相长的益处，其中不少是由于同学所提意见的影响，我把所得到的一些不成熟的看法写在下面供同志们参考．我讲书喜欢埋些伏笔，把有些重要概念、重要方法尽可能早地在具体问题中提出，并且不止一次地提出．目的在于将来进一步学习的时候会较易接受高深的方法，很可能某些高深方法就是早已有之的朴素简单的方法的抽象加工而已．（有些深化了些，有些并没有深化而仅仅是另一形式而已．）我也喜欢生书熟讲，熟书生温的方法，似乎是在温熟书，但把新东西讲进去了，这是因为一般讲来，生书比旧课，真正原则性的添加并不太多的原故．找另一条线索把旧东西重新贯穿起来，这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透．有时分讲合温，或合讲分温，先把一个机器的零件一一搞清，再看全局，或先看全部机器的作用和目的，再分析要造成这个机器需要哪些零件而把条件一一讲明．“数”与“形”的“分”和“合”，“抽象”与“具体”的“分”与“合”都是在反复又反复的过程中不断提高的．同学也要求讲讲“人家怎样想出来的”，因而在讲书时也曾作过尝试，主观地推测一下，这很可能并不是原来的想法，但给出一条“这一步看下步并不难，连看几步就达到目的”的途径，作为同学们的参考．

以上一些肤浅的看法在讲课时都尝试过，但绝大部分写不下来，或者写下来就走了样，因此，同是一部书，可以多样讲，讲义作参考，结合同学的实际情况能灵活掌握才好．拉杂地写了这些意见，与其说是对教师讲的，还不如说是对同学（或自学的人）讲的．

总之，由于水平的限制，虽然黾勉从事，但缺点一定不少，我诚挚地希望读者们多提意见，更希望教师们多多指教.

最后，特别需要提起的是：由于中国科学院数学研究所党组织的支持，才使我有机会讲授基础课和编写讲义；在编写过程中，自始至终得到了中国共产党中国科学技术大学委员会的鼓励、关怀与支持，还给予了具体的帮助，这是我衷心感激的. 有了党的鼓励、关怀与支持，使我这几年来敢于按照自己的一些肤浅的设想来进行教学的尝试，使我这几年来有勇气把第一次写下来的东西放到课堂上去教，使我这几年来能把这项工作坚持下来. 至于中国科技大学教务处、数学系与数学教研室的同事们，在我从事这项工作的时候，一直给我方便与帮助，也在此表示感谢. 对科学出版社的感谢，那就更应当在此一提了，他们花了大量的劳动，在制图、编辑加工、排版印刷、校对等方面都做了细致而深入的工作.

华　罗　庚

1962年6月11日

目　　録

第一章　实数与复数

§1. 有　理　数

数起源于“数”，一个一个地数，因而出現了

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots,$$

这叫做自然数.

用自然数来数物件，看来簡单，但是却包含了一些数学中經常用到的基本原則. 例如，一一对应的概念，先后次序的概念等等. 特别值得注意的是，这是数学中第一个用抽象符号来处理具体事物的例子. 拿任何实物做标准(如手指，算珠)，都有穷尽的可能，而自然数系却可以說明一切可以数得完的客观事物的件数.

但是，如果眞的要創造出无穷个符号来表达自然数，那不仅不方便而且也不可能. 这样就产生了計数法. 这方法是用有限个数字来表达一切自然数. 我們熟悉的是十进位的表达法，卽逢十进一的方法. 左边的一算作右边一位的十，这样我們就有可能用

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

来表达一切自然数了.

人类大都是用十进位，可能是因为人有十个指头. 开始計数时是以指头做标准的. 实質上，符号用得最少的要算二进位，只要用 0 与 1 就可以表达出一切自然数来. 二进位就是逢二进一. 用二进位表示自然数貫，可以依次写成为

$$1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \cdots.$$

书写时二进位較长，例如，二进位的四位数字 1000 仅代表十进位的 8. 一般講来，一个数字用二进位的位数是用十进位的位数的三倍以上(約 3.3 倍).

这里我們只提一下自然数的两个基本的重要性質：

1) 如果有一批自然数都不大于一个給定的自然数，那末其中一定有一个最大的. 术語：在有上界的自然数集合中一定有一个最大的.

2) “一个有上界的自然数集合不能和它的眞子集合建立起一一对应的关系”. 这句术語講得似乎有些玄虛，实質上就是 n 个物件不能和少于 n 个物件成立一一对应的关系. 这样簡单的結果为什么还值得一提呢？因为这是有限集合的基本性質. 任何一个非有限集合都有可能和它的子集合一一对应. 例如，自然数的集合便可以和偶自然数的集合建立起一一对应来：

$$n \longleftrightarrow 2n.$$

仅有自然数，还远远不能滿足我們的需要. 我們有时需要分，但分不尽怎么办？因而

产生了分数 $\frac{a}{b}$，称为有理数. $\frac{a}{b}$ 就是 b 个人分 a 件东西，每个人应得的正确答案.

小数只不过是有固定分母的分数的另一种表达形式，它的分母只允許是 $10, 10^2, 10^3, \cdots$ 等等. 例如，

$$0.314 = \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3}.$$

因为分母是特殊的，所以我們并不能把任何分数都表为有限小数. 例如，

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$$

就是一个无穷小数. 但是我們知道，有理数的小数表达是有特殊形式的，就是所謂循环小数. 我們也知道，凡是循环小数都能表成有理数，特别需要注意的是循环小数

$$0.999\cdots$$

实质上代表1.

仅有有理数，还是不能满足我們客观上的需要. 我們有时要减，但不够减怎么办？很自然地就产生了負数.

到了这样的阶段，我們已經得到了正、負有理数. 这些数作为一个整体来講已經达到了某种意义的完备性，这种数的全体称为有理数域. 用一句行話来說，有理数域对四则运算自封；通俗一些說，任意二有理数的和、差、积、商（除数 $\neq 0$）仍然是有理数.

一般講有理数是指所有的正、負有理数，而整数是指 $0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$. 正整数就是自然数 $1, 2, 3, \cdots$.

任何两个有理数之間有无穷个有理数存在. 要証明这点，先証明两个有理数之間一定有一个有理数存在. 若 $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$，则显然有

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}.$$

旣然两个中間有一个，那末 $\frac{a}{b}$，$\frac{a+a'}{b+b'}$ 中間又至少有一个，等等. 这种做法可以无限制地継續下去，所以就証明了以上所說的話.

§2. 无理数的存在

上节中我們已經說明了在某种意义下有理数域有它的完备性，但是换一个角度来看，便又显示出它的不完备之处. 例如，最簡单的二次方程

$$x^2 = 2 \tag{1}$$

就沒有有理数解. 从几何方面說，連极簡单的几何图形的长度都无法用有理数表达出来. 边是单位长的正方形的对角綫的长度 $\sqrt{2}$ 就不是有理数.

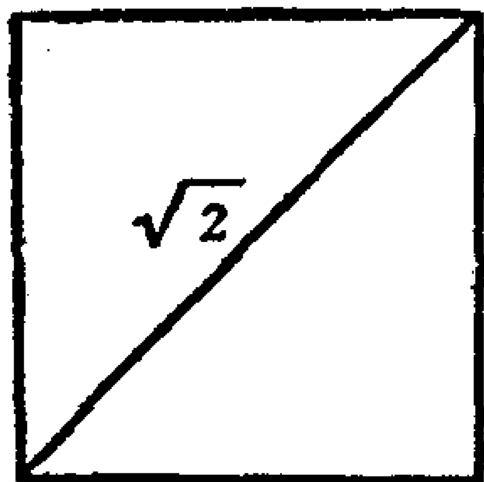


图 1

何以見得方程(1)沒有有理解？我們用反証法. 如果有一个既約

分数 $\frac{a}{b}$ 是(1)式的解，那末

$$a^2 = 2b^2.$$

右边是偶数，所以左边应当是偶数，故 a 是偶数. 令 $a = 2a'$，则得

$$2(a')^2 = b^2.$$

这又說明 b 应当是偶数. 这与 a/b 是既約分数的假定相矛盾，因此(1)式沒有有理解，也就是說 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 虽然如此，直觉上我們对 $\sqrt{2}$ 并不是毫无所知. 首先，我們知道它是在 1 与 2 之間，計算得精确些，知道它是在 1.4 与 1.5 之間，1.41 与 1.42 之間，1.414 与 1.415 之間. 换言之，$\sqrt{2}$ 可用

$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$
$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots$$

来无限逼近. 实际上，这样的过程也就定义了 $\sqrt{2}$，因为

$$a_n - b_n = \frac{1}{10^{n-1}},$$

也就是 $\sqrt{2}$ 与 a_n (及 b_n) 的誤差 $< \frac{1}{10^{n-1}}$. n 愈大，誤差也就愈接近于 0. 换言之，$\sqrt{2}$ 可以用 $\{a_n\}$ 从右边接近它，也可以用 $\{b_n\}$ 从左边接近它.

如果仅仅是为了 $\sqrt{2}$ 以及它对四則运算的完备性，我們可用如下的方法来解决問題. 对所有的整数 $a,\ b,\ c$，形如

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c}$$

的数是对四則运算自封的. 但是我們的目的在于使无限接近成为完全可能，所以我们采用其他的方法.

§3. 实数的描述

現在我們描述性地来說明实数.

我們作一条直綫，取其上一点作为原点，并取一个单位长. 依单位长一段一段地往右边接着量，便得出所有的自然数所对应的点. 由 0 点向左量，便得出負整数(图 2).



图 2

过 0 点作任一直綫(异于原直綫). 在其上取 B 点使 $0B = b$. 連单位点 A(即 $0A$ 的长是单位长)与 B，通过 $0B$ 直綫上的单位点 C 作平行于 AB 的綫交 $0A$ 于 D，则 $0D = \frac{1}{b}$ (图 3). 如此可以在直綫上表出所有的有理数.

从 0 点作一 45° 的角，取单位长得 A 点. 作 $0A$ 的垂綫交原直綫于 B. 在 x 直綫上这样作出的一段，它的长度是 $\sqrt{2}$ (图 4).

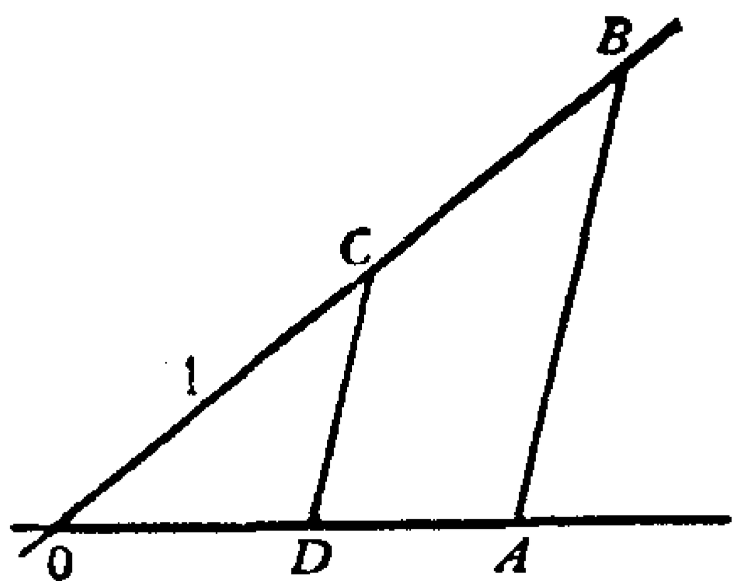


图 3

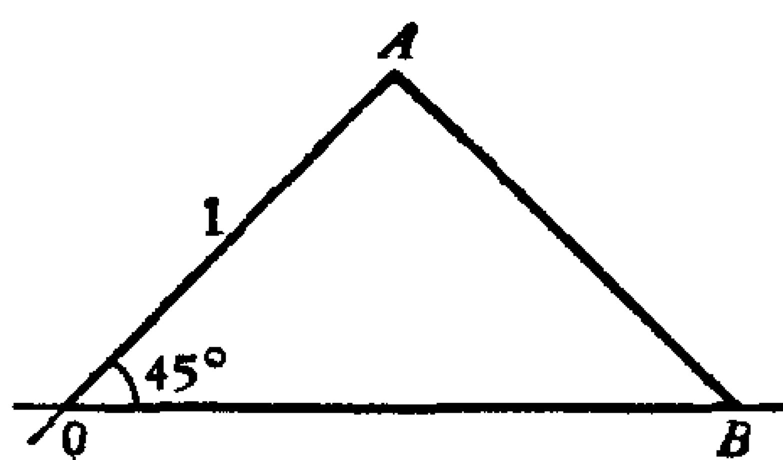


图 4

所以从几何来看，$\sqrt{2}$几乎是先驗性地存在着的，也可以把$\sqrt{2}$看作一点，它是可以用有理数点来无限接近的．說得形式化些，給出一个任意小的正数 ε，一定有一个有理数 r，使

$$|\sqrt{2}-r|<\varepsilon.$$

所有的实数都和$\sqrt{2}$一样是直綫上的点；并且每一点也对应于一个实数．我們可以用以下的方法来描述一个实数 α：如果 α 所对应的点可以用有限位小数表达出来，那它是有理数．这我們已經定义好了．现在假定 α 不能用有限位小数表达出来，我們一定可以选出一个整数 $a_m\cdots a_1$，使

$$a_m\cdots a_1\leqslant\alpha<a_m\cdots a_1+1,\quad 0\leqslant a_\nu\leqslant 9 \tag{1}$$

（这也称为 Archimedes 公設）[1]．把区間(1)分成 10 份，α 一定落在其中之一．命

$$a_m\cdots a_1.b_1<\alpha<a_m\cdots a_1.b_1+0.1,\quad 0\leqslant b_1\leqslant 9; \tag{2}$$

再把(2)分成 10 份，α 又落在

$$a_m\cdots a_1.b_1b_2<\alpha<a_m\cdots a_1.b_1b_2+0.01,\quad 0\leqslant b_2\leqslant 9 \tag{3}$$

中．这样一步一步做下去，这手續給出有一个无穷小数

$$a_m\cdots a_1.b_1b_2\cdots b_l\cdots$$

它与实数 α 对应．

我們就用这个表达方法来定义实数．

正实数 α 是由无穷小数表示出来的：

$$\alpha=a_m\cdots a_1.b_1b_2b_3\cdots.$$

但是我們有个約定：如果 α 是有限小数，我們把最右的一个数字減 1，后面添上无穷个 9．例如，$\frac{1}{2}=0.4999\cdots$．

不同的表示代表不同的实数．

这样表示的几何意义是：α 是这样的一个数，它是由 $a_m\cdots a_1$，$a_m\cdots a_1.b_1$，$a_m\cdots a_1.b_1b_2$，$\cdots$ 等无限接近的．

正实数可以比大小．先对准小数点，小数点前位数多的就大．如果位数相等，那末我

1) Archimedes 公設是：給了两个綫段 a 与 b．如果 a 的长度比 b 的长度短，用 a 作为“尺”，量有限次一定能超过 b 的长度．

們就一个数字一个数字地从左往右比，首先出現較大数的便大．我們用 $\alpha \leqslant \beta$ 来代表 α 小于或等于 β．这样的大小概念有以下三个性质：

(i) 任給两个正实数，我們能够判断那个大那个小；

(ii) 如果 $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \alpha$, 則 $\alpha = \beta$;

(iii) 如果 $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \gamma$, 則 $\alpha \leqslant \gamma$.

我們定义两个实数的加法，就是对准了小数点一位对一位地相加，但必須注意必要的进位．說得更确切些，命这两个数各为

$$\alpha = a_m \cdots a_1.b_1b_2\cdots,$$
$$\beta = a_l' \cdots a_1'.b_1'b_2'\cdots.$$

如果从某一位起，两个数的尾巴每一位对应的数字加起来都是 9，卽有 N，当 $n > N$ 时，$b_n + b_n' = 9$，那末 $\alpha + \beta$ 就是 $a_m \cdots a_1.b_1b_2\cdots b_N + a_l'\cdots a_1'.b_1'b_2'\cdots b_N'$ 然后再添上无限个 9．不然，我們一定有无限个自然数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$，使

$$b_{n_\nu} + b'_{n_\nu} \neq 9, \quad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

作

$$a_m \cdots a_1.b_1\cdots b_{n_\nu} + a_l'\cdots a_1'.b_1'\cdots b'_{n_\nu}.$$

取到 $n_\nu - 1$ 位小数，这就肯定了 $\alpha + \beta$ 到小数第 $n_\nu - 1$ 位．一步一步做下去，我們可以肯定 $\alpha + \beta$ 的任何一位数字．

我們用定义逆运算的方法来定义减法，說得更确切些，假定 $\alpha > \beta$．如果从某一位开始，α 与 β 的尾巴完全相同，那就变为有限小数的减法．如果不是如此，一定有无限个自然数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$，使

$$b_{n_\nu} \neq b'_{n_\nu}. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

作

$$a_m \cdots a_1.b_1\cdots b_{n_\nu} - a_l'\cdots a_1'.b_1'\cdots b'_{n_\nu}.$$

取到 $n_\nu - 1$ 位小数，这就肯定了 $\alpha - \beta$ 到小数第 $n_\nu - 1$ 位．一步一步做下去，我們就肯定了 $\alpha - \beta$ 的任何一位数字．由减法可以引出負实数．极易看出 (i), (ii), (iii) 对所有的实数(不論正与負)都对．

对一实数 α 我們定义它的絕对值：

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{如果 } \alpha \geqslant 0, \\ -\alpha, & \text{如果 } \alpha < 0. \end{cases}$$

不难証明我們有不等式

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

在此式中用 $\beta = \gamma - \alpha$ 代之，可得

$$|\gamma| \leqslant |\alpha| + |\gamma - \alpha|.$$

所以

$$|\gamma - \alpha| \geqslant \big||\gamma| - |\alpha|\big|.$$

§4. 极　　限

极限这一个概念在中学里学习循环小数时已經介紹过了．我国古代早就有了这一概念的萌芽．“一尺之棰，日取其半，万世不竭”就是极限的看法．这句話的意义是一尺长的一根木棒，第一天拿掉一半，当然还留下1/2尺；第二天取留下的一半，还留下原来的1/4；第三天剩下 $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$，$\cdots$，第 n 天剩下了 $\frac{1}{2^n}$ 尺．当 n 大时，$\frac{1}{2^n}$ 虽小，但并不是0．这就是万年不竭的道理．我們用符号

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

来代表这一事实．它的讀法是：当 n 趋向无穷时，$\frac{1}{2^n}$ 接近于0．数学中也常用以下的説法：任意給一个很小的正数 $\varepsilon>0$，一定可以选择一个自然数 N，使当 $n>N$ 时，常有

$$0<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

(在現在这个情况中，N 是可以具体算出的，它就是一个大于 $\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}\Big/\log_{10}2$ 的自然数)

現在我們一般地来定义极限．

定义． 对于一个实数貫(有时也称为叙列)

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots.$$

如果 α 是一个实数且有以下的性质，我們就称 α 是以上数貫的极限，或称貫 α_n 收斂于 α：任給一个正数 $\varepsilon>0$，必有一个自然数 N 存在，使当 $n>N$ 时，

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon.$$

我們用符号

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$$

来代表．

不难証明

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n\pm\beta_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n\pm\lim_{n\to\infty}\beta_n.$$

例1．数貫

$$0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ \cdots$$

以 $\frac{1}{3}$ 为其极限．

例2．数貫

$$0.9,\ 0.39,\ 0.339,\ 0.3339,\ \cdots$$

也以 $\frac{1}{3}$ 为其极限．

例3．数貫

$$0.3,\ 0.9,\ 0.33,\ 0.39,\ 0.333,\ 0.339,\ \cdots$$

也以 $\frac{1}{3}$ 为其极限.

例 4. 如果 $q>1$, 则貫 $\left\{\frac{1}{q^n}\right\}$ 以 0 为极限.

例 5. 貫 $\left\{\frac{n^2+3n}{2n^2+1}\right\}$ 以 $\frac{1}{2}$ 为极限.

給了 $\varepsilon>0$. 当 $n>\frac{3}{2\varepsilon}$ 时, $\left|\frac{n^2+3n}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{6n-1}{2(2n^2+1)}<\frac{3}{2n}<\varepsilon$.

任何一个实数 α 都有它的无穷小数表示法:

$$\alpha=a_m\cdots a_1.b_1\cdots b_n\cdots.$$

命

$$\alpha_n=a_m\cdots a_1.b_1\cdots b_n,$$

则

$$|\alpha-\alpha_n|=\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{b_{n+2}}{10^{n+2}}+\cdots\leqslant\frac{9}{10^{n+1}}+\frac{9}{10^{n+2}}+\cdots=$$

$$=\frac{9}{10^{n+1}}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right)=\frac{9}{10^{n+1}}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{10^n}.$$

給了 $\varepsilon>0$, 我們取 $N=\left[\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ ($[\xi]$表 ξ 的整数部分), 則得

$$N>\log_{10}\frac{1}{\varepsilon},\quad 10^N>\frac{1}{\varepsilon}.$$

故当 $n>N$ 时,

$$\frac{1}{10^n}<\varepsilon.$$

所以任何一个实数都可以看作是它的无穷小数取 n 位所得出的数的极限. 由此显示出, 任何一个实数可以表为一个有理数貫的极限. 非有理的实数也称为无理数.

由此也可看出, 存在着以有理数为元素的貫, 它的极限超出有理数域的范围 (例如 $\sqrt{2}$ 所代表的无穷小数). 于是就产生了下面的問題: 如果以实数为元素作貫, 能否通过取极限而得出实数以外的新数来. 在下节中, 我們将証明它不可能 (見下节定理 2). 我們先引进收斂貫的定义.

定义. 一个实数貫 $\{\alpha_l\}$ 如果适合以下条件, 就称为收斂貫或称 Cauchy 貫: 对任一正数 $\varepsilon>0$, 有自然数 $L(=L(\varepsilon)$, 这表示 L 与 ε 有关) 存在, 使当 l 与 k 都大于 L 时,

$$|\alpha_l-\alpha_k|<\varepsilon.$$

如果一貫收斂于 α, 則这貫就是收斂貫. 所根据的理由是

$$|\alpha_l-\alpha_k|\leqslant|\alpha_l-\alpha|+|\alpha_k-\alpha|.$$

如果将收斂貫的定义换为"对任一 $\varepsilon>0$, 有一自然数 N 存在, 使当 $n>N$ 时,

$$|\alpha_{n+l}-\alpha_n|<\varepsilon,$$

此处 l 不超过某一常数 c", 則 $\{\alpha_n\}$ 可能沒有极限. 例如 $\alpha_n=\log_{10}n$. 取 $N=\left[\frac{c}{10^{\varepsilon}-1}\right]$,

则当 $n>N$ 时，

$$|\log_{10}(n+l)-\log_{10}n|<\log_{10}\left(1+\frac{c}{n}\right)<\varepsilon.$$

但对于任意自然数 N，当 $n>10^{2N}$ 时，$\log_{10}n>2N$，所以 $\log_{10}n$ 没有极限.

定理 1. 一个单调上升的贯：

$$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n\leqslant\cdots,$$

如果它受限于上，也就是有一常数M与 n 无关，使

$$\alpha_n\leqslant M,\quad n=1,2,\cdots,$$

则这个贯一定有极限.

证．先比较整数部分．由于都不大于M，所以除掉前面若干(有限)项外，从某一项开始一定是一个不再变化的数；再论第一位小数，也一定从某一项起都相同，这样继续进行，我们便一步一步地决定出一个无穷小数．因此得出本定理.

同样地，一个单调下降的贯，如果受限于下的话，这个贯也一定有极限.

例 6． 贯 $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ 为单调下降的贯，且有下限零，所以有极限.

例 7． 试证贯 $x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n 重根式)有极限.

先证明 $x_n<2$．当 $n=1$ 时，$\sqrt{2}<2$．假定 $x_k<2$，则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<2$．故由归纳法可知 $x_n<2$．另一方面，x_n 为单调上升贯．故有极限.

例 8． 贯 $x_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}$ 趋一极限 $e(=2.7\cdots)$．由 $n!\geqslant2^{n-1}$ 可知，$x_n<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$，所以 x_n 是有上限且单调上升的贯，故有一极限．这 e 是自然对数的基数.

从实数

$$\alpha=a_m\cdots a_1\cdot b_1b_2\cdots$$

的表示法，我们可以得到一个单调上升的贯

$$\alpha_n=a_m\cdots a_1\cdot b_1b_2\cdots b_n.$$

这个贯的极限就是 α．从 β 也可以作一个单调上升的贯 β_n．乘积

$$\alpha_n\beta_n$$

也是一个单调上升的有理数贯，并且受限于上，它有一个极限．这极限就定义为实数 α 与 β 的乘积.

不难证明

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n\beta_n)=(\lim_{n\to\infty}\alpha_n)(\lim_{n\to\infty}\beta_n)$$

及对任一自然数 q，有

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n^q)=(\lim_{n\to\infty}\alpha_n)^q.$$

又如果 $\alpha > 0$,则必有一自然数N存在,使当 $n > N$ 时

$$\alpha_n \neq 0,$$

于是 $\frac{1}{\alpha_n}$ 成为一个单調递減的貫,并且受限于下,因而有一极限存在,命之为 β. 不难証明 $\alpha\beta = 1$. 我們写成 $\beta = \alpha^{-1}$.

命 q 表任一自然数,我們一定有一自然数 l 使 $\alpha \leqslant 10^{lq}$. 現在 $10^{nq}\alpha_{nq}$ 是一自然数,我們有一唯一的自然数 P_n 使

$$P_n^q \leqslant 10^{nq}\alpha_{nq} < (P_n + 1)^q.$$

命 $\beta_n = P_n/10^n$,如此得出的是一递增貫,而且由 $\alpha_{nq} \leqslant \alpha \leqslant 10^{lq}$ 可知 $\beta_n \leqslant 10^l$,因此

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \beta$$

存在. 由 $\beta_n^q \leqslant \alpha_{nq} \leqslant \left(\beta_n + \frac{1}{10^n}\right)^q$ 可知

$$\beta^q = \lim_{n\to\infty}\alpha_{nq} = \alpha,$$

即

$$\beta = \alpha^{\frac{1}{q}}.$$

我們由此可以定出 α 的 p/q 次方.

对任一正实数 β,研究 α^{β_n} 的单調性,由此可以定义实数 α^β.

不难証明,实数对四則运算自封,也可以說所有的实数构成一个域. 加法的交換、結合律依旧正确,乘法的交换、結合律也正确,加乘之間的分配律也正确. 在下节中,我們还将証明它对极限运算也是封閉的.

§ 5. Bolzano-Weierstrass 定理

从实数貫

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots \tag{1}$$

中我們任意取出一部分

$$\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \cdots, \alpha_{n_k}, \cdots, \tag{2}$$

此处 $n_1, n_2, \cdots$ 是自然数,且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots.$$

貫(2)称为貫(1)的子貫.

若貫(1)有极限 α, 則子貫(2)也以同一 α 为其极限.

如果 α 是(1)的极限,那末对任一 $\varepsilon > 0$,必有一自然数 N,使当 $n > N$ 时

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon.$$

因此可得当 $n_k > N$ 时,有

$$|\alpha_{n_k} - \alpha| < \varepsilon,$$

即有一K存在,当 $k > K$ 时上式成立. 这就証明了我們的命題.

以上命題的逆命題是不对的,換言之,子貫有极限并不能說明原来的貫有沒有极限.

例如，$x_n=(-1)^{n+1}$ 是一貫,它的两个子貫:

$$x_1=1,\ x_3=1,\ \cdots,\ x_{2k-1}=1,\ \cdots$$

及

$$x_2=-1,\ x_4=-1,\ \cdots,\ x_{2k}=-1,\ \cdots$$

都有极限,但原貫沒有极限.

我們还可以有更复杂的例子:

$$1,\ 1,2,\ 1,2,3,\ 1,2,3,4,\ 1,2,3,4,5,\cdots,$$

这一个貫有一个子貫以 1 为极限,也有子貫以 2 为极限,也有子貫以 3 为极限等等.

定理 1 (Bolzano-Weierstrass). 在一有界的无穷点集中,一定可以选出一个有极限的子貫.

証. 由假定可設一切数都在 a,b 之間. 适合于 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数称之为区間(或閉区間),以 $[a,b]$ 表之. 我們把区間 $[a,b]$ 平分,其中一定有一半含有无穷个点. 假定包有无穷个点的一半是 $[a_1,b_1]$,显然有

$$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a);$$

同法,把区間 $[a_1,b_1]$ 分为二等分,则它的一半 $[a_2,b_2]$ 中亦有无穷个点;等等. 第 k 次分出的区間 $[a_k,b_k]$ 照样包含有无穷多个点.

这些区間的每一个都包含在前一个中,并且第 k 个区間的长度

$$b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b-a)$$

随着 k 的增大而趋向于 0, 如此得出两个单調貫

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots$$

与

$$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\cdots,$$

它們都有极限. 又由 $b_k-a_k\to 0$ 可知,这两个极限相等,命之为 α,即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha.$$

$[a_k,b_k]$ 中含有点集的无穷个元素,我們任取其中一个,命之为 α_k,则由于

$$a_k\leqslant\alpha_k\leqslant b_k$$

及

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-b_n|=0,$$

所以知道

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha.$$

定理已經証明.

这証明中包括了一个很重要的原則,即逐步平分的原則,也称为 Bolzano 原則.

現在我們来說明上节最后一句話,也就是証明

定理 2 (基本定理). 实数范围内任一收斂貫一定收斂于一实数.

証. 由假定,給一任意的 $\varepsilon>0$, 必有自然数 N 存在,使当 $l, k>N$ 时,常有

$$|\alpha_k-\alpha_l|<\varepsilon.$$

固定 l, 則对所有的 $k>N$, 当有

$$\alpha_l-\varepsilon<\alpha_k<\alpha_l+\varepsilon.$$

换言之,在 $[\alpha_l-\varepsilon, \alpha_l+\varepsilon]$ 之間有无穷个点 α_k. 依 Bolzano-Weierstrass 定理可知,有一子貫 $\{\alpha_{n_k}\}$ 使

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_{n_k}=C.$$

現在仅須証明, α_n 也趋向于 C. 我們可以选取充分大的 n_k, 使

$$|\alpha_{n_k}-C|<\varepsilon;$$

又同时当 $n>N$ 时

$$|\alpha_n-\alpha_{n_k}|<\varepsilon,$$

所以得到当 $n>N$ 时

$$|\alpha_n-C|\leqslant|\alpha_n-\alpha_{n_k}|+|\alpha_{n_k}-C|\leqslant 2\varepsilon.$$

这就是說,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=C.$$

例 1. 貫 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ 有极限.

給了 $\varepsilon>0$, 当 $n>\left[\frac{\log_{10}\frac{1}{\varepsilon}}{\log_{10}2}\right]$ 及 $l\geqslant 0$ 时,

$$|x_{n+l}-x_n|=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{l-1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^l}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}<\varepsilon,$$

故貫 x_n 有极限.

例 2. 貫 $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ 也有极限.

給了 $\varepsilon>0$, 当 $n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 及 $l\geqslant 0$ 时,由于 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\ (n=2, 3, \cdots)$, 所以

$$|x_{n+l}-x_n|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+l)^2}\right|<$$

$$<\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots-\frac{1}{n+l}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

故貫 x_n 有极限.

定义. 如果 α 适合以下的条件,則称为一实数集合的**确上限**: 集合中的任意一个数都不大于 α, 但对任意的 $\varepsilon>0$, 集合中至少有一个数大于 $\alpha-\varepsilon$.

类似地,如果 β 适合以下的条件,就称为一个实数集合的**确下限**: 集合中任意一个数都不小于 β, 但对任意的 $\varepsilon>0$, 集合中至少有一个数小于 $\beta+\varepsilon$.

例 1. 貫 $1-\frac{1}{n}$ 以 1 为确上限.

例 2. $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$ 以 1 为确上限.

例 3. $\frac{1}{n}(n=1, 2, \cdots)$ 也以 1 为确上限.

例 4. 自然数貫沒有确上限.

定理 3. 受限于上的实数集合一定有一个确上限.

証. 限于上的意义就是所有的数都不超过某一定数 β. 在集中任取一点 α,把 $[\alpha,\beta]$ 分为二等分: $\left[\alpha, \frac{1}{2}(\beta+\alpha)\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2}(\beta+\alpha), \beta\right]$. 如果后者包有原集合的点,我們就命之为 $[\alpha_1, \beta_1]$; 如果后者幷不包有原集合的点, 我們就把 $[\alpha_1, \beta_1]$ 表前一分区間. 此法續行,得出 $[\alpha_2, \beta_2], \cdots, [\alpha_k, \beta_k], \cdots$. 我們可以知道

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\lim_{k\to\infty}\beta_k=C.$$

这个 C 就是确上限了,因为对任何 k, 有 $\alpha_k \leqslant C \leqslant \beta_k$, 且在区間 $[\alpha_k, \beta_k]$ 內至少包有原集合的一个点,而 β_k 之右再沒有原集合的点.

同法可証受限于下的实数集合一定有一确下限.

§6. 复数的定义和矢量

实数域对加、减、乘、除自封,对极限手續也自封. 但依旧有不完备的地方,就是連极簡单的方程

$$x^2+1=0$$

在实数范围內都还沒有解. 由于这样的客观情况,我們很自然地便要求进一步扩充数的范围,引出新数,使旣包有实数,又保留实数的基本运算定律.

我們先来說明平面直角坐标系. 在平面上取两根相交于一点 0 而且相互垂直的直綫, 分别称它們为 x 軸与 y 軸, 0 又称为原点. 使每根軸上的点都与实数一一对应起来(如 §3 所示), 原点对应于零. 我們用下面的方向来确定 x 軸与 y 軸的正方向,卽由 x 軸的正向逆时針轉 90° 卽得 y 軸之正向.

过平面任意一点 P,作两条直綫,分别垂直于 x 軸与 y 軸. 設垂足对应的二实数分别是 x_1 与 y_1,于是 P 点便决定了一实数对 (x_1, y_1). 反之,如果有一实数对 (x_1, y_1),我們分别过 x 軸与 y 軸上的点 x_1 与 y_1, 作两条分别垂直于 x 軸与 y 軸的直綫, 这两条直綫相交于一点 P. 因此实数对与平面上的点成为一一对应. 称 (x_1, y_1) 为点 P 的座标, 其中 x_1 又称为横座标, y_1 为纵座标. 上述座标系統叫做直角座标系統, 也称为 Descartes 座标系統.

x 軸与 y 軸将平面分成四个象限,这四个象限中点的座标的符号为

复数(或称复虛数) α 就是一个实数对 (a, b). 命 $\beta=(c, d)$ 是另一复数,这两数的加法定义为

坐标 \ 符号 \ 象限	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

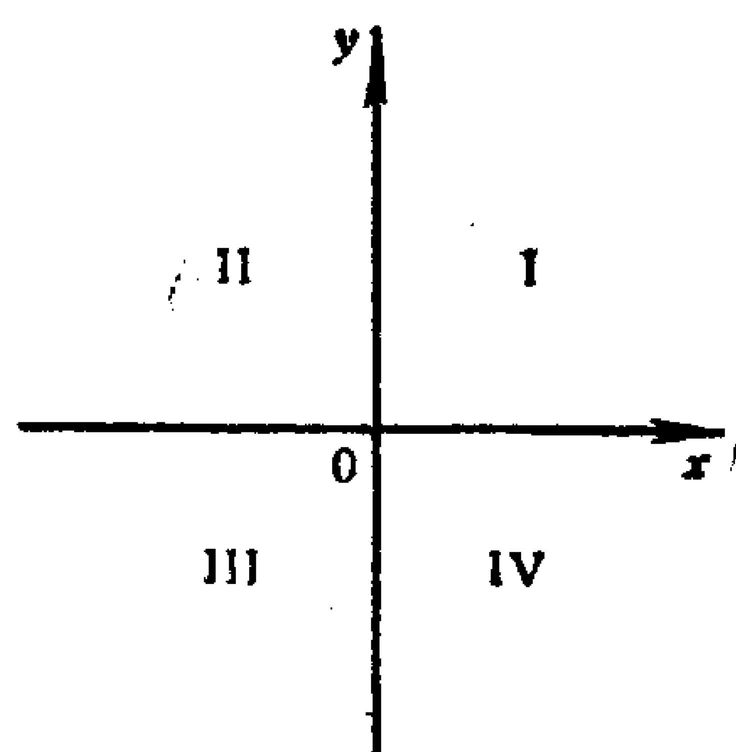


图 5

$$\alpha+\beta=(a+c,\ b+d).$$

而乘法的定义是

$$\alpha\beta=(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc).$$

定义矢量为平面上有方向有长短的綫段. 我們現在討論的矢量是指有以下意义的自由矢量: 同方向等长度的矢量不加区别地看成为一个矢量. 例如,由原点出发到 (a, b) 点的矢量和由 (ξ, η) 点出发到 $(a+\xi, b+\eta)$ 点的矢量就被看成为同一矢量. 所以,一个复数代表一个矢量,并且一个矢量也代表一个复数.

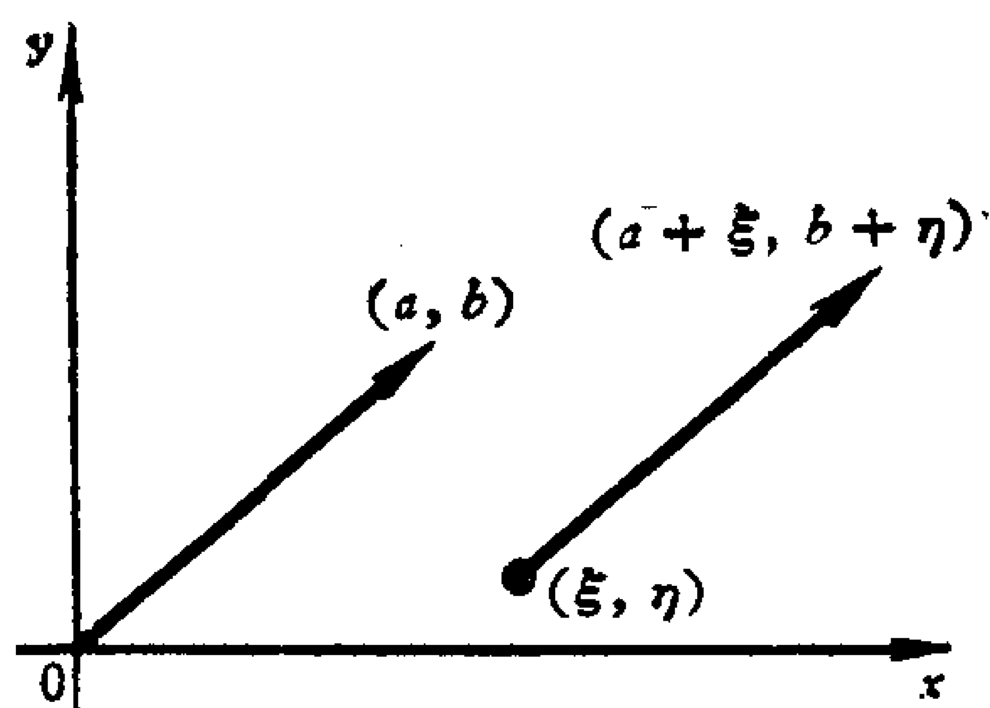


图 6

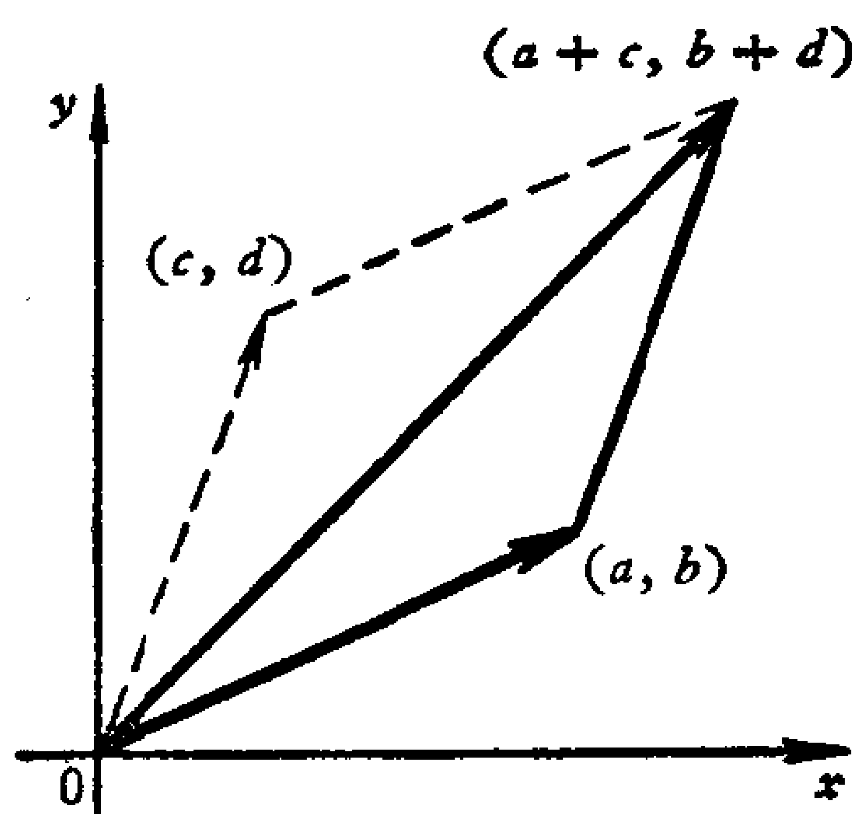


图 7

两个矢量的和的定义:把第二个矢量的起点接在第一个矢量的終点上,由第一矢量的起点到第二矢量的終点的矢量便是这两个矢量的和. 第一个矢量用 (a, b) 表示,第二个用 (c, d) 表示. 把第二个矢量移成为从点 (a, b) 到点 $(a+c, b+d)$ 的綫段. 显然可見,这两矢量的和矢量 $(a+c, b+d)$ 就是以矢量 (a, b) 及 (c, d) 为边的平行四边形的对角綫. 这叫做平行四边形法則. 由此可見,矢量的加法和复数的加法是完全一致的.

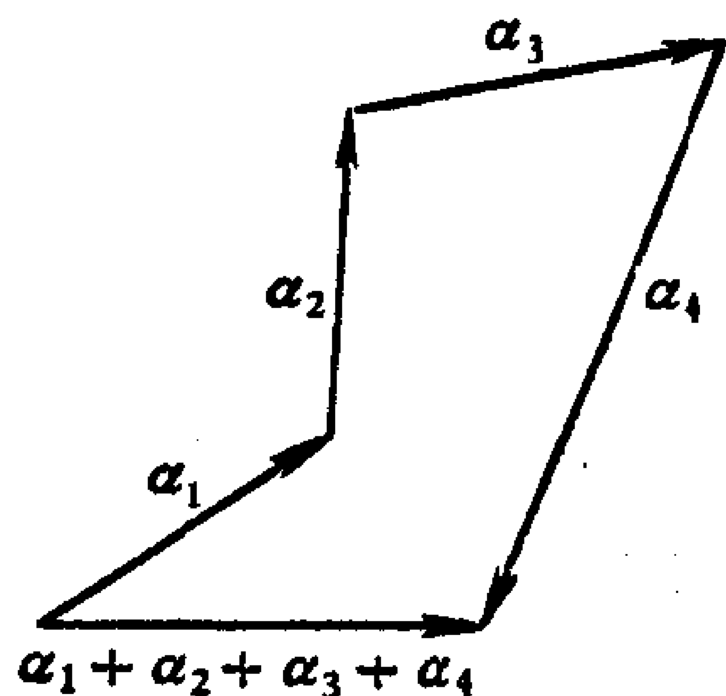


图 8

n 个复数

$$\alpha_k=(a_k,\ b_k),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

的和等于

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n=(a_1+\cdots+a_n,\ b_1+\cdots+b_n).$$

它的几何意义就是把所对应的各个矢量一个接着一个地画下来,从 α_1 的起点到 α_n 的終点連成一个矢量,这个矢量就

代表了我們的复数之和.

不难看出,复数的和并不依賴于各項的先后次序(交換律,就是 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$); 各項可以任意組合地先求和或后求和(結合律,就是 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$).

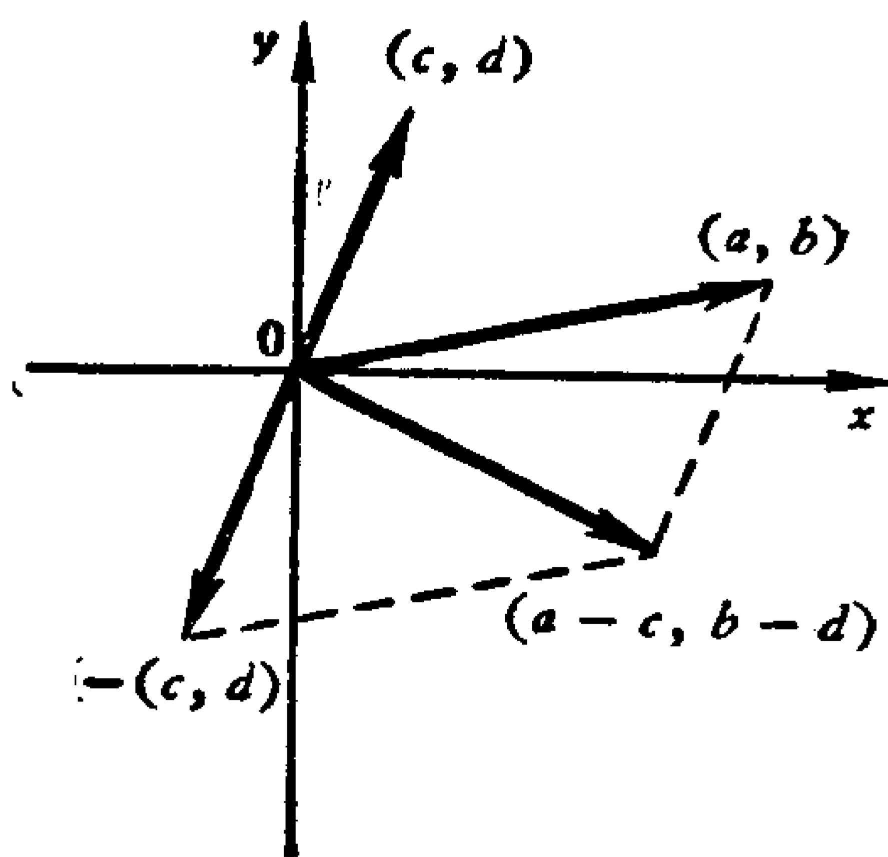


图 9

减法就是加法的逆运算. 两个矢量的差为

$$(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d),$$

这就是做一个与 (c, d) 方向相反的矢量 $(-c, -d)$, 把它加在 (a, b) 上.

由勾股定理可知,矢量 (a, b) 的长度(即原点 $(0, 0)$ 至点 (a, b) 的距离)等于 $\sqrt{a^2+b^2}$,它称为矢量的模数,也称为所对应的复数 α 的絕对值. 用 $|\alpha|$ 表它. 同样可知,点 (a_1, b_1) 至点 (a_2, b_2) 的距离为

$$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}. \tag{1}$$

因为三角形两边长之和不小于另一边长,可知

$$|\alpha|+|\beta|\geqslant|\alpha+\beta|. \tag{2}$$

这一公式的解析表达式是

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}. \tag{3}$$

讀者試自己直接証明一下. 一般說来,上式是取不等号的,只有当两矢量同向的时候,才取等号.

同样可知

$$|\alpha_1+\cdots+\alpha_n|\leqslant|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|,$$

且仅当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都同向时才取等号.

命 $\gamma=(e, f)$, 在式(2)中以 $\gamma-\alpha$ 代 β,可知

$$|\alpha|+|\gamma-\alpha|\geqslant|\gamma|.$$

所以得出

$$|\gamma-\alpha|\geqslant\big||\gamma|-|\alpha|\big|.$$

从而我們得出

$$\big||\alpha|-|\beta|\big|\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

§7. 极坐标及复数乘法

在說明复数乘法之前,先介紹复数 $\alpha=(a, b)$ 的另一表示法,即极坐标表示法. 用 ρ 表示矢量的长度 $\sqrt{a^2+b^2}$,用 θ 表示矢量和 x 軸所夾的角度,称为輻角. 现在任何一点 (a, b) 都可以表成为

$$a=\rho\cos\theta,\quad b=\rho\sin\theta,\quad 0\leqslant\rho,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,$$

就是 $\alpha=(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. 除掉原点 $(0, 0)$ 以外, 其他任一点一定有唯一的一組 ρ, θ, 并且对适合以上条件的不同的 ρ, θ 組,对应的点也各不相同.

如果

$$\beta = (\tau\cos\psi, \tau\sin\psi),$$

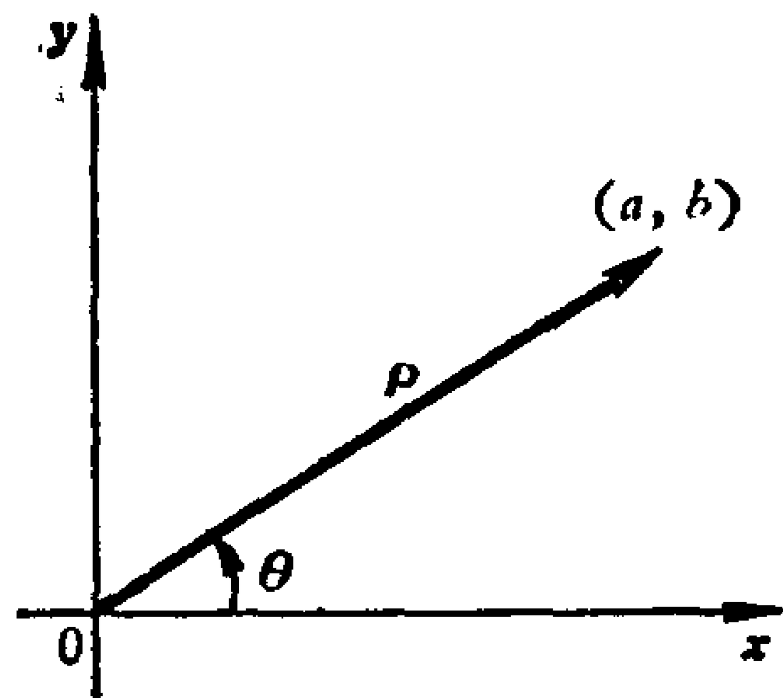


图 10

则乘积

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (ac - bd, ad + bc) = \\ &= (\rho\tau(\cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi), \\ &\quad \rho\tau(\cos\theta\sin\psi + \sin\theta\cos\psi)) = \\ &= (\rho\tau\cos(\theta+\psi), \rho\tau\sin(\theta+\psi));\end{aligned}$$

换言之,两个复数乘积的絕对值是各因子絕对值的乘积,其輻角等于各因子輻角的和.

当然可以推广为:几个复数乘积的絕对值等于其各个因子絕对值的乘积,其輻角等于各个輻角的和.

由此可見,复数的乘法并不依賴于各項的先后次序(交換律,就是 $\alpha\beta = \beta\alpha$),也不依賴于任意組合地先求积或后求积(結合律,就是 $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$),也不难看出分配律

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\beta = \alpha_1\beta + \alpha_2\beta$$

成立. 讀者試自証之.

除法是乘法的逆运算. 我們有

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{(\tau\cos\psi, \tau\sin\psi)} = \frac{\rho}{\tau}(\cos(\theta-\psi), \sin(\theta-\psi)), \quad (\tau \neq 0).$$

把 $\bar{\alpha} = (a, -b)$ 定义为 α 的共軛数,显然有

$$\alpha\bar{\alpha} = (a, b)(a, -b) = (\rho^2, 0)$$

及

$$\overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

由乘法的性質可知,在研究复数时,我們有两个重要的单位

$$(1, 0), \quad (0, 1).$$

第一个单位具有

$$(1, 0)(a, b) = (a, b)$$

的性質,所以我們就用 1 来表它. $(a, 0)$ 对应于 a. 所有的 $(a, 0)$ 与实数系統完全一致,我們也就簡单地用 a 来代表 $(a, 0)$.

第二个单位用以下的符号:

$$i = (0, 1).$$

显然有

$$i^2 = -1.$$

形如 $(0, b)$ 的复数,我們就用 bi 来表它,如此任一复数都可以写成为

$$\alpha = (a, b) = a + bi.$$

运算法則可以写成为

$$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i,$$

$$\alpha\beta = (a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i,$$
$$\alpha\bar{\alpha} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |\alpha|^2.$$

a 称为复数 α 的实数部分，有时用符号 $\Re\alpha$ 表它；b 称为虚数(或純虛数)部分，用 $\Im\alpha$ 表它。我們称 x 軸为实軸，y 軸为虛軸。

我們現在談一下复数乘积的几何意义。

定义. 二矢量 $\alpha=(a,b)$ 与 $\beta=(c,d)$ 的內积为
$$\alpha\cdot\beta = (a,b)\cdot(c,d) = ac+bd.$$

用极坐标，內积就是
$$\rho\tau(\cos\theta\cos\psi + \sin\theta\sin\psi) = \rho\tau\cos(\theta-\psi),$$
这儿 $\theta-\psi$ 是两矢量的夾角。

$\alpha\cdot\alpha = a^2+b^2$ 是矢量 α 的长度的平方，矢量 α 与 β 的夾角的余弦也可以表示为
$$\cos(\theta-\tau) = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\alpha\cdot\beta}{\sqrt{\alpha\cdot\alpha}\sqrt{\beta\cdot\beta}}. \tag{1}$$
由此可見，如果二矢量的內积为零，則它們是互相垂直的。

对应于 (a,b) 与 (c,d) 的复数命之为 α 与 β，則
$$\alpha\bar{\beta} = (ac+bd) + (bc-ad)i.$$
所以該二矢量的內积也就是 $\alpha\bar{\beta}$ 的实数部分，也就是
$$(a,b)\cdot(c,d) = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta).$$
由此可以得出余弦定律
$$|\alpha-\beta|^2 = |\alpha|^2+|\beta|^2-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta = |\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha||\beta|\cos(\theta-\psi).$$

$\alpha\bar{\beta}$ 的虛数部分是
$$\frac{1}{2i}(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta) = bc-ad = \rho\tau(\sin\theta\cos\psi - \cos\theta\sin\psi) = \rho\tau\sin(\theta-\psi),$$
这就是以矢量 (a,b) 与 (c,d) 做边的平行四边形的面积。

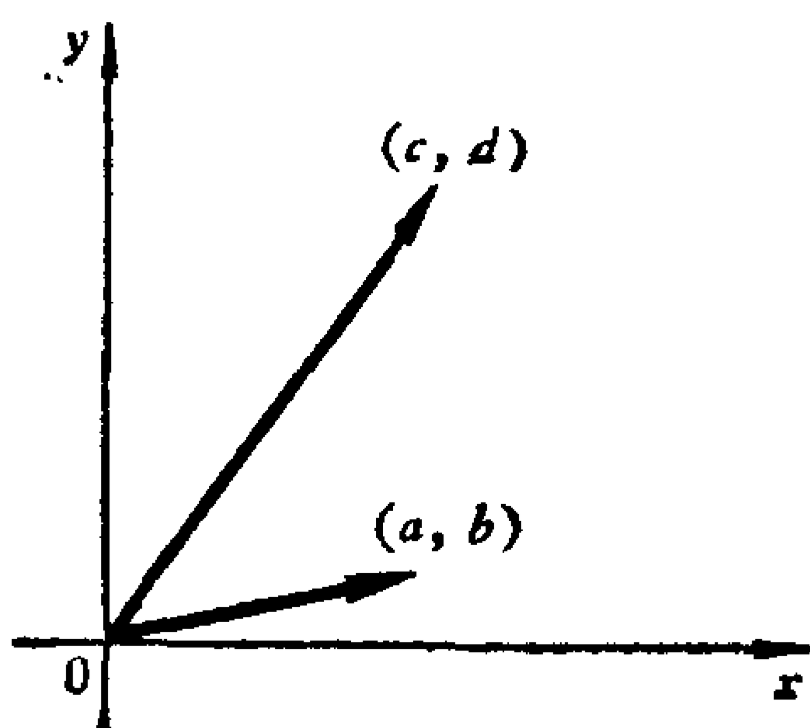


图 11

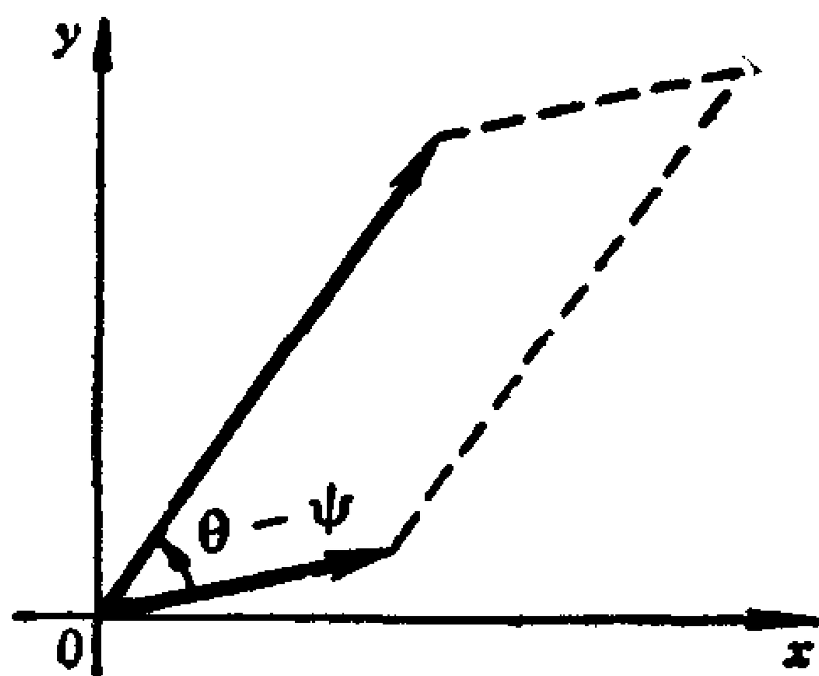


图 12

§8. De Moivre 定理

我們立刻可以把乘法公式推广到几个复数。命 $\alpha_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k=1,2,$

$\cdots, n$, 則

$$\alpha_1\cdots\alpha_n = \rho_1\cdots\rho_n(\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)).$$

可以用归納法来証明这一結果. 当 $n=2$ 时,由 §7 可知本結論正确. 假定这一結論当 $n-1$ 时正确,則

$$(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1})\alpha_n = \rho_1\cdots\rho_{n-1}(\cos(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})+ \\ + i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1}))\rho_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n) = \\ = \rho_1\cdots\rho_n(\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)).$$

特別当 $\rho_1=\cdots=\rho_n=\rho$; $\theta_1=\cdots=\theta_n=\theta$ 时,我們有

De Moivre 定理. 对任一自然数 n,常有

$$(\rho(\cos\theta+i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta). \tag{1}$$

又由

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)=1,$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

可知,式(1)对負整数 n 也正确.

利用 De Moivre 定理我們可以解方程

$$x^n = 1. \tag{2}$$

或者更一般些,解方程

$$x^n=\alpha,\quad \alpha=\rho(\cos\psi+i\sin\psi),\quad \rho>0,\quad 0\leqslant\psi<2\pi. \tag{3}$$

命 $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,則得

$$r^n=\rho,\quad n\theta=\psi+2\pi k, \tag{4}$$

此处 k 是一整数,由此得出

$$r=\rho^{\frac{1}{n}},\quad \theta=\frac{1}{n}(\psi+2\pi k),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

它們都是方程(3)的不同的解,一共有 n 个.

特別是方程(2),它的 n 个根就是单位圓的內接正 n 边形的頂点. 命

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

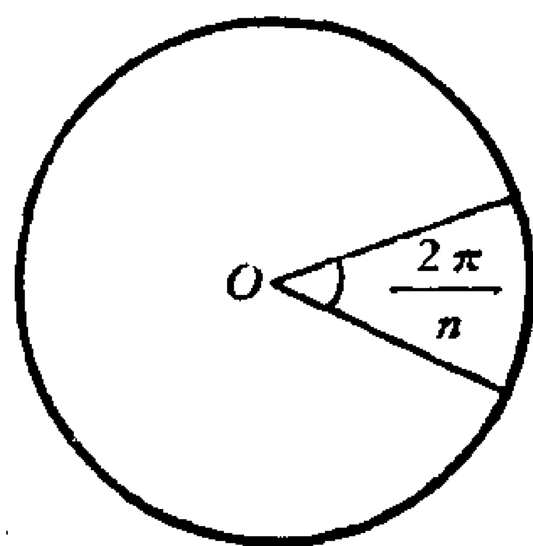


图 13

則其他諸根可以写成为

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \cdots,\ \varepsilon^{n-1},\quad \varepsilon^n=1.$$

一般說来,如果 x_0 是式(3)的一个根, 則 $x_0\varepsilon$, $x_0\varepsilon^2$, $\cdots$, $x_0\varepsilon^{n-1}$ 也都是式(3)的根.

当 $n=3$ 时,

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon^3=1.$$

当 $n=4$ 时,

$$\varepsilon=i,\quad \varepsilon^2=-1,\quad \varepsilon^3=-i,\quad \varepsilon^4=1.$$

De Moivre 的定理有以下的应用.

例 1. 由

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta,$$

比較实数部分与虚数部分,得出倍角公式

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

一般地說,从

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

可得

$$\begin{aligned}\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \\ + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \cdots + (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta + \\ + \cdots + \begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta, & \text{当 } n \text{ 是偶数,} \\ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cos\theta\sin^{n-1}\theta, & \text{当 } n \text{ 是奇数}\end{cases}\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\sin n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \\ + \cdots + (-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\theta\sin^{2k+1}\theta + \\ + \cdots + \begin{cases}(-1)^{\frac{1}{2}(n-2)}\cos\theta\sin^{n-1}\theta, & \text{当 } n \text{ 是偶数,} \\ (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\sin^n\theta, & \text{当 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}\end{aligned}$$

例 2. 求和

$$A_n = 1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^{n-1}\cos(n-1)\theta,$$
$$B_n = r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + \cdots + r^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

作复数 $A_n + iB_n$,由 De Moivre 定理可知

$$\begin{aligned}A_n + iB_n &= 1 + r(\cos\theta + i\sin\theta) + \\ &+ r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \cdots + r^{n-1}(\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta) = \\ &= 1 + r(\cos\theta + i\sin\theta) + r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + \cdots + r^{n-1}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1} = \\ &= \frac{1 - r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{1 - r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \\ &= \frac{1 - r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{1 - r(\cos\theta + i\sin\theta)} \cdot \frac{1 - r\cos\theta + ir\sin\theta}{1 - r\cos\theta + ir\sin\theta} = \\ &= \frac{r^{n+1}\cos(n-1)\theta - r^n\cos n\theta - r\cos\theta + 1}{r^2 - 2r\cos\theta + 1} + \\ &+ \frac{r^{n+1}\sin(n-1)\theta - r^n\sin n\theta + r\sin\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}i.\end{aligned}$$

比較实数部分及虚数部分可知

$$A_n = \frac{r^{n+1}\cos(n-1)\theta - r^n\cos n\theta - r\cos\theta + 1}{r^2 - 2r\cos\theta + 1},$$

$$B_n = \frac{r^{n+1}\sin(n-1)\theta - r^n\sin n\theta + r\sin\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}.$$

§9. 复数的完备性

关于极限的概念也十分容易地推广到复数范围。

定义 1. 一个复数貫

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots,$$

如果复数 α 具有以下性质，则称 α 为这个复数貫的极限：任給 $\varepsilon > 0$，存在一个自然数 N，使当 $n > N$ 时，

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon.$$

定义 2. 适合以下条件(称为 Cauchy 判别条件)的复数貫

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$$

称为收斂貫：任給 $\varepsilon > 0$，存在一个自然数 N，使当 l, m 都大于 N 时，有

$$|\alpha_l - \alpha_m| < \varepsilon.$$

定理 1. 凡收斂貫一定收斂于一个复数.

这定理的証明很容易. 由条件可知，α_n 的虛、实部分各成一收斂貫，然后由实数的性質立刻得出本定理.

定理 2. 在一有界的无穷点集中一定可以选出一个有极限的子貫.

所以复数具有实数所有的一切完备性：对极限自封，对加、減、乘、除自封，并且还多了一个性質，就是 $x^2+1=0$ 是可解的. 是否还有方程在复数范围內不可解? 如有，我們还可能扩张复数系統. 不必再扩张了，因为任何方程在复数范围內都可解.

定理 3 (代数方程基本定理). 任何一个复系数方程一定至少有一个复数根. 換言之，在复数范围內沒有一个方程是不可解的.

我們不在此証明这一定理，以后講复变数函数論时再加以論証.

如果 x_1 是代数方程

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

的一个根，也就是 $f(x_1) = 0$，則由

$$x^m - x_1^m = (x - x_1)(x^{m-1} + x^{m-2}x_1 + \cdots + x_1^{m-1})$$

可知多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 =$$
$$= f(x) - f(x_1) = a_n(x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \cdots + a_1(x - x_1) + a_0 - a_0 =$$
$$= (x - x_1)(a_n(x^{n-1} + \cdots + x_1^{n-1}) + a_{n-1}(x^{n-2} + \cdots + x_1^{n-2}) + \cdots + a_1),$$

即 $f(x)$ 有一个因子 $(x - x_1)$. 換句話說，如果 $f(x_1) = 0$，則 $(x - x_1)$ 一定除得尽

$f(x)$. 去掉因子$(x-x_1)$之后，仍然得一多項式，用以上方法又可求出另一因子$(x-x_2)$，等等. 依此方法繼行，可知在复数范围內任一多項式可分解为

$$f(x)=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

也就是說，如果連重根的个数也計算在內，那末一个 n 次方程一定有 n 个根，并且不能再多.

这說明了复数域有代数自封性.

从以上所得的結果也可以看到，

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)=$$
$$=a_n[x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^k\sigma_kx^{n-k}+\cdots+(-1)^n\sigma_n],$$

此处 σ_k 是从 $x_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 中任取 k 个所得乘积的总和，也就是

$$\sigma_1=x_1+\cdots+x_n,\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\cdots,\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n.$$

比較系数可見

$$\sigma_1=-a_{n-1}/a_n,\quad \sigma_2=a_{n-2}/a_n,\cdots,$$
$$\sigma_k=(-1)^ka_{n-k}/a_n,\cdots,\quad \sigma_n=(-1)^na_0/a_n.$$

我們現在考慮实系数多項式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

如果 $f(x)$ 有一个复根 $\alpha+\beta i$，即

$$f(\alpha+\beta i)=0,$$

則 $\alpha-\beta i$ 也是一根，所以 $f(x)$ 可以被

$$[x-(\alpha+\beta i)][x-(\alpha-\beta i)]=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2+px+q,$$
$$(p=-2\alpha,\quad q=\alpha^2+\beta^2)$$

除尽. 用 x^2+px+q 除 $f(x)$，得出

$$f(x)=(x^2+px+q)f_1(x).$$

再研究 $f_1(x)=0$，陆續进行可得以下的

定理 1. 一个实系数多項式可以分解为一次与二次的实因子.

所以一个实系数方程的复根是共軛地成对出現的，并且一对复根的重数相等；由此也推出，实系数的奇次多項式至少有一个实根.

§10. 四元数簡介

上面我們已經看到了把实数扩充到复数的过程，并且已經知道复数对四則运算自封、对代数运算自封和对极限也自封諸性質. 在代数的研究中，我們还可以把复数再扩展，扩展成为一个更大的系統，称为四元数. 复数仅有两个单元 1 与 i，而四元数有四个单元 $1,i,j,k$. 一般的四元数的形式是

$$\alpha=a+bi+cj+dk,$$

此处 a,b,c,d 是实数. 两个四元数的和与差定义如下：設

$$\beta = a' + b'i + c'j + d'k,$$

則

$$\alpha \pm \beta = (a \pm a') + (b \pm b')i + (c \pm c')j + (d \pm d')k.$$

乘法的規則依賴于

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k,$$
$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

一般講来

$$\alpha\beta = (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) = (aa' - bb' - cc' - dd') +$$
$$+ (ab' + ba' + cd' - dc')i + (ac' + ca' + db' - bd')j +$$
$$+ (ad' + da' + bc' - cb')k.$$

四元数的加法也适合交换律和結合律. 我們不难証明,乘法虽然适合結合律,但是并不适合交换律,这是和复数与实数最显著的不同. 换言之,我們有

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

但是一般講来,

$$\alpha\beta \neq \beta\alpha.$$

而乘、加之間的分配律依然正确.

現在先研究怎样的 α 能使任一四元数 β 常有 $\alpha\beta = \beta\alpha$. 由 $\alpha i = i\alpha$ 可知 $c=d=0$; 又由 $\alpha j = j\alpha$ 可知 $b = d = 0$, 卽当 α 是实数 a 时才可能与所有的四元数交换. 实数域是四元数域的一部分,它是和所有的四元数都可以交换的数的集合.

我們定义

$$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$$

为 α 的共軛数,实数

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2a; \quad \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

各称为 α 的迹和 α 的模,各以 $S(\alpha)$ 与 $N(\alpha)$ 表之. 显然有

$$S(\alpha + \beta) = S(\alpha) + S(\beta).$$

我們現在証明

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta).$$

在証明此式之前,我們先提出另一重要性質

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}.$$

这可以从乘法公式直接推出来,由此立得

$$N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\beta)(\bar{\beta}\bar{\alpha}) = \alpha(\beta\bar{\beta})\bar{\alpha} = N(\alpha) \cdot N(\beta).$$

如果 $N(\alpha) = 0$, 卽 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, 則 $a = b = c = d = 0$,因而 $\alpha = 0$.

又若 $\alpha\beta = 0$ 而 $\alpha \neq 0$, 在此式两边同乘以 $\bar{\alpha}$, 則得

$$N(\alpha) \cdot \beta = 0,$$

所以 $\beta = 0$; 同法若 $\beta \neq 0$, 可以得到 $\alpha = 0$. 换言之, 从 $\alpha\beta = 0$ 可知 $\alpha = 0$ 或

$\beta = 0.$

又 α 适合方程

$$x^2 - S(\alpha)x + N(\alpha) = 0,$$

原因是如果把 $x = \alpha$ 代进去，则得

$$\alpha^2 - (\alpha + \bar{\alpha})\alpha + \alpha\bar{\alpha} \equiv 0.$$

同样 $x = \bar{\alpha}$ 也是一根．但与复数域中不同的是二次方程往往不止两个根，例如，最簡单的方程

$$x^2 = -1,$$

一眼就看出它至少有 $x = \pm i, \pm j, \pm k$ 六个根，实际上它有无穷个根，适合于 $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ 的实数 p, q, r 常使

$$(pi + qj + rk)^2 = -(p^2 + q^2 + r^2) = -1.$$

关于四元数的一些几何意义将見于下章中．

补　　充

§11. 二进位計算

在§1里已提到二进位，即只要用0，1两个符号就可以表达出一切自然数来．当然在书写的时候，二进位最长．但由于可以用电路的开来表示1，电路的关来表示0，所以用二进位最便于化成机器的动作．因此二进位制已經成为非常实用的了．下面介紹二进位的一般运算．

例1．101011.1011 + 111.0011 = 110010.111．算式是

$$\begin{array}{r} 101011.1011 \\ +\quad 111.0011 \\ \hline 110010.1110 \end{array}$$

例2．101011.1011 − 111.0011 = 100100.1．算式是

$$\begin{array}{r} 101011.1011 \\ -\quad 111.0011 \\ \hline 100100.1000 \end{array}$$

例3．1101.1 × 10.1 = 100001.11．算式是

$$\begin{array}{r} 1101.1 \\ \times\quad 10.1 \\ \hline 11011 \\ 110110 \\ \hline 100001.11 \end{array}$$

例 4. 110010 ÷ 101 = 1010. 算式是

```
        1010
101 / 110010
       101
       ---
         101
         101
         ---
           0
           0
           -
           0.
```

怎样化一个十进位数为二进位数? 須把这数的整数部分与小数部分分开来算.

先介紹把十进位的整数化为二进位的方法. 用 2 除余 1 記 1, 余 0 記 0 作为个位;再用 2 除所得的商,把余数記在上数之左;再用 2 除商,把余数記在上数之左等等.

例 5. 十进位的 25 等于二进位的 11001. 它的算式是

```
2 | 25 ······ 1
   2 | 12 ······ 0
      2 | 6 ······ 0
         2 | 3 ······ 1
             1.
```

将十进位小数化为二进位的方法是将小数乘以 2, 得出的整数部分記作小数的第一位;留下的分数部分再乘以 2, 把整数部分記作小数的第二位等等.

例 6. 十进位的 0.6145 等于二进位的 0.10011101…. 它的算式是

	0.6145
1	2290
0	4580
0	9160
1	8320
1	6640
1	3280
0	6560
1	3120.

所以,十进位的 25.6145 等于二进位的 11001.10011101….

把一个二进位数表为十进位数的方法也是相同的, 須把这数的整数部分与小数部分分开来算. 整数部分的算法为除以 1010 (即十进位的 10), 所得余数化为十进位数記作个位; 再除以 1010, 所得余数化为十进位数記作十位; 如此繼行,即得出百位、千位,以至我們所需要的位数.

例 7. 二进位的 1110111001 等于十进位的 953. 算式是

```
1110111001 |  1010       |
1010       | ----------- |  1010
---------- |  1011111    | ------
 10011     |  1010       |  1001
  1010     | ----------- | (百位)
---------- |     1111    |
  10011    |     1010    |
   1010    | ----------- |
---------- |      101    |
   10010   |    (十位)   |
    1010   |
---------- |
    10000  |
     1010  |
---------- |
      1101 |
      1010 |
---------- |
        11 |
    (个位) |
```

将二进位小数化为十进位小数的方法是将小数乘以 1010，得出的整数部分化为十进位数記作小数的第一位；留下的部分再乘以 1010，把整数部分化为十进位数記作小数的第二位等等．

現在我們把求平方的方法介紹如下：与十进位数开方的方法相似，也是先将欲計算的数分段．但由于在二进位中

$$(a+b)(a+b)=a\cdot a+10a\cdot b+b\cdot b,$$

所以在原来乘 20 的地方换上乘 100．

例 8． $\sqrt{110001}=111$．算式是

```
              11 | 00 | 01 | 111
               1 |    |    |------
          -------------------
100 × 1  |    10   00
     + 1 |     1   01
-----------------------------
100 × 11 |         11   01
     + 1 |         11   01
-----------------------------
                        ====  .
```

例 9． $\sqrt{10}=1.011\cdots$．算式是

```
                   10 | 1.011
                    1 |-------
         ----------------
100           |  100
              |  000
              |---------
1000 + 1      |  10000
              |   1001
              |---------
10100 + 1       |  11100
                |  10101
                |---------
                     111  .
```

讀者不难由此推出任意 r 进位的四則运算以及将 r 进位表为 s 进位数的方法。

§12. 循环小数

若有自然数 n 及 λ 使 $b_{n+l\lambda+k}=b_{n+k}$ ($k=1, 2, \cdots; l=1, 2, \cdots$)，則称小数 $\alpha=a_m a_{m-1}\cdots a_1.b_1b_2\cdots$ 为循环小数，簡記为

$$\alpha=a_m\cdots a_1.b_1\cdots b_n\dot{b}_{n+1}\cdots\dot{b}_{n+\lambda}.$$

定理 1. 每一循环小数均为有理数。

証. 記

$$\alpha_s=a_m\cdots a_1.b_1\cdots b_s,\quad \beta=0.\overbrace{00\cdots0}^{n\text{位}}b_{n+1}\cdots b_{n+\lambda},$$

則

$$\alpha_{n+l\lambda}=\alpha_n+\beta+\frac{\beta}{10^\lambda}+\cdots+\frac{\beta}{10^{(l-1)\lambda}}=\alpha_n+\frac{\beta\left(1-\frac{1}{10^{l\lambda}}\right)}{1-\frac{1}{10^\lambda}}.$$

由例 4.4 可知

$$\alpha=\lim_{l\to\infty}\alpha_{n+l\lambda}=\alpha_n+\frac{\beta}{1-\frac{1}{10^\lambda}},$$

故 α 为有理数. 定理証完.

定理 2. 有理数都是循环小数。

証. 我們只討論正有理数 $\frac{p}{q}$ 的情形，p, q 都是正整数. 用 q 除 p，得商数 a，余数 r_1；乘 10 于 r_1，再以 q 除之，得商数 b_1，余数 r_2；再乘 10 于 r_2，并以 q 除之，又得商数 b_2，余数 r_3，$\cdots$ 等等. 用式子表示，就是

$$\begin{aligned}p&=aq+r_1, & 0\leqslant r_1<q,\\ 10r_1&=b_1q+r_2, & 0\leqslant r_2<q,\\ 10r_2&=b_2q+r_3, & 0\leqslant r_3<q,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}$$

a 就是 $\frac{p}{q}$ 的整数部分；$b_1, b_2, b_3, \cdots$ 則是 $\frac{p}{q}$ 的小数表示中的第一、二、三、$\cdots$位小数. 如果有自然数 n 与 λ，使 $r_n=r_{n+\lambda}$，那末乘它們以 10，再以 q 除之，所得的商数与余数应当相同，也就是說

$$b_{n+1}=b_{n+\lambda+1},\quad r_{n+1}=r_{n+\lambda+1}.$$

同理

$$\begin{aligned}&b_{n+2}=b_{n+\lambda+2},\quad r_{n+2}=r_{n+\lambda+2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &b_{n+\lambda}=b_{n+2\lambda},\quad r_{n+\lambda}=r_{n+2\lambda},\\ &b_{n+\lambda+1}=b_{n+2\lambda+1},\quad r_{n+\lambda+1}=r_{n+2\lambda+1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

所以 $b_{n+l\lambda+k}=b_{n+k}$ ($k=1, 2, \cdots; l=1, 2, \cdots$). 因此 $\frac{p}{q}$ 的小数表示是循环的. 由于 $0 \leqslant r_i < q$ ($i=1, 2, \cdots$), 所以在 $q+1$ 个余数 $r_1, \cdots, r_{q+1}$ 中,一定有两个相等. 于是根据上面的說明, $\frac{p}{q}$ 一定是循环小数.

§13. 有理数接近实数

用小数来接近实数当然也就是用有理数接近实数的一种特殊形式. 在应用中,有时我們要用分母最小的有理数来接近实数. 我們现在还是从 $\sqrt{2}$ 說起, $\xi=\sqrt{2}-1$ 在 0 与 1 之間. $\frac{1}{\xi}=\sqrt{2}+1$ 大于 1, 它的整数部分等于 2, 而分数部分等于 ξ. 換言之,有等式

$$\frac{1}{\xi}=2+\xi,$$

也就是

$$\xi=\frac{1}{2+\xi}.$$

用 0 和 $\frac{1}{2}$ 来比, $\frac{1}{2}$ 更接近于 ξ. 既然如此,上式右边如采用 $\frac{1}{2}$ 代 ξ 应当比 0 代 ξ 更精密些. 算出了 $\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$, 也就是說, $\frac{2}{5}$ 比 $\frac{1}{2}$ 更接近于 ξ 些; 右边代以更精密的 $\frac{2}{5}$, 左边 $\frac{1}{2+\frac{2}{5}}=\frac{5}{12}$ 对 ξ 一定更精密些. 用这样办法算出一批分数

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \frac{169}{408}.$$

如此得出的

$$\frac{169}{408}=0.414215$$

准到了五位小数. 这个方法使用簡单(指比开方法),并且收斂得也不慢,同时象 $\frac{169}{408}$ 还是分母不大于 408 的分数中与 $\sqrt{2}-1$ 最接近的近似值.

以上的方法还体現了分析学上的一个重要方法——迭代法的原则.

現在我們把上面的結果予以推广.

命 ξ 表一正的实数, a_0 是它的整数部分; 又命 $\xi-a_0=\frac{1}{\xi_1}$, 則 ξ_1 也是正实数, 而且大于 1. 再命 a_1 是 ξ_1 的整数部分及 $\xi_1-a_1=\frac{1}{\xi_2}$; 如此續行, 命 ξ_{n-1} 的整数部分是

a_{n-1}，而

$$\xi_{n-1}-a_{n-1}=\frac{1}{\xi_n}.$$

如此就得出了一个分数

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{\xi_n}}}}.$$

这样的写法占的篇幅太多，我們簡写为

$$a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{\xi_n}$$

或

$$[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \xi_n].$$

經过計算易得

$$[a_0]=\frac{a_0}{1},\quad [a_0, a_1]=\frac{a_0a_1+1}{a_1},$$

$$[a_0, a_1, a_2]=\frac{a_2a_1a_0+a_2+a_0}{a_2a_1+1}.$$

普通命

$$[a_0, \cdots, a_n]=\frac{p_n}{q_n}=\alpha_n,$$

称为 ξ 的第 n 个漸近分数或漸近值.

定理 1. 漸近分数的分母与分子之間有以下的关系：

$$p_0=a_0,\quad p_1=a_1a_0+1, \cdots,\quad p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},$$
$$q_0=1,\quad q_1=a_1, \cdots,\quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}.$$

証. 我們用归納法. 当 $n=2$ 时，上面的結論显然正确. 假定已經知道以上的結論对 m 已經成立，由

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}=[a_0, a_1, \cdots, a_{m+1}]=\left[a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right]=$$

$$=\frac{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)p_{m-1}+p_{m-2}}{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)q_{m-1}+q_{m-2}}=\frac{a_mp_{m-1}+p_{m-2}+\frac{1}{a_{m+1}}p_{m-1}}{a_mq_{m-1}+q_{m-2}+\frac{1}{a_{m+1}}q_{m-1}}=$$

$$=\frac{p_m+\frac{1}{a_{m+1}}p_{m-1}}{q_m+\frac{1}{a_{m+1}}q_{m-1}}=\frac{a_{m+1}p_m+p_{m-1}}{a_{m+1}q_m+q_{m-1}}$$

可得定理.

定理 2. p_n 与 q_n 还适合以下的公式：

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1},\quad n\geqslant 1 \tag{1}$$

及

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n, \quad n \geqslant 2. \tag{2}$$

證. 当 $n=1$ 时,(1)式显然成立. 現在行归納法,由定理 1 可知

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1} =$$
$$= p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1} = (-1) \cdot (-1)^n,$$

故得(1)式. 由此并定理 1 又可得出

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) =$$
$$= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = (-1)^n a_n.$$

由(2)立刻得出一个单調遞升貫

$$\alpha_0 < \alpha_2 < \alpha_4 < \cdots$$

及一个单調遞降貫

$$\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_5 > \cdots,$$

并且由(1)立刻得出

$$\alpha_{2n} < \alpha_{2n-1}.$$

我們現在来証明

定理 3.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{2n} = \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n-1} = \xi.$$

因为 $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geqslant q_{n-1} + 1 \geqslant (q_{n-2} + 1) + 1 \geqslant \cdots$, 所以这定理又可以是下述定理的推論.

定理 4.

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

證. 我們有

$$\xi = \left[a_0, \cdots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}} \right],$$

$$\xi = \frac{\xi_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\xi_{n+1} q_n + q_{n-1}}, \quad \xi_{n+1} \geqslant a_{n+1} \geqslant 1,$$

所以

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| \leqslant \frac{|(\xi_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (\xi_{n+1} q_n + q_{n-1})|}{(\xi_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(a_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

例 1.

$$\left| \sqrt{2} - 1 - \frac{169}{408} \right| \leqslant \frac{1}{408 \times (408 \times 2 + 169)} = \frac{1}{408 \times 985} < \frac{1}{4 \times 10^5}.$$

$\sqrt{2} - 1$ 与 $\frac{169}{408}$ 的误差不超过四十万分之一.

例 2. 圓周率

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \cdots]$$

的漸近分数是

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \cdots.$$

在我国五世紀时，祖冲之以 $\frac{22}{7}$ 作为疏率，$\frac{355}{113}$ 作为密率，由以上的定理可知

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| \leqslant \frac{1}{113 \times 33102} < \frac{1}{10^6},$$

故取 π 为 $\frac{355}{113}$ 将准到小数六位.

附記. 实質上，$\frac{p_n}{q_n}$ 是分母 $\leqslant q_n$ 的一切有理数中与 ξ 最接近的数. 关于此点，我們这儿不加証明(可参考数論导引，p. 271—272).

例 3. 为什么四年一閏，每隔四年添一天？为什么第一百年又少閏一天？

地球繞太阳一周需 365 天 5 小时 48 分 46 秒，也就是

$$365 + \frac{5}{24} + \frac{48}{24 \times 60} + \frac{46}{24 \times 60 \times 60} = 365\frac{10463}{43200}.$$

展开为連分数得

$$365\frac{10463}{43200} = 365 + \frac{1}{4+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{64},$$

算法为

		43200
10463	4	41852
9436	7	1348
1027	1	1027
963	3	321
64	5	320
64	64	1

它的分数部分的漸近分数是

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{163}{673}, \frac{10463}{43200}.$$

这說明四年加一天是初步的最好的逼近. 但 29 年加 7 天更精密些；33 年加 8 天又精密些(也就是 99 年加 24 天，我們的算法是 100 年加 24 天)；128 年加 31 天更精密(这就是說，头三个 33 年加 8 天，后一个 29 年加 7 天，共 $29 + 33 \times 3 = 128$ 年加 31 天. 在四百年內，有三个 128 年，四个 4 年，所以四百年加 $3 \times 31 + 4 \times 1 = 97$ 天，这与我們的算法相同)；等等.

由上看来，我們的历法是相当精确的.

例 4. 农历月大月小是怎样来的？

从太阳上看月亮繞地球一周所需要的时間为 29.5306 天，展成連分数得

$$0.5306=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{33}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2},$$

它的漸近分数是

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{8}{15},\ \frac{9}{17},\ \frac{26}{49},\ \frac{867}{1634},\cdots.$$

故就一个月来說，最近似的 30 天，2 个月就应当一大一小，15 个月中应当 8 大 7 小，17 个月中 9 大 8 小等等．就 49 个月来說，前两个 17 个月里，均有 9 个大月，再 15 个月里有 8 个大月，共 49 个月中有 26 个大月．

例 5. 怎样算农历的閏月？

$$\frac{365.2422}{29.5306}=12.37\cdots.$$

将 0.37 展开成連分数，得

$$0.37=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3},$$

它的漸近分数为

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{19},\ \frac{10}{27}.$$

因此，二年一閏太多，三年一閏太少，八年三閏太多，十九年七閏太少，等等．

例 6. 月蝕的周期是多少？

朔望月就是相同的月面位相隔的时間，它等于 29.5306 日．交点月就是月球在它軌道上从"交点"（"交点"就是月亮繞地球軌道与地球繞太阳軌道的交点）开始繞地球一周再回到这个"交点"所需的时間，它等于 27.2123 日．

$$\frac{29.5306}{27.2123}=1+\frac{1}{11}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{1}+\frac{1}{25}+\frac{1}{2}.$$

考虑 $1+\frac{1}{11}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}=\frac{242}{223}$，即經过 223 个朔望月或 242 个交点月，这就是月蝕的周期，它等于 223 × 29.5306 天 = 6585 天 = 18 年零 11 天．

例 7. 火星离地球最近的一年叫火星的大冲，已知火星公轉一周是 687 日．因为

$$\frac{687}{365.25}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2},$$

考虑 $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}=\frac{15}{8}$，所以每隔 15 年有一次大冲．

§14. 誤　　差

上面我們用无穷小数来描述实数，但在实际計算时，我們总是用有限部分来計算的，

这种取舍之間便产生誤差. 取近似值的方法有两种:一种是取到小数第 n 位,以下的都舍弃掉,如此就得

$$0 \leqslant \alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n};$$

另一种是四舍五入法地取到小数第 n 位,这样的近似值 p_n 适合于

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{10^n} \leqslant \alpha - p_n < \frac{1}{2}\frac{1}{10^n}.$$

在实际計算时，我們必須注意两件事：(1)原資料数字的精确程度；(2)在計算时可能产生的誤差. 如果我們用位数过多的幷不可靠的数字入算,是徒劳无功的,因而也是完全不必要的. 我們現在不討論原資料所产生的可能誤差,而只談計算誤差. 在計算的时候,我們必須先注意所入算的数字的可靠性；另一方面,我們也必須了解对答案的精确度的要求. 这样,針对前者,我們可以不算沒有把握的計算,而对于后者,我們可以免去不必要的計算.

我們現在只准备說明几条最簡单的估計方法.

定义. 若量 A 以数 a 为其近似值,則 A 与 a 的差的絕对值称为 a 的絕对誤差,又相对誤差是 a 的絕对誤差和它本身的絕对值的比值,就是 $|A-a|/|a|$[1].

絕对誤差和相对誤差都是沒有实用价值的概念. 一般講来,我們应用最大絕对誤差(或称外絕对誤差)或最大相对誤差(或称外相对誤差). 所謂最大相对誤差,就是指 $|A-a|/|a|$ 的某一有把握的上界. 例如,用四舍五入取 n 位小数所得的最大相对誤差就是 $\frac{1}{2a}\frac{1}{10^n}$.

例. 3.14 是 π 的漸近值，它的絕对誤差是 0.00159…, 0.0016 可以用作最大絕对誤差,而

$$\frac{0.0016}{3.14} = 0.00051$$

是最大相对誤差.

我們用 δ_a 表 A 对 a 的最大相对誤差,則得

$$A = a + a\theta\delta_a, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

今后我們用 θ 代表一个絕对值 $\leqslant 1$ 的数, 但是每次不一定代表同一个数.

从

$$B = b + b\theta\delta_b, \quad |\theta| \leqslant 1$$

可得

$$A + B = a + b + (a+b)\theta\left(\frac{a}{a+b}\delta_a + \frac{b}{a+b}\delta_b\right) \leqslant a + b + (a+b)\max(\delta_a, \delta_b);$$

另一方面

$$A + B \geqslant a + b - (a+b)\max(\delta_a, \delta_b),$$

因而得出

1) 有时也将絕对誤差与量 A 的絕对值的比值 $|A-a|/|A|$ 定义作用 a 来近似 A 的相对誤差.

甲

乙

$$\delta_{a+b} \leqslant \max(\delta_a, \delta_b),$$

此处 $\max(\alpha, \beta, \cdots)$ 代表这些数中最大的一个.

又从

$$AB = ab(1 + \theta\delta_a)(1 + \theta\delta_b) = ab(1 + \theta(\delta_a + \delta_b + \delta_a\delta_b))$$

可知

$$\delta_{ab} \leqslant \delta_a + \delta_b + \delta_a\delta_b,$$

但是一般講来, δ_a, δ_b 都是很小的数,所以 $\delta_a\delta_b$ 更小,因此我們也不妨写成为

$$\delta_{ab} \leqslant \delta_a + \delta_b. \tag{2}$$

同样,对任一自然数 m 有

$$\delta_{a^m} \leqslant m\delta_a. \tag{3}$$

又

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}\,\frac{1+\theta\delta_a}{1+\theta\delta_b} = \frac{a}{b}\left(1 + \theta\,\frac{\delta_a - \delta_b}{1+\theta\delta_b}\right).$$

由于

$$1 + \theta\delta_b \geqslant 1 - \delta_b$$

及

$$\frac{1}{1-\delta_b} = 1 + \delta_b + \frac{\delta_b^2}{1-\delta_b}$$

可知,如果略去 $\delta_b\delta_a$, δ_b^2, $\dfrac{\delta_a\delta_b^2}{1-\delta_b}$ 与 $\dfrac{\delta_b^3}{1-\delta_b}$ 卽得

$$\delta_{a/b} \leqslant \delta_a + \delta_b. \tag{4}$$

例 1. 在求方柱体积 $V = r^2h$ 时, $\delta_V = 2\delta_r + \delta_h$.

例 2. A 与 B 用四舍五入所得的数值各为 3.14 与 2.32, 求 $A+B$, $A-B$, AB 与 A/B 的誤差.

命

$$A = 3.14 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^2}\theta, \quad B = 2.32 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{10^2}\theta.$$

由

$$A + B = 5.46 + \frac{\theta}{10^2}$$

可知 $5.45 \leqslant A + B \leqslant 5.47$. $A+B$ 的准确小数值是 5.4,准两位. 而 $A - B = 0.82 + \dfrac{\theta}{10^2}$, $0.81 \leqslant A - B \leqslant 0.83$,所以 $A-B$ 的准确小数是 0.8. 同法, $7.25 \leqslant AB \leqslant 7.31$, $AB = 7.3$. $1.36 \leqslant A/B \leqslant 1.38$, $A/B = 1.4$.

定义. 从左方数过来第一个非 0 的数字叫做第一位有效数字. 例如, 0.034 中第一位有效数字是 3. 一般說来,一个数字有 n 位有效数字的意义是:在第 n 位以前的数字与精确数字相同,只有第 n 位数字可能与精确数值的同位数字有所不同,但差别也不大于一个单位.

例 1. 3.1416 是 π 按四舍五入法来計算出的五位有效数字,而 3.1415 是略去尾巴而

得出的五位有效数字.

祖冲之首先指出

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

这对有效数字和誤差是极好的例子，是数学史上极光輝的貢献.

例 2. 任何一[厘米]^3 气体所含的分子数目是 2.683×10^{19} 个，它有四位有效数字(Loschmidt 数). Avogadro 数

$$6.023 \times 10^{23}\,[\text{克分子}]^{-1}$$

(即一[克分子]中質点的数目)有四位有效数字.

例 3. $\log 2 = 0.3010$ 有四位有效数字.

例 4. 一浬等于 3.704 华里，它有四位有效数字.

現在証明：如果 A 的近似值 a 具有 n 位有效数字，則 a 的最大相对誤差 δ_a 不超过 $\frac{1}{z\cdot 10^{n-1}}$ (不用四舍五入法)或者 $\frac{1}{2z\cdot 10^{n-1}}$ (用四舍五入法)，其中 z 是 a 的第一位有效数字.

假定 a 的第一位有效数字是 $z\cdot 10^m$，从假定可知

$$|A-a| \leqslant 10^{m-n+1},$$

所以

$$\delta_a = \frac{10^{m-n+1}}{a} \leqslant \frac{10^{m-n+1}}{z\cdot 10^m} = \frac{1}{z\cdot 10^{n-1}}.$$

反之，如果 s 是满足不等式

$$(z+1)\delta_a \leqslant 10^{-s}$$

的最大指数，則 a 是 A 的至少具有 $n = s+1$ 位有效数字的近似值.

原因是从

$$|A-a| \leqslant a\delta_a \leqslant (z+1)10^m\delta_a \leqslant 10^{m-s}$$

即得所述結果.

例 1. 已知 $e = 2.7\cdots$ 具有 0.5% 的相对誤差，可取多少位有效数字. 若已知 e 的第一位是 2，那末

$$(2+1)\frac{0.5}{100} \leqslant \frac{1}{10},$$

故可取二位数字.

注意，由 $\delta_a < \frac{1}{z\cdot 10^s}$ 还不能推出 a 有 $s+1$ 位有效数字.

例 2. $A = \sqrt[3]{90} = 4.4814\cdots$, $a = 4.47$,

$$\delta_a < \frac{0.0115}{4.47} < \frac{1}{4\times 10^2}.$$

但 a 只有二位有效数字.

进行四則运算之后的有效数字的法則如次:

1. 加法：項数不多时，全部和数中仍保留最大項的数字位数作为和的位数，在不利的情形下，可能減少一位.

例 1. 求和 $a = 3454.70 + 386.350 + 32.4350 + 1.24430$. 各有六位有效数字，最大項取六位，其他可以保留的数字就大大地減少了. 抹去千分位，加之如下式.

$$
\begin{array}{r}
3454.70 \\
386.35(0) \\
32.43(50) \\
1.24(430) \\
\hline
3874.72
\end{array}
$$

2. 減法：如果被減数与減数相差很大，仍如加法的情况. 但如果两者相差很小，則有效数字将大大地縮減. 一般在計算中最好避免相差极小的数相減.

例 2. $1234 - 1231 = 3$. 原来的有效数字各四位，而減后仅有一位 3.

3. 乘法和除法：許多接連的乘法与除法运算的結果，参加运算的数字最小位数要少一位，至多少两个有效数字.

这些法則都可以从(1)，(2)，(3)推出.

§ 15. 三、四次方程解法

二次方程的代数解法已为大家所熟知，我們自然会提出高次方程的代数解法問題. 所謂代数解法，就是由方程的系数經有限次四則运算和开方运算得出根来的方法. 我們已知三、四次方程的代数解法，我們也知道五次及更高次的方程沒有一般的代数解法. 后者属于方程論的范围，我們不加叙述. 在此我們只講三、四次方程的解法.

三次方程的一般形式是

$$y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3 = 0. \tag{1}$$

用新未知数 $x = y - \alpha$ 替代 y，則得

$$x^3 + (3\alpha + a_1)x^2 + (3\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + (\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3) = 0.$$

取 $\alpha = -\frac{1}{3}a_1$，可使 x^2 項消失，如此得出

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2}$$

此处 $p = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2$, $q = a_3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + \frac{2}{27}a_1^3$. 命

$$x = u + v.$$

則得

$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvx.$$

和(2)式比較系数可知

$$3uv = -p, \quad u^3 + v^3 = -q.$$

u^3 与 v^3 是二次方程

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

的根，就是

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = R_1,$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = R_2.$$

因而得出 Cardan 公式

$$x = \sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}. \tag{3}$$

每一立方根有三个不同的值，本来应得出九种可能性，但是因为 $uv = -\frac{p}{3}$，所以仅有以下三种可能性：x 等于

$$\sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}; \quad \sqrt[3]{R_1}\,\omega + \sqrt[3]{R_2}\,\omega^2; \quad \sqrt[3]{R_1}\,\omega^2 + \sqrt[3]{R_2}\,\omega,$$

此处

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega^2 = \bar{\omega}.$$

当 p, q 均为实数时，我們分四种情形来討論方程(2)：

1) 假定

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

当然有 $p < 0$. (3)式中的 R_1, R_2 是共軛虛数. 命

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

此处

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \qquad \cos\varphi = -\frac{q}{2r}. \tag{4}$$

代入 Cardan 公式可知

$$x = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) +$$

$$+ \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2 \tag{5}$$

所以方程(2)有三个实根.

2) 假定

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0 \quad 及 \quad p < 0,$$

由此可知

$$0 < \sqrt{-\frac{p^3}{27}} < \sqrt{\frac{q^2}{4}} = \frac{|q|}{2}.$$

引进輔助角 ω:

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\sin\omega,\quad \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\cos\omega.$$

于是

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}};$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}}.$$

再引进角度

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

我們得到实根

$$x_1=-\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi)=-\frac{2\sqrt{-p/3}}{\sin 2\varphi},\tag{6}$$

其他二根是虛根

$$\frac{\sqrt{-p/3}}{\sin 2\varphi}\pm i\sqrt{-p}\operatorname{ctg}2\varphi.\tag{7}$$

在此情况下,(2)式有三根,一实二虛.

3) 假定

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0\quad 及\quad p>0.$$

与2)相似,但是 $\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ 可能小于 $\left|\frac{q}{2}\right|$, 也可能大于 $\left|\frac{q}{2}\right|$. 我們現在引进 ω:

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\operatorname{tg}\omega,\quad \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\frac{1}{\cos\omega},$$

于是

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{\frac{q\sin^2\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}}=\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=-\sqrt[3]{\frac{q\cos^2\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}}=-\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}}.$$

再引进角度

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

最后有实根

$$x_1=\sqrt{\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi)=-2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg}2\varphi,\tag{8}$$

其二虛根为

$$\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg} 2\varphi \pm \frac{i\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}. \tag{9}$$

4）假定

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0.$$

在此情形下 Cardan 公式变为

$$2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\quad -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\quad -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \tag{10}$$

三个实根，两个等根的情况.

用这些三角公式，并利用三角对数表，可以算出三次方程的根，且有高度准确性.

例 1. 解 $x^3+9x^2+23x+14=0$.

命 $x=y-3$，則方程化为

$$y^3-4y-1=0.$$

此方程有三个实根，分别記为 y_1, y_2, y_3. 由 1）可知

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{27}}{16},\quad \log_{10}\cos\varphi=\bar{1}.51156,\quad \varphi=71°2'56''.\quad \frac{\varphi}{3}=23°40'59'',$$

$$\frac{\varphi+2\pi}{3}=143°40'59'',\quad \frac{\varphi+4\pi}{3}=263°40'59''.$$

又

$$\log_{10}2\sqrt[3]{r}=\log_{10}\frac{4}{\sqrt{3}}=0.3635,$$

故得

$$y_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}=2.1149,$$

$$y_2=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}=-1.8608,$$

$$y_3=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}=-0.2541.$$

原方程之三根为 $-0.8851, -4.8608, -3.2541$.

例 2. 解 $x^3-3x+5=0$.

由 2）可知方程有二个复根与一个实根，又由 2）得

$$\log_{10}\sin\omega=\bar{1}.60206,\quad \omega=23°34'41'',\quad \frac{\omega}{2}=11°47',$$

$$\log_{10}\operatorname{tg}\varphi=\bar{1}.77009,\quad 2\varphi=60°59'34'',$$

$$\log_{10}\frac{1}{\sin 2\varphi}=0.05821,\quad \frac{1}{\sin 2\varphi}=1.1434.$$

又

$$\log_{10}\sqrt{-p}\operatorname{ctg}2\varphi=\bar{1}.98244,\quad \sqrt{-p}\operatorname{ctg}2\varphi=0.96037,$$

故得三根为-2.2868，$1.1434\pm0.96037i$.

虽然以下的解四次方程的方法在实际中并不应用，但为了完备，我們仍然簡单地介紹如下，在介紹中不涉及根的性質的討論.

一般的四次方程的形式是

$$y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4=0. \tag{11}$$

以 $y=x-\frac{a_1}{4}$ 代入，則方程(11)化为

$$x^4+px^2+qx+r=0, \tag{12}$$

此处

$$p=-\frac{3}{8}a_1^2+a_2,\quad q=\frac{1}{8}a_1^3-\frac{a_1a_2}{2}+a_3,$$

$$r=-\frac{3}{256}a_1^4+\frac{1}{16}a_1^2a_2-\frac{1}{4}a_1a_3+a_4.$$

由于恆等式

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2+qx+r-\frac{p^2}{4}-\alpha^2-2\alpha x^2-p\alpha,$$

故方程(12)化为

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-\left[2\alpha x^2-qx+\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)\right]=0. \tag{13}$$

取α使方程

$$2\alpha x^2-qx+\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0 \tag{14}$$

有重根，卽它的判別式必須等于零，亦卽

$$q^2-4\cdot2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}\right)=0. \tag{15}$$

等式(15)为未知量α的实系数三次方程，它有三个根. 設 α_0 为它的一个根、它可以由 Cardan 公式(3)表出，亦卽 α_0 可以由(11)的系数經四則运算及开方运算表出. 利用 α_0 可以将(13)式写为

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(x-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2=0,$$

亦卽它可以分解为两个方程

$$\begin{cases} x^2-\sqrt{2\alpha_0}\,x+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0+\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0, \\ x^2+\sqrt{2\alpha_0}\,x+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0-\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right)=0. \end{cases} \tag{16}$$

因为由方程(12)到方程(16)我們用的都是恆等变換，所以方程(16)的根卽方程(12)的根. 从而方程(11)的根可以由其系数經四則运算及开方而得出.

第二章　矢量代数

§1. 空間坐标系及矢量的定义

我們現在来把矢量的概念推广到空間(三維空間). 先說明一下空間直角坐标系. 取三根相交于一点 O 且两两垂直的直綫, 分别称它們为 x 軸, y 軸与 z 軸. 我們用以下的方法使每根軸上的点都与实数一一对应起来. 先取一单位, 在每一軸上都由 O 量起. 哪边为正哪边为負? 原可任意, 但为了明确起見, 我們依以下的約定办事. 在 x, y 軸上各任取一正向, 头向 x 軸的正向, 面向 y 軸的正向, 而 z 軸的正向在左手边, 这样的取法一般称为**右旋坐标系**(为什么称为"右"旋, 請与螺旋比較). 显然, 如果头向 y 軸的正向, 面向 z 軸的正向, 则 x 軸的正向也在左; 又头向 z 軸正向, 面向 x 軸正向, 則 y 軸的正向也在左, 即 x, y, z; y, z, x; z, x, y 都成右旋系統. 但如果头向 y 正向, 面向 x 正向, 則 z 的正向在右, 这样的次序称为**左旋坐标系**. x, z, y; z, y, x 与 y, x, z 一样都是左旋系統.

过空間任意一点 P 作三个平面, 分别垂直于 x 軸, y 軸与 z 軸. 設垂足对应的三个实数分别是 x_1, y_1, z_1, 于是 P 点决定了一个三实数組 (x_1, y_1, z_1); 反之, 如果我們有一个三实数組 (x_1, y_1, z_1), 过 x, y, z 軸上的点 x_1, y_1, z_1 作三张平面, 分别垂直于 x, y, z 軸, 这三张平面相交于空間一点 P. 因此三实数組 (x_1, y_1, z_1) 与空間的点一一对应. 称 (x_1, y_1, z_1) 为点 P 的坐标. 上述利用三实数組决定空間点的位置的方法, 叫做直角坐标系統, 也称为 Descartes 坐标系.

$(x, y, 0)$ 对应于平面点 (x, y), 所有的点 $(x, y, 0)$ 与平面上的全体点完全一致.

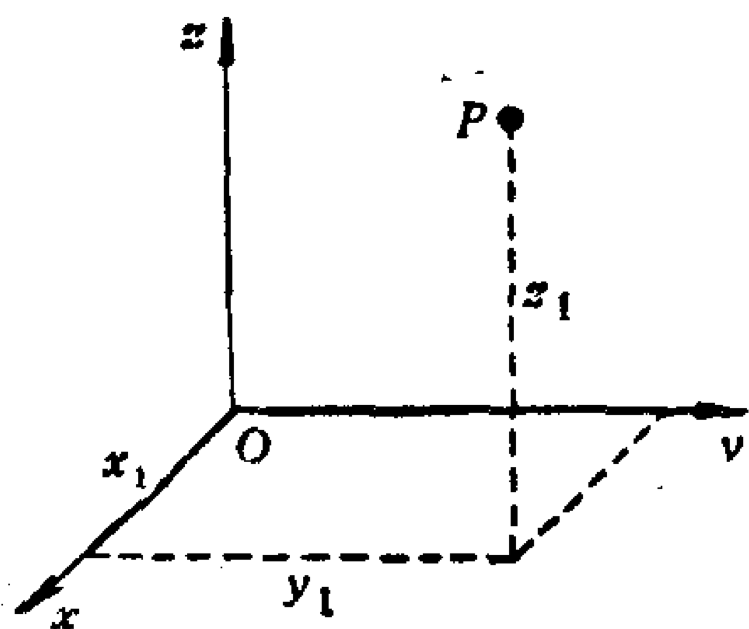


图 14

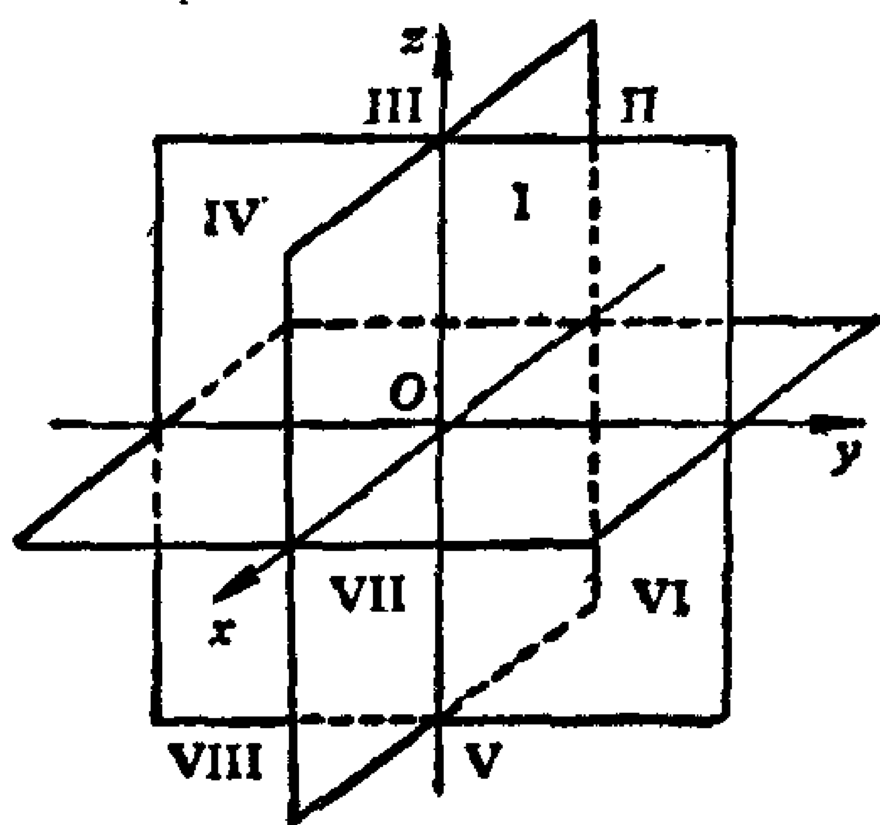


图 15

过 x 軸与 y 軸, y 軸与 z 軸及 z 軸与 x 軸的平面分别称为 xy 平面, yz 平面及 zx 平面. 这三张平面两两垂直且将空間分成八个卦限. 这八个卦限中点的坐标的符号如下表

所示：

坐标 \ 符号 \ 象限	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

过空間一点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 作直綫垂直于 xy 平面，交 xy 平面于点 $P'(x_1, y_1, 0)$。由于原点至 P' 的距离 $\overline{OP'}$ 为 $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，所以由勾股定理，原点至 P 的距离 $\overline{OP}$ 为

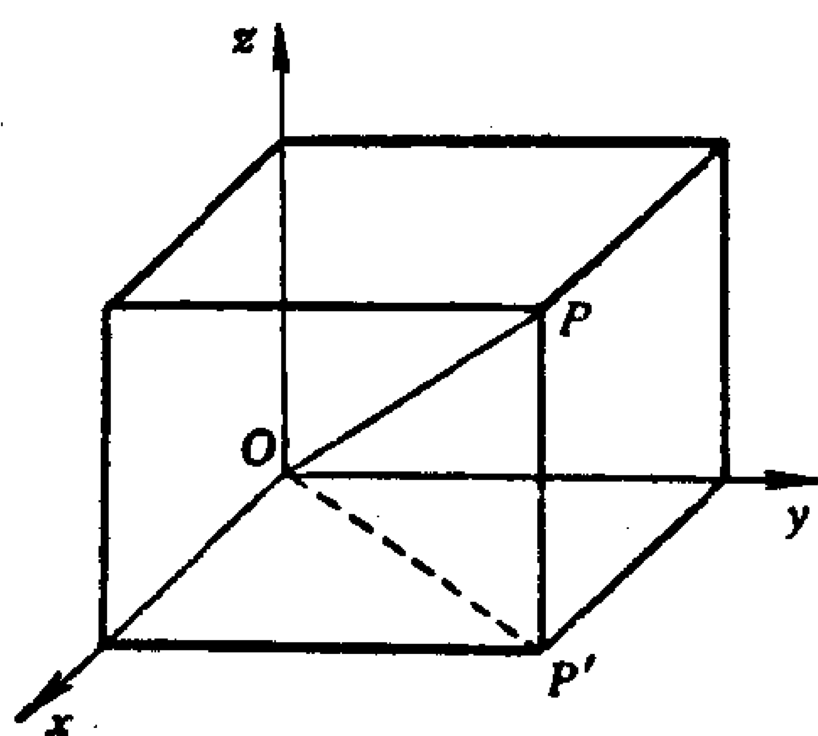


图 16

$$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OP'}^2+z_1^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

同样可証 P 与 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 的距离 $\overline{PQ}$ 为

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

一个矢量就是一个有方向的綫段，由它的起点和終点唯一决定。命起点为(x_1, x_2, x_3)，終点为$(x_1+a_1, x_2+a_2, x_3+a_3)$，我們通常所研究的矢量有以下两种：

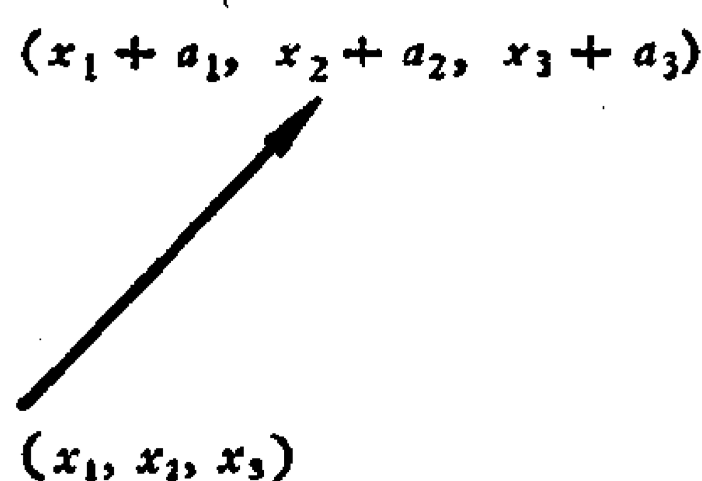


图 17

不管起点如何，所有的同方向等长度的矢量都算做相同。这样的矢量称为自由矢量，由 (a_1, a_2, a_3) 唯一决定，用重体字母 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 来表示。

在同一直綫上不管起点如何，所有的同方向、等长度的矢量都算做相同，这样的矢量称为滑动矢量。

以下所討論的矢量仅指自由矢量。一个自由矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 的长度是

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

方向由

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$$

决定。显然 a_1, a_2, a_3 各是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x, y, z 軸上的投影的长度，而 α, β, γ 是矢量与 x, y, z 軸所成的角度。称 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦。矢量的三个方向余弦的平方和等于1。

§2. 矢量的加法

二矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 的和定义为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3).$$

显然有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

零矢量定义为

$$\mathbf{0}=(0,0,0).$$

$\boldsymbol{a}$ 的反向矢量定义为

$$-\boldsymbol{a}=(-a_1,-a_2,-a_3).$$

把矢量的起点移到原点，以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形，由原点做出的对角綫就表矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

对任一实数 λ，我們定义

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3).$$

显然有

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\quad \lambda(\mu\boldsymbol{a})=\lambda\mu\boldsymbol{a}.$$

如果有一实数 $\lambda\neq 0$，使

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b},$$

则此二矢量平行，或称为共綫矢量；反之亦眞. 注意，$-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 等长度，但指向相反.

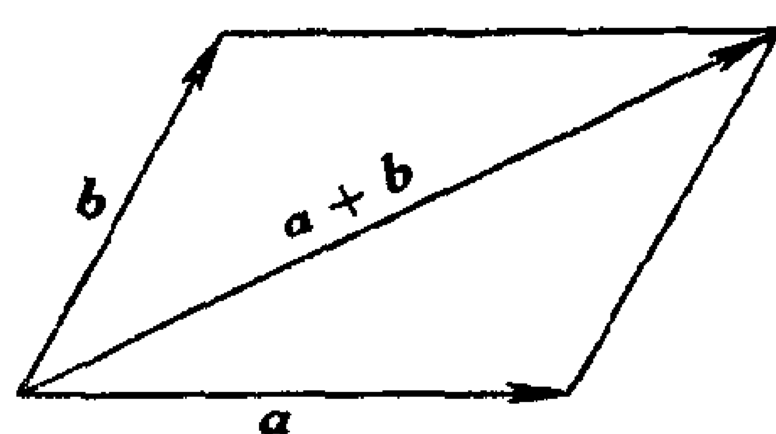


图 18

长度为 1 的矢量称为单位矢量. 对任一矢量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，一定有一个与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位矢量 $\boldsymbol{a}^\circ$，使 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ$.

一般講来，如果有 n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，其和 $\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n$ 可以用以下的方法求出. 把 $\boldsymbol{a}_1$ 的出发点移到原点，再把 $\boldsymbol{a}_2$ 的出发点移到 $\boldsymbol{a}_1$ 的終点，再把 $\boldsymbol{a}_3$ 的出发点移到 $\boldsymbol{a}_2$ 的終点，…，最后把 $\boldsymbol{a}_n$ 的起点移到移定后的 $\boldsymbol{a}_{n-1}$ 的終点. 从原点到 $\boldsymbol{a}_n$ 終点的矢量就是矢量 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. 由此可見，如果一組矢量之和为 $\mathbf{0}$，則上法所得的折綫成一閉合折綫；反之亦眞.

由“两点之間直綫最短”这个概念立即知道

$$|\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|,$$

上式当且仅当各矢量一个接一个地位于同一直綫上且其指向相同时取等号.

§3. 矢量的分解

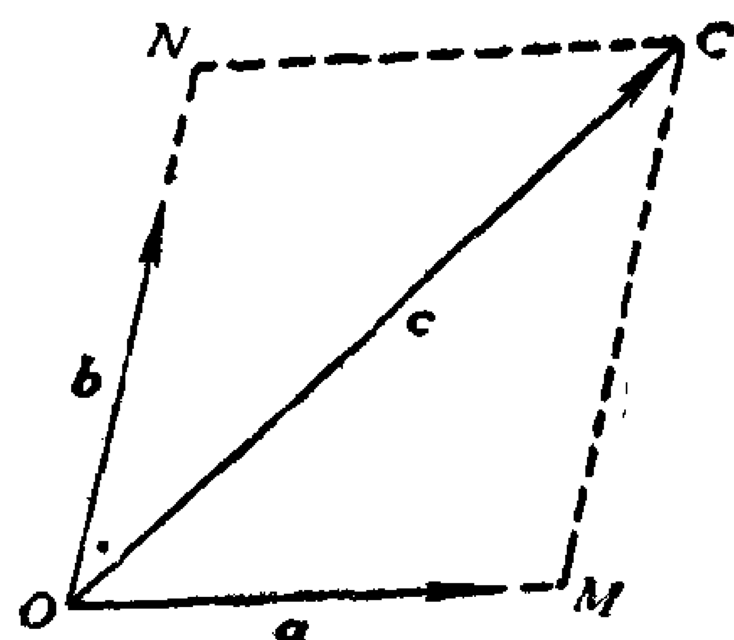


图 19

假定 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是共面矢量. 现在把它們引到公共起点 O，由矢量 $\boldsymbol{c}$ 的終点 C 作两条平行于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的直綫，各交 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 于 M,N，则

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

假定 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 非共面矢量. 命 $\boldsymbol{d}$ 为任一矢量，把它們都移到一公共起点 O. 由矢量 $\boldsymbol{d}$ 的終点 D 作三张平面，分别平行于 $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 平面，$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$ 平面与 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 平面，且交 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 于 L,M,N，則得

$$\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c},$$

这称为矢量 $\boldsymbol{d}$ 对 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的分解. 取

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1),$$

则 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 的分解式显然为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},$$

a_1(及 a_2, a_3)就是矢量在 x(及 y, z)軸上投影的长度.

一般地說,对矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 作矢量

$$\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$$

的分解,就等于解方程組

$$d_i=\lambda a_i+\mu b_i+\nu c_i,\quad i=1,2,3,$$

其中 λ, μ, ν 是待求的数值.

定义. 如果有非 0 的 $\lambda, \mu, \nu, \cdots$ 使

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}+\cdots=\boldsymbol{0},$$

则 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots$ 称为有綫性关系.

定理 1. 若二非 $\boldsymbol{0}$ 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有綫性关系,则两矢共綫;其逆亦眞.

証. 若已知 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}(\lambda\neq 0)$, 则 $\boldsymbol{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}$. 可知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共綫; 反之显然.

定理 2. 若三非 $\boldsymbol{0}$ 矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 有綫性关系,则三矢共面;其逆亦眞.

証. 設 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 并可假定 $\lambda\neq 0$, 则 $\boldsymbol{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}-\frac{\nu}{\lambda}\boldsymbol{c}$,即 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 所成的平面上; 反之,如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面,而其中有二矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 非共綫, 则可以分解为 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$. λ 与 μ 不会同时为 0, 否则与假定矛盾. 如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共綫,即 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,我們显然有关系 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}+0\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

定理 3. 四个(或更多的)矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 必有綫性关系.

証. 如果其中有三个矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共面,则任一矢量 $\boldsymbol{d}$ 都可以分解为 $\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+$ $+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$. 故得定理.

如果三个矢量共面,则有 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 也得定理.

習題. 已知起点相同的三矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 其終点共綫的必要且充分条件是有不全为 0 的三个数 λ, μ, ν, 使 $\lambda+\mu+\nu=0$ 及 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 試問起点相同的四矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, 其終点共面的必要且充分条件为何?

§4. 內积(无向积,数性积)

定义. 二矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的內积定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

有时也用符号 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 代表它. 显然有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2.$$

由余弦定律知道

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

而 θ 是 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 两矢量的夹角. 又由

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

可知

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

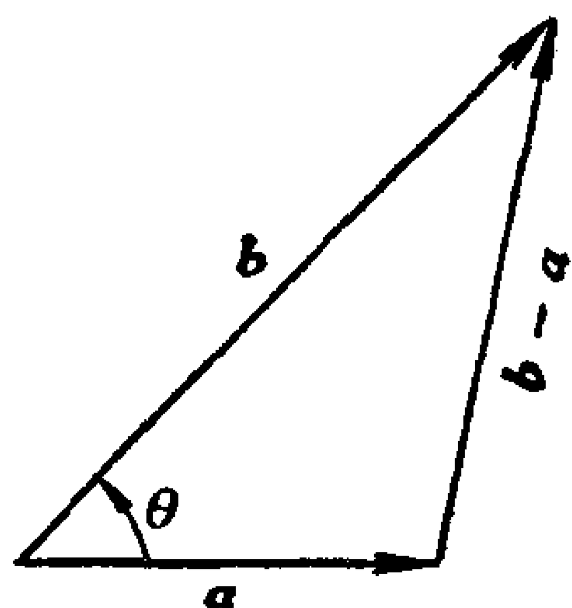


图 20

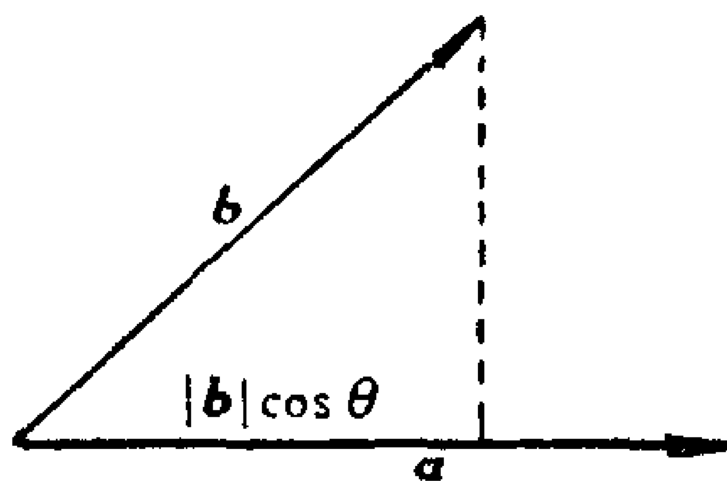


图 21

又把这式看成为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}|\cos\theta),$$

故内积可以看成为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度乘以矢量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的长度. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(或共綫),則 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 就是 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的长度之积.

如果 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 垂直,則 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;且反之亦眞.

如果用无实数部分的四元数表矢量,即

$$\alpha=a_1i+a_2j+a_3k, \quad 及 \quad \beta=b_1i+b_2j+b_3k,$$

則

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}),$$

即内积等于四元数 $-\alpha\beta$ 的实数部分.

習題. 空間一組矢量,两两内积均为 0,問組中最多有几个矢量.

§5. 矢量积(外积)

定义. 二矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的矢量积为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1).$$

显然有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},$$
$$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b});$$

特别有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 也得 $\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$; 反之, 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 則也可以得到 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共綫.

矢量积有以下的几何意义:

1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，卽垂直于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所成的平面.

証. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，而且

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

証. 由

$$\begin{aligned}(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\ = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\end{aligned}$$

得

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta.$$

明所欲証.

3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的指向是：我們如果依 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 站立，則循反时針方向由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 所扫过的角度 $\leqslant\pi$，也就是說，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成一右旋系統.

为了說明这一点，我們取 $\boldsymbol{a}$ 的底綫作为 $\boldsymbol{x}$ 軸，$\boldsymbol{a}$ 的方向是 $\boldsymbol{x}$ 軸的正向. 取 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所在的平面为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 平面. 假定由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的角度是 θ，$|\theta|\leqslant\pi$，如是則

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|(1, 0, 0), \quad \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|(\cos\theta, \sin\theta, 0),$$

因而得

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(0, 0, \sin\theta).$$

这矢量 $\boldsymbol{c}$ 的底綫与 z 軸相同，但是它的方向却視 θ 的正負而定. 如果 $\theta>0$，卽方向由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$，則 $\boldsymbol{c}$ 的指向与 z 軸同；不然方向由 $\boldsymbol{b}$ 至 $\boldsymbol{a}$，而 $\boldsymbol{c}$ 的指向正是与 z 軸的負向同. 这样我們定义带正負号的平行四边形的面积等于 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$.

如果用无实数部分的四元数

$$\alpha = a_1i + a_2j + a_3k, \quad \beta = b_1i + b_2j + b_3k,$$

表示矢量，則

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\alpha\beta - \overline{\alpha\beta});$$

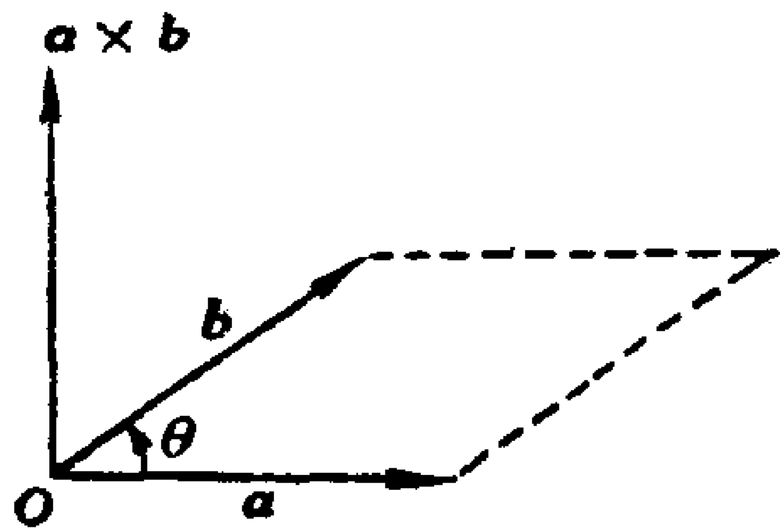


图 22

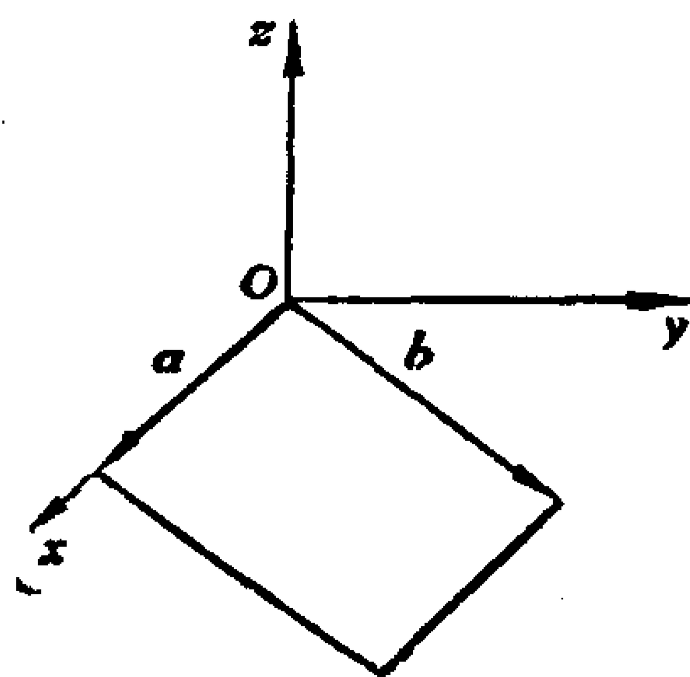


图 23

也就是矢量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 等于四元数 $\alpha\beta$ 的非实数部分.

特別有 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$ 及 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$. 从此可得

$$-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\alpha\beta.$$

这样的关系把空間矢量和四元数密切地联在一起.

習題. 証明

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

§6. 多 重 积

1) 三矢量的混合积. 命 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 表三矢量,則

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+$$

$$+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\quad(\text{用}\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\ \text{表它}).$$

显然可見

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=$$

$$=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}.$$

定理 1. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的絕对值等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为边的平行六面体的体积，其正負号的取法如下：依 $\boldsymbol{c}$ 而立,照反时針方向由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 所扫过的角度小于 π 时得正,不然得負.

証. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积， $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}$ 等于 $\boldsymbol{d}$ 的长度乘以 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{d}$ 上的投影的长度,所以

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$ (以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积) $\times$ ($\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 上的投影)， 这就是平行六面体的体积.

从而三矢共面的条件是

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0.$$

总結得出：

两矢共綫(或平行)的条件是矢量积等于 $\mathbf{0}$, 卽 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

两矢垂直的条件是內积等于 0, 卽 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

三矢共面的条件是 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三矢成右旋系統还是左旋系統,視混合积 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 为正或为負而定.

2) 三矢量的矢量积.

定理 2.

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

証. 此式左边等于

$$(a_1, a_2, a_3)\times(b_2c_3-b_3c_2, b_3c_1-b_1c_3, b_1c_2-b_2c_1)=$$

$$= (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3),\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1),$$
$$a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)) = ((a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3c_3)c_1,$$
$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2,\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 -$$
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

由定理 2 立刻推出

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}.$$

3）四重积.

定理 3. 对任意四矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, 下列恆等式成立:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

証. 由混合积的等式及定理 2 我們有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))\cdot\boldsymbol{a} = ((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{a} =$$
$$= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

定理 4. 对任意四矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$,下列恆等式成立:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{d} =$$
$$= (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.$$

証. 将 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 四矢量的矢量积看作三矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的矢量积，并利用定理 2 得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = ((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - ((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} =$$
$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{d}.$$

另一式可用同法証之.

如 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0$, 则得 $\boldsymbol{d}$ 对 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三矢量的分解式

$$\boldsymbol{d} = \frac{(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\boldsymbol{a} + \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\boldsymbol{b} + \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\boldsymbol{c}.$$

这个分解式相当于解三元一次方程組的 Crammer 法则.

習題 1. 証明

$$\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\} = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}),$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2,$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{p}) +$$
$$+ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{p}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{q}) = 0.$$

2. 解释下列等式的几何意义:

$$(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$
$$(\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

§7. 坐标的变换

现在所討論的都是直角坐标系,旧坐标系$\{O; X, Y, Z\}$与新坐标系$\{O'; X', Y', Z'\}$. 两坐标的单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$. 新坐标对旧坐标的位置,决定于以下两个因素:

1° 新原点的旧坐标 (x_0, y_0, z_0);

2° 新坐标軸与旧坐标軸組成九个角度的方向余弦: (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$.

新 \ 旧	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α	β	γ
$\boldsymbol{j}'$	α'	β'	γ'
$\boldsymbol{k}'$	α''	β''	γ''

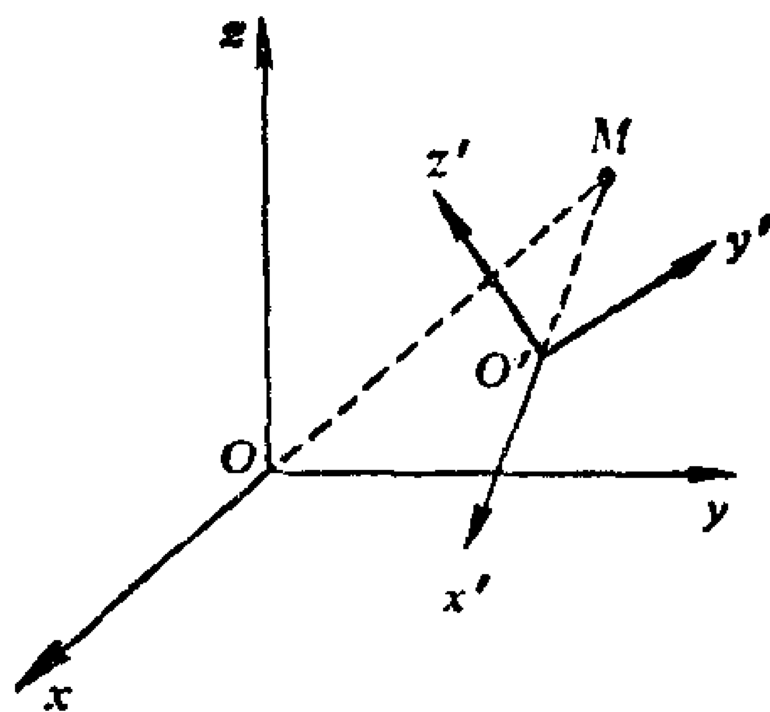


图 24

內积表示法如下:

$$\alpha = \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{i}, \quad \beta = \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{j}, \quad \gamma = \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{k};$$
$$\alpha' = \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{i}, \quad \beta' = \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{j}, \quad \gamma' = \boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{k};$$
$$\alpha'' = \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{i}, \quad \beta'' = \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{j}, \quad \gamma'' = \boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k}.$$

任一点M的旧矢量表示 $\boldsymbol{r}$ 与新矢量表示 $\boldsymbol{r}'$ 之間有关系

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}',$$

此处 $\boldsymbol{r}_0$ 是 $\overrightarrow{OO'}$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ 及 $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ (对新坐标). 又已知

$$\boldsymbol{i}' = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{j}' = \alpha'\boldsymbol{i} + \beta'\boldsymbol{j} + \gamma'\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{k}' = \alpha''\boldsymbol{i} + \beta''\boldsymbol{j} + \gamma''\boldsymbol{k},$$

所以

$$x = x_0 + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$y = y_0 + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$z = z_0 + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'.$$

因此通过新坐标 x', y', z' 及方向余弦 $\alpha, \beta, \gamma \cdots\cdots$ 等可以表出旧坐标x, y, z来. 当 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$, $z_0 = 0$ 时,即得平面的坐标变换公式.

由于 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 是单位矢量且互相垂直,可知

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$
$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \qquad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$
$$\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \qquad \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0.$$

又由 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是单位矢量且互相垂直，得

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \quad \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0,$$
$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0,$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \quad \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0.$$

虽然有九个方向余弦，但是其間有六个关系式. 我們可以用三个独立参变数来确定这些方向余弦，这参数的取法在不同的場合中可能各异. 在天文学及力学中最常用的是 Euler 角.

$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ 与 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 为两組原点公共的正向三直交单位矢量，现在用三个角 θ, φ, ψ 来确定 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 对 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ 的位置.

1) θ 角. 名为傾角，即 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 間的夹角，亦即

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{c} = \cos\theta.$$

2) φ 角. 名为节綫角，平面 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 与 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 的交綫单位矢量命之为 $\boldsymbol{u}$，则 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的交角就是 φ. 如果确定 $\boldsymbol{u}$ 的指向是 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{c})$ 成右旋系統，则

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{c}}{\sin\theta} = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi.$$

3) ψ 角. 即 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 两矢量的夹角.

引进以下的輔助矢量：

单位矢量 $\boldsymbol{v}$ 在 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 平面內，而且与 $\boldsymbol{u}$ 垂直并使$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{k})$成右旋系統三矢量，则由于 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\varphi$，所以

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\sin\varphi - \boldsymbol{j}\cos\varphi.$$

单位矢量 $\boldsymbol{q}$ 在 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 平面內，而且与 $\boldsymbol{u}$ 垂直并使$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{u})$是右旋系統三矢量，则

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u}.$$

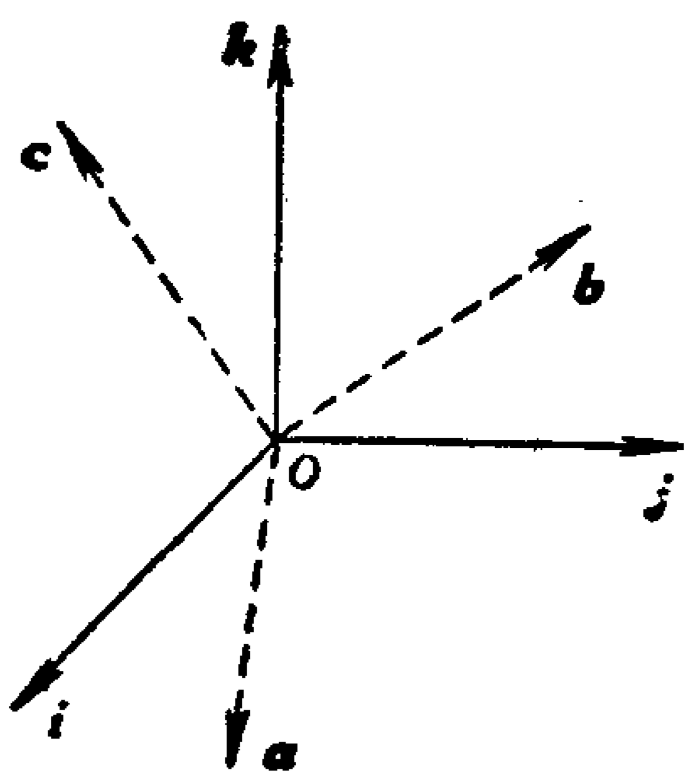


图 25

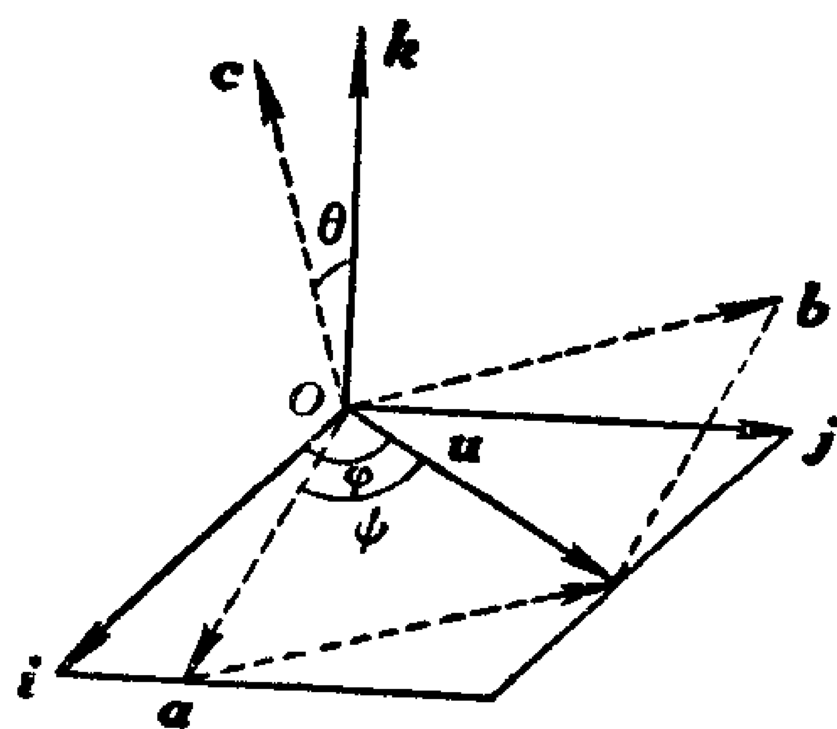


图 26

先証 $\boldsymbol{c}$ 在 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$平面上. 这可由 $\boldsymbol{u}$ 垂直于$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$，$\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{u}$ 得之；由此

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}\sin\theta + \boldsymbol{k}\cos\theta = (\boldsymbol{i}\sin\varphi - \boldsymbol{j}\cos\varphi)\sin\theta + \boldsymbol{k}\cos\theta$$

或

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}\sin\varphi\sin\theta - \boldsymbol{j}\cos\varphi\sin\theta + \boldsymbol{k}\cos\theta.$$

再証 $\boldsymbol{a}$ 在 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})$ 平面上．这可由 $\boldsymbol{c}$ 垂直于 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})$ 而 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{c}$ 得之；由此

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}\cos\psi-\boldsymbol{q}\sin\psi=\boldsymbol{u}\cos\psi-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{u})\sin\psi,$$

即得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\cos\theta)+\boldsymbol{j}(\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\cos\theta\sin\psi)-$$
$$-\boldsymbol{k}\sin\psi\sin\theta.$$

再由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 可知

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}(\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\theta)+\boldsymbol{j}(\cos\theta\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)+$$
$$+\boldsymbol{k}\cos\psi\sin\theta.$$

这样得出了从坐标系 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 变为坐标系 $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ 的变换公式.

实質上,这些公式可以由如下运动来說明它們．将右旋系統三矢 $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$

1）繞 $\boldsymbol{k}$ 軸轉动角度 φ，把 $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ 变为 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{k})$；

2）繞 $\boldsymbol{u}$ 軸轉动角度 θ，把 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{k})$ 变为 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})$；

3）繞 $\boldsymbol{c}$ 軸轉动角度 ψ，把 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{c},\boldsymbol{u})$ 变为 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，

则得右旋系統三矢 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$（有时 φ 称为进动角，θ 称为章动角）.

§8. 平　　面

我們現在用矢量符号来复习一下直綫、平面的性質：

在空間取一点 O 作为原点或起点．空間的任意点 M 可以用一个位置矢量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 来表它．我們求平面方程,使其經过点 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$,并且垂直于矢量 $\boldsymbol{n}$．命 $M(\boldsymbol{r})$ 为平面上的一变点,则 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 就垂直于 $\boldsymbol{n}$,也就是

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

这就是用矢量写出的平面方程,也可以写成为

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=D.$$

命 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,则平面方程为

$$Ax+By+Cz=D.$$

現在将几种条件下平面方程的表达形式列于后：

1）已知平面过三点 $M_i(\boldsymbol{r}_i)$ $(i=1,2,3)$,命 $M(\boldsymbol{r})$ 为平面上任意一点,则

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot[(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)]=0$$

或

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

此处 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$.

2）已知平面过二点 $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ 与 $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ 且平行方向矢量 $\boldsymbol{n}$,则平面方程为

$$\boldsymbol{n}\cdot[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]=0$$

或

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

3) 已知平面过点 $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ 且平行于二方向矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{n}_1$,则平面方程为

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1)=0$$

或

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}=0.$$

4) 已知平面与原点的距离为 p 且垂直于单位方向矢量 $\boldsymbol{p}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,则平面方程为

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}^0=p$$

或

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p.$$

我們已知两平面的交角就是从交綫上一点到两平面內各作一垂綫所成的角（或等于它的补角),所以

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=D,\quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1=D_1,$$

二平面的夹角的余弦也就是

$$\cos\theta=\pm\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1)=\pm\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_1|}.$$

如果命 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$, $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, 可知

$$\cos\theta=\pm\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}}.$$

若 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{0}$,也就是 $\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$,则二平面平行;其逆亦真.

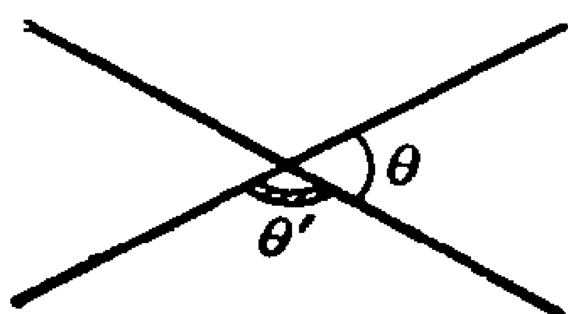


图 27

若 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1=0$,则二平面互相垂直,此时 $AA_1+BB_1+CC_1=0$;其逆亦眞.

求一点 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ 到平面 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=D$ 的距离 d,这距离也就是 M_0 到平面上一点 $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ 的距离,而且矢量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 的方向就是 $\boldsymbol{n}$ 的方向,所以

$$\overrightarrow{M_1M_0}=\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1=\pm d\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}.$$

乘以 $\boldsymbol{n}$ (內积)可得

$$\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}=\pm d|\boldsymbol{n}|.$$

因 $\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{n}=D$, 所以

$$d=\pm\frac{\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{n}-D}{|\boldsymbol{n}|}.$$

三张平面 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=D$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1=D_1$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_2=D_2$ $(\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2))$ 的交点

(x_0, y_0, z_0) 为

$$x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y_0=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad z_0=\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

此处

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} D & B & C \\ D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} A & D & C \\ A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix} A & B & D \\ A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{vmatrix}.$$

若 $\Delta \neq 0$,则三张平面相交于一点. 若 $\Delta=0$,但 Δ 至少有一个二阶子行列式不等于 0,例如 $\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$, 则 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_2=D_2$ 平行于 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=D$ 与 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1=D_1$ 的交綫. 若 Δ 的二阶子行列式都等于零,则三张平面平行.

§9. 空間直綫方程

求通过 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ 并平行于一个方向矢量 $\boldsymbol{p}=(\lambda, \mu, \nu)$ 的直綫方程. 命 $M(\boldsymbol{r})$ 是直綫上的任一点, $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{p}$ 平行,所以

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0},$$

也就是

$$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu}.$$

命此式等于 t, 则得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{p}t.$$

这是直綫方程的参数表达式.

直綫也可以看为两个平面

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_1&=D_1,\\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_2&=D_2,\end{aligned}\quad (\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2\neq\boldsymbol{0})$$

的交綫,交綫的方向 $\boldsymbol{p}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$,所以

$$\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2.$$

直綫方程是

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)=\boldsymbol{0}.$$

两直綫

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{0},\quad (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}$$

的夹角 φ 也就是方向矢量 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ 的夹角,所以

$$\cos\varphi=\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2/|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_2|.$$

命一直綫

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$$

与一平面

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=D$$

的夹角为 θ,则 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的夹角等于 $90°\pm\theta$,所以

$$\sin\theta = \pm\cos(90°\pm\theta) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|.$$

一点 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ 到直綫 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ 的距离等于

$$d = M_1M_0\sin\varphi = M_1M_0\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{p}|}{M_1M_0\cdot|\boldsymbol{p}|} = \frac{|(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{p}|}.$$

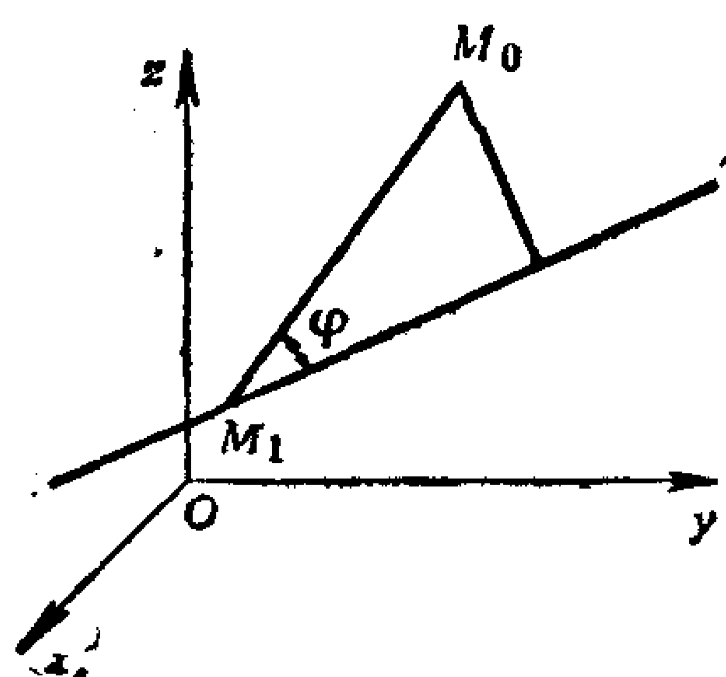


图 28

求二非平行的直綫

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{0},$$
$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0}$$

之間的最短距离，公垂线 s 的方向与 $\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2$ 相同，公垂线的长度 d 等于 $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ 的联綫在 s 上的射影,所以

$$d = (\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\cdot\frac{\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2}{|\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2|}.$$

补　　充

§10. 球面三角的主要公式

作为矢量分析的应用,我們現在証明球面三角学里的主要公式. 先固定一个球,我們不妨假定它就是单位球. 球面三角学就是研究球面上以大圓的弧为边的三角形的学問. 所謂大圓乃指过球中心的平面与球面所交的圓. 我們用 A, B, C 表三頂点，α, β, γ 表三頂点的对边，我們用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表通过球中心到頂点 A, B, C 的矢量,他們都是单位矢量. 我們也用 α 代表 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 二矢量所成角的弧度或角度（β, γ 也代表相应的弧度或角度）. 我們也用 A 代表矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 所定义的平面与矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ 所定义的平面的夹角的弧度或角度,即矢量 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 的夹角的弧度或角度(B, C 也代表相应的弧度或角度). A, B, C, α, β, γ 間的关系就是球面三角学中的研究問題. 我們現在假定 A, B, C, α, β, γ 都小于 180°.

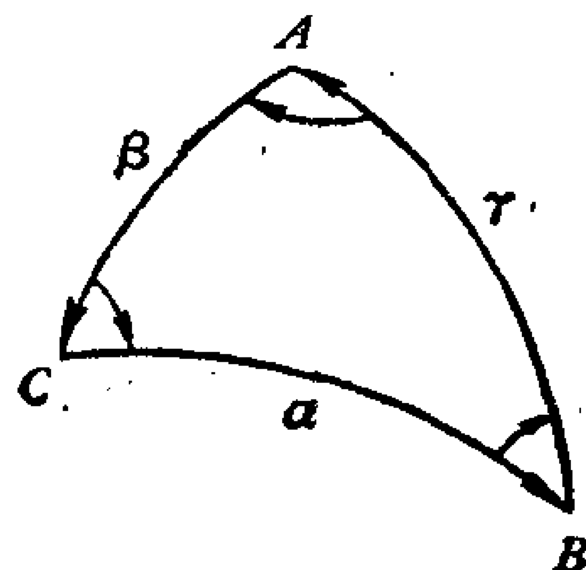


图 29_1

定理 1 (余弦定律).

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$
$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos B,$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

証. 在矢量恆等式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 中取 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}$ 为本节开始所定义的单位矢量,由于

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = \cos\beta,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \cos\gamma,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \cos\alpha.$$

以及 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$,又矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$ 的长度各为 $\sin\gamma$, $\sin\alpha$,其夹角就是 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 所

定义的平面与 $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}$ 所定义的平面的夹角,也就是角 B,所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=\sin\alpha\sin\gamma\cos B.$$

于是得到

$$\sin\alpha\sin\gamma\cos B=\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma.$$

这就是定理 1 中的第二式. 同法証明其他諸式.

定理 2 (正弦定律).

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

証. 余弦公式第一、二式将右边第一項移往左边,然后求平方差得

$$(1-\cos^2\gamma)(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)=\sin^2\gamma(\sin^2\beta\cos^2 A-\sin^2\alpha\cos^2 B).$$

以正弦代余弦并簡化之得

$$\sin^2\alpha\sin^2 B=\sin^2\beta\sin^2 A.$$

开方,并取正号(各角都小于 180°)得

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}.$$

定理 3 (五元素公式).

$$\sin\alpha\cos B=\cos\beta\sin\gamma-\sin\beta\cos\gamma\cos A,$$
$$\sin\alpha\cos C=\cos\gamma\sin\beta-\sin\gamma\cos\beta\cos A,$$
$$\sin\beta\cos C=\cos\gamma\sin\alpha-\sin\gamma\cos\alpha\cos B,$$
$$\sin\beta\cos A=\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma\cos B,$$
$$\sin\gamma\cos A=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\cos C,$$
$$\sin\gamma\cos B=\cos\beta\sin\alpha-\sin\beta\cos\alpha\cos C.$$

証. 余弦定律第一式中的 $\cos\beta$ 以第二式的表达式代入,卽得

$$\cos\alpha=(\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos B)\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

卽

$$\sin^2\gamma\cos\alpha=\sin\gamma\cos\gamma\sin\alpha\cos B+\sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

除去 $\sin\gamma(\neq 0)$ 卽得定理中的第四式(当 $\sin\gamma=0$ 时, $C=0$, $\alpha=\beta$. 定理显然正确). 同法可証其他五式.

定理 4 (余切公式).

$$\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta=\cos\beta\cos C+\sin C\operatorname{ctg}A,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma=\cos\gamma\cos B+\sin B\operatorname{ctg}A,$$
$$\operatorname{ctg}\beta\sin\gamma=\cos\gamma\cos A+\sin A\operatorname{ctg}B,$$
$$\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha=\cos\alpha\cos C+\sin C\operatorname{ctg}B,$$
$$\operatorname{ctg}\gamma\sin\alpha=\cos\alpha\cos B+\sin B\operatorname{ctg}C,$$
$$\operatorname{ctg}\gamma\sin\beta=\cos\beta\cos A+\sin A\operatorname{ctg}C.$$

証. 在五元素公式

$$\sin\alpha\cos B+\sin\beta\cos\gamma\cos A=\cos\beta\sin\gamma$$

中用正弦定律 $\sin\alpha = \sin A\sin\beta/\sin B$ 代入并除去 $\sin\beta$，即得

$$\sin A\operatorname{ctg} B + \cos\gamma\cos A = \sin\gamma\operatorname{ctg}\beta,$$

即定理中的第三式. 同法可証其他各式.

定理 5（半角公式）.

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta)}{\sin p\sin(p-\alpha)}},$$

其中 $p = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$.

証. 在余弦定律第一式中用 $1-2\sin^2\frac{A}{2}$ 代 $\cos A$ 得

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right),$$

即

$$2\sin\beta\sin\gamma\sin^2\frac{A}{2} = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha = \cos(\beta-\gamma) - \cos\alpha =$$

$$= -2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma-\alpha) = 2\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta).$$

再以 $2\cos^2\frac{A}{2}-1$ 代 $\cos A$，可以得出

$$2\sin\beta\sin\gamma\cos^2\frac{A}{2} = \cos\alpha - \cos(\beta+\gamma) = 2\sin p\sin(p-\alpha).$$

由此可得

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

及

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-\gamma)\sin(p-\beta)}{\sin p\sin(p-\alpha)}}.$$

由于 A 不大于 180°，所以仅取正号.

系. $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{\sin p\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}}{\sin^2 p}.$$

§11. 对 偶 原 則

从三个单位矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 做出以下的三个单位矢量 $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$，它們是与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,

$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同向的单位矢量. 显然 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 也是与 $\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{c}'\times\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}'$ 同向的单位矢量.

从 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ 也得到一个球面三角形,称为原三角形的对偶三角形. 顶点角是 A', B', C',对边是 α', β', γ'. 由于 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'$ 各垂直于平面 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}$, 所以 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'$ 的夹角与二平面 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}$ 的夹角互补,即 $\gamma' + C = 180^\circ$. 同法可知

$$\alpha' + A = 180^\circ,\quad \beta' + B = 180^\circ,\quad \gamma' + C = 180^\circ;$$
$$\alpha + A' = 180^\circ,\quad \beta + B' = 180^\circ,\quad \gamma + C' = 180^\circ.$$

将上节的几个基本公式应用于对偶三角形,可得出与之对应的对偶公式. 例如,由上面的定理 1 可知

$$\cos\alpha' = \cos\beta'\cos\gamma' + \sin\beta'\sin\gamma'\cos A',$$

因而得出

定理 1(余弦定律).

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha,$$
$$\cos B = -\cos C\cos A + \sin C\sin A\cos\beta,$$
$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos\gamma.$$

上节定理 2 所表示的正弦定律的对偶公式也就是原来的公式,即自我对偶.

定理 2(五元素公式).

$$\sin A\cos\beta = \cos B\sin C + \sin B\cos C\cos\alpha,$$
$$\sin A\cos\gamma = \cos C\sin B + \sin C\cos B\cos\alpha,$$
$$\sin B\cos\gamma = \cos C\sin A + \sin C\cos A\cos\beta,$$
$$\sin B\cos\alpha = \cos A\sin C + \sin A\cos C\cos\beta,$$
$$\sin C\cos\alpha = \cos A\sin B + \sin A\cos B\cos\gamma,$$
$$\sin C\cos\beta = \cos B\sin A + \sin B\cos A\cos\gamma.$$

上节定理 4 所表示的余切公式的对偶公式也是自我对偶的.

定理 3(半角公式).

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-\cos p\cos(p-A)}{\sin B\sin C}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos(p-B)\cos(p-C)}{\sin B\sin C}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-\cos p\cos(p-A)}{\cos(p-B)\cos(p-C)}},$$

此处 $p = \frac{1}{2}(A+B+C)$.

§ 12. 直角三角形与直边三角形的計算規則

1) 有一个角为 90° 的球面三角形 ABC,被称为球面直角三角形. 取 $A = 90^\circ$,由

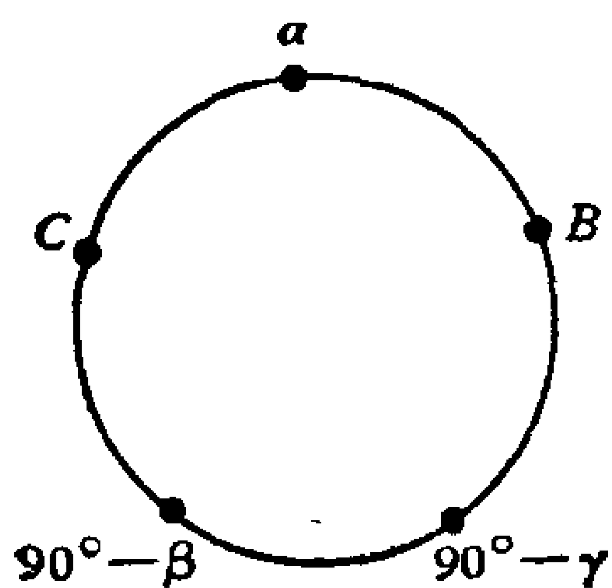
余弦、正弦定律可以得出

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma, \quad \sin\beta = \sin\alpha\sin B, \quad \sin\gamma = \sin\alpha\sin C.$$

再由五元素公式第一式可知

$$\sin\alpha\cos B = \cos\beta\sin\gamma = \cos\beta\sin\alpha\sin C,$$

因而得出 $\cos B = \cos\beta\sin C$. 同法得 $\cos C = \cos\gamma\sin B$. 这些式子可以写成統一的形式:



$$\cos\alpha = \sin(90^\circ-\beta)\sin(90^\circ-\gamma),$$
$$\cos(90^\circ-\beta) = \sin\alpha\sin B,$$
$$\cos(90^\circ-\gamma) = \sin\alpha\sin C,$$
$$\cos B = \sin(90^\circ-\beta)\sin C,$$
$$\cos C = \sin(90^\circ-\gamma)\sin B.$$

图 29_2

这五个式子可以概括成为下面的几句話:直角被采用,直角的邻边用余边代替,可把直角三角形中除已知角 A 以外的五个未知量排列成为一圈如图. 以上五个公式可以用一句話表达:其中之一的余弦等于不相邻于它的二量的正弦之积.

在余切公式中取 $A=90^\circ$,則

$$\cos C = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(90^\circ-\beta),$$
$$\cos B = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(90^\circ-\gamma),$$
$$\operatorname{ctg}\beta\sin\gamma = \operatorname{ctg}B, \quad \text{即} \quad \cos(90^\circ-\gamma) = \operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}(90^\circ-\beta),$$
$$\cos(90^\circ-\beta) = \operatorname{ctg}C\operatorname{ctg}(90^\circ-\gamma).$$

后二式相乘得

$$\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C = \operatorname{ctg}\beta\sin\gamma\operatorname{ctg}\gamma\sin\beta = \cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha\ (\text{余弦定律}).$$

这五个式子也可以概括成为一句話:五量中任一个的余弦等于其相邻二量的余切之积.

例 1. 已知直角边 $\beta=48^\circ27'21''$, $\gamma=33^\circ07'37''$,求斜边 α 及角 B, C.

由公式

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma, \quad \operatorname{tg}B = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\gamma}, \quad \operatorname{tg}C = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sin\beta}$$

得

$$\alpha = 56^\circ15'42'', \quad B = 64^\circ09'42'', \quad C = 41^\circ05'05''.$$

例 2. 已知直角边 $\gamma=37^\circ54'06''$ 及角 $B=58^\circ40'13''$, 求斜边 α, 直角边 β 及角 C.

由公式

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}B\sin\gamma, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos B}, \quad \cos C = \sin B\cos\gamma,$$

得

$$\alpha = 56^\circ15'42'', \quad \beta = 45^\circ15'42'', \quad C = 47^\circ37'21''.$$

2) 有一边等于 90° 的球面三角形被称为直边三角形. 取 $\alpha=90^\circ$, 則由定理 10.1, 定理 10.2 及定理 11.1 得

$$\cos(180^\circ - A) = \sin(B - 90^\circ)\sin(C - 90^\circ),$$
$$\cos(180^\circ - \beta) = \sin(180^\circ - \gamma)\sin(B - 90^\circ),$$
$$\cos(180^\circ - \gamma) = \sin(180^\circ - \beta)\sin(C - 90^\circ),$$
$$\cos(B - 90^\circ) = \sin(180^\circ - \beta)\sin(180^\circ - A),$$
$$\cos(C - 90^\circ) = \sin(180^\circ - \gamma)\sin(180^\circ - A),$$
$$\cos(180^\circ - A) = \operatorname{ctg}(180^\circ - \beta)\operatorname{ctg}(180^\circ - \gamma),$$
$$\cos(180^\circ - \beta) = \operatorname{ctg}(180^\circ - A)\operatorname{ctg}(C - 90^\circ),$$
$$\cos(180^\circ - \gamma) = \operatorname{ctg}(180^\circ - A)\operatorname{ctg}(B - 90^\circ),$$
$$\cos(B - 90^\circ) = \operatorname{ctg}(180^\circ - \gamma)\operatorname{ctg}(C - 90^\circ),$$
$$\cos(C - 90^\circ) = \operatorname{ctg}(180^\circ - \beta)\operatorname{ctg}(B - 90^\circ).$$

因此把五个排成一圈如图，則上面的十个公式也可以概括为：任一量的余弦等于相邻于它的二量的余切之积，亦等于不相邻于它的二量的正弦之积。

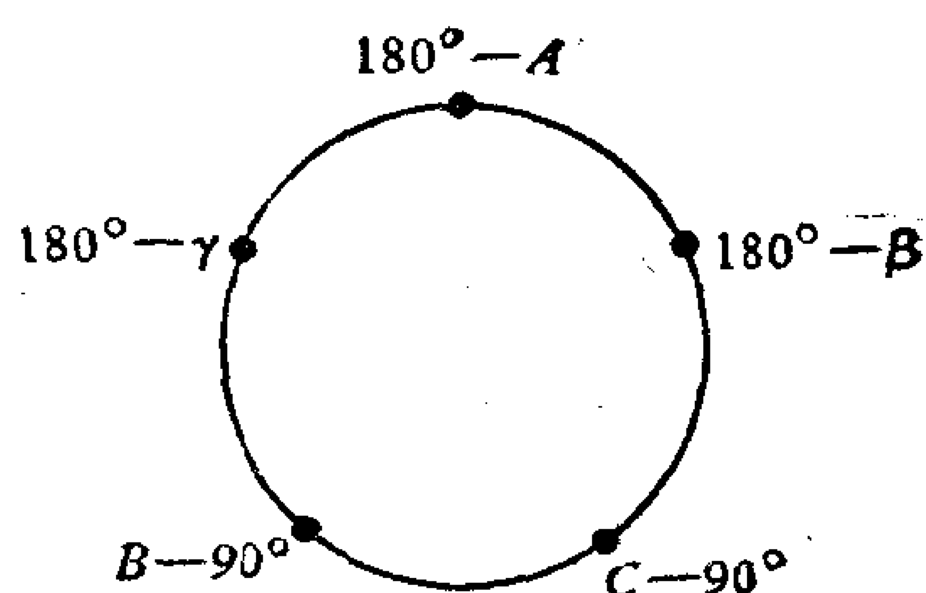


图 30

例 3．在直边三角形中已知

$$\beta = 115^\circ 50' 19'', \quad \gamma = 138^\circ 54' 54'',$$

求角 A, B 及 C.

由公式

$$\cos(180^\circ - A) = \operatorname{ctg}(180^\circ - \beta)\operatorname{ctg}(180^\circ - \gamma)$$

得

$$A = 123^\circ 44' 16''.$$

又由公式

$$\cos(B - 90^\circ) = \sin(180^\circ - \beta)\sin(180^\circ - A),$$
$$\cos(C - 90^\circ) = \sin(180^\circ - \gamma)\sin(180^\circ - A)$$

得

$$B = 131^\circ 32' 39'', \quad C = 146^\circ 52' 27''.$$

習題．有一枚多级宇宙火箭，发射前预测火箭的最后一级将落在下列地理坐标范围以内的地区：

北緯:	10°20′;	11°30′;	9°,10′;	8°5′
西經	170°30′;	167°55′;	166°45′;	169°20′
	(P_1)	(P_3)	(P_4)	(P_2)

发射结果，其射程达12,000 公里。

将上述四点描在地球仪上，可发現这四个点乃是太平洋中部赤道偏北一个小四边形的四頂点。

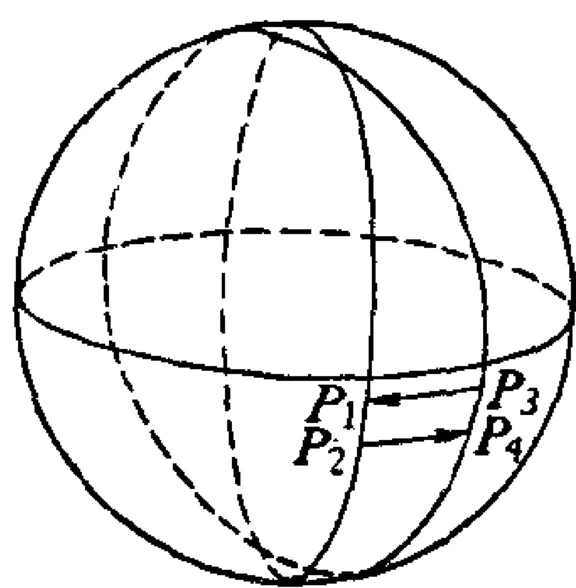


图 31

显然，上面所指的宇宙火箭降落地区，是根据火箭发射时瞄准的精确程度来确定的．瞄准方向在发射点与 P_1, P_2 及 P_3, P_4 两平面所成的二面角之內．

(1) 从这个假定出发，我們可反过去推算可能的发射点及瞄准方向所容許的最大偏差．这一計算虽然比較花时間，但不失为一个很好的习題，并且所要用到的工具全在本章之內，讀者不妨一

为之.

(2) 算出可能的发射点之后,計算該点到落弹地区的距离?以与火箭的实际射程相印証(地球半径=6300公里).

§13. 力,力系,等效力系

作为矢量的背景資料,这儿我們附带地講些靜力学的知識. 讀者如果要系統了解,还是閱讀力学教材为妥.

定义. 作用于刚体的力就是一个滑动矢量. 所謂刚体就是指受力的作用而不变形的物体,或是內部各点的相对位置不会改变的物体. 絕对刚体是不存在的,我們用完全刚体来代替实物是在形变微不足道的假定下进行的.

矢量的方向表示加力的方向,矢量的长度表示力的強弱,也称为力的模度. 最具体的例子是在弹簧秤下扣一根綫,綫上挂一物体,綫上任一点的原位和挂上物体之后的位置所得的綫段就代表这一"力",它是滑动矢量.

在同一刚体上加上各种不同的力称为力系. 这些力各以 $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 表示.

若有两个力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 作用綫相交,则可以把表它們的矢量順作用綫移到交点,用平行四边形法则求出矢量和. 这矢量和就代表这二力的合力. 两个作用綫相同、长度相等、方向相反的二矢量所合并得出的合力等于 $\mathbf{0}$,用在同一刚体上,并不产生作用.

由此立刻可以推出:相交于一点的三个力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$,把表它們的矢量順作用綫移到交点,则以 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$ 为边所做的平行六面体的对角綫就是这三力合并而得出的合力(見图 32).

又如果給定空間一力 $\boldsymbol{F}$,在其作用点(起点)取三个不共面的方向,我們做一平行六面体,以 $\boldsymbol{F}$ 为对角綫,以这三个方向为边,则在各边上都得一力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$. 这三力称为 $\boldsymbol{F}$ 对这三个方向的分解.

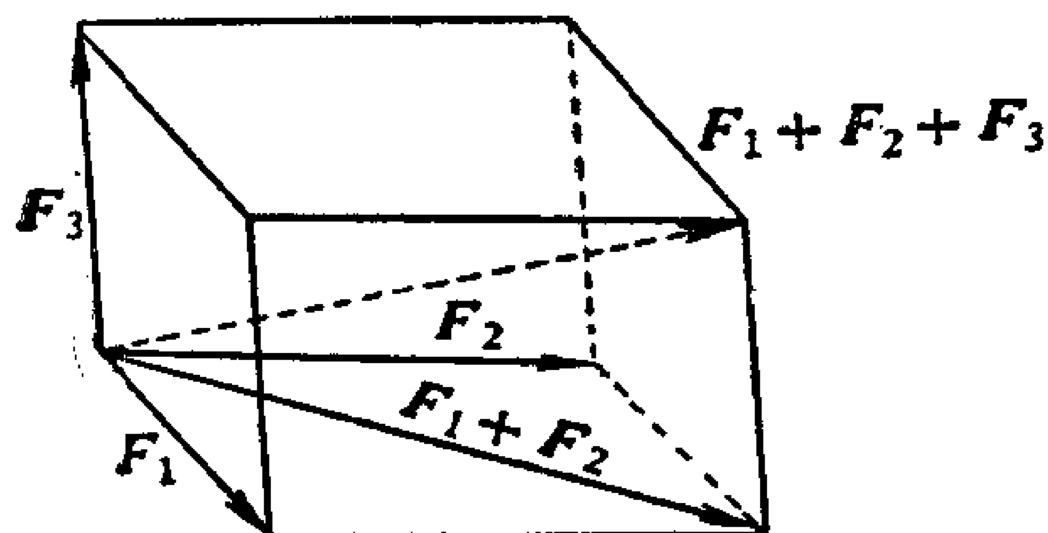


图 32

对一刚体来說,将作用在它上面的力合并或分解,新力系所起的作用与原来这些力所起的作用是一样的.

定义. 两个力系 Σ_1, Σ 如果可以用合并和分解的办法把其一变为它一,则这二力系称为等效. 等效于 $\mathbf{0}$ 的力系,称为平衡力系.

把一力系中代表諸力的矢量作为自由矢量求和,得一矢量 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}$ 称为这系的合矢. 显然,等效的力系有相同的合矢. 一个共点力系一定和一个力等效,这个等效的力就是 $\boldsymbol{F}$ 所代表的力.

定理. 任一力系一定等效于过三个任意点的三矢量所成的力系(这三点不在同一直綫上).

証. 在空間任取不在一直綫上的三点 O_1, O_2, O_3. 由于 $\boldsymbol{F}_1$ 的作用点可以沿它的作

用綫任意选取，所以，$\boldsymbol{F}_1$ 的作用点 A 与 O_1, O_2, O_3 可以不在同一平面上。作这三点与 A 的联綫，得 O_1A, O_2A, O_3A。把 $\boldsymbol{F}_1$ 分解在这三个方向上，再把 O_iA 上的矢量移到 O_i 点 $(i=1,2,3)$，則任一力 $\boldsymbol{F}_1$ 可以表为过 O_1, O_2, O_3 三点的三个力的和。对于力系中的其他的力，也依上述方法分解，使其化为过 O_1, O_2, O_3 三点的三个力的和(图 33)。

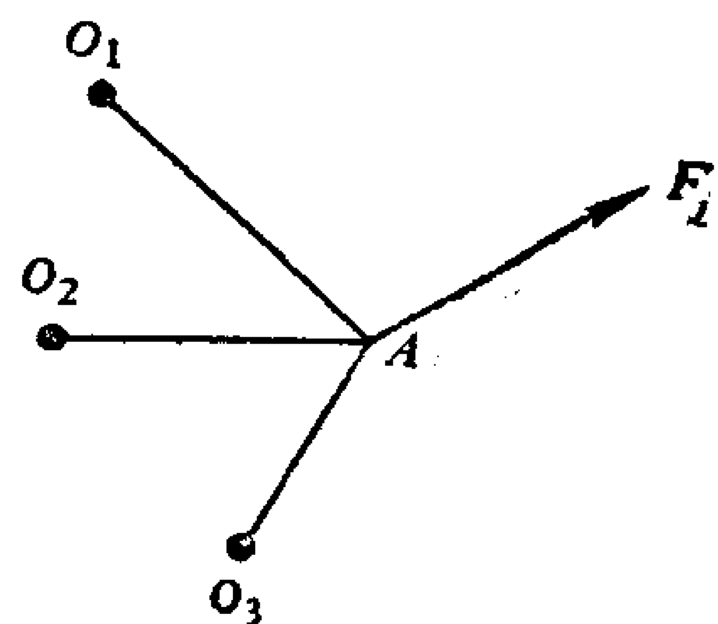


图 33

于是任一力系一定等效于三个共点力系的总力系，而每一个共点力系又可以合併成为一个力。故得定理。

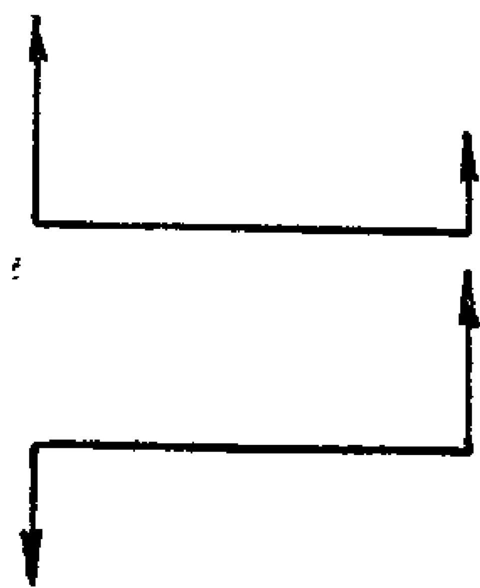
§ 14. 平行力的合并

任意一对作用綫平行的力一定是共平面的。做一条公垂綫，并移动其作用点，則視此二力为同向平行或反向平行一定可以把它們表成为如 34 图的两种形式之一，就是两个作用点在公垂綫上。此时两作用綫間的距离称为**力臂**。

定理 1. 命二同向平行力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 的作用点为 A_1, A_2。在 A_1, A_2 联綫上取一点 C，使

$$A_1C|\boldsymbol{F}_1| = CA_2|\boldsymbol{F}_2|,$$

則以 C 为作用点、$|\boldsymbol{F}_1|+|\boldsymbol{F}_2|$ 为长度的矢量所代表的力与 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 二力等效。


图 34

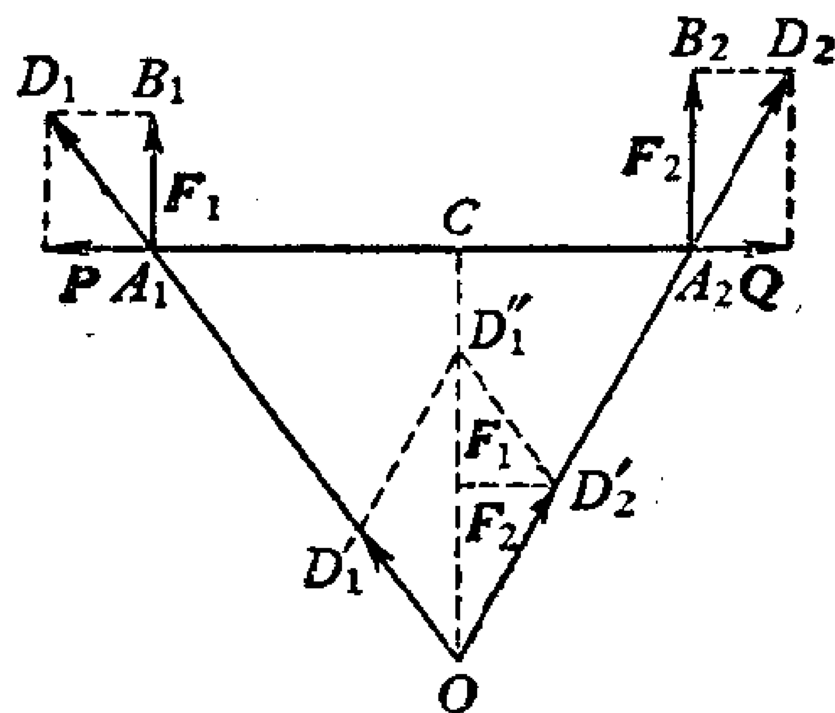


图 35

証. 在 A_1, A_2 各加一力 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$，它們的长度相等，方向相反，都在 A_1A_2 的延綫上。作 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{P}$ 的合力 $\overrightarrow{A_1D_1}$，作 $\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{Q}$ 的合力 $\overrightarrow{A_2D_2}$，把这二力都移到交点 O，因为 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 相消，故在 O 点合成一力，其长是 $|\boldsymbol{F}_1|+|\boldsymbol{F}_2|$，其向是垂直于 A_1A_2。由三角形的相似性可知

$$\frac{CA_1}{OC}=\frac{|\boldsymbol{P}|}{|\boldsymbol{F}_1|}, \quad \frac{CA_2}{OC}=\frac{|\boldsymbol{Q}|}{|\boldsymbol{F}_2|}.$$

則 $A_1C|\boldsymbol{F}_1| = CA_2|\boldsymbol{F}_2|$。故得定理。

同样的，用外分法可以处理反平行力，卽得

定理 2. 不相等的两个反平行力必有一合力，平行于原力且与較大的力同方向，其长度是二力长度之差，其作用点在二分力作用点的延綫上，且对这两点的距离与二分力的大小成反比例。

当二反平行力的长度一样时，这样的力系称为**力偶**。用 $(\boldsymbol{F}, -\boldsymbol{F})$ 表之。力偶无法

把它們合成为一个力，因为一个力表示推进，而一对力偶却产生旋轉作用。

§15. 力　　矩

我們現在引进力矩的概念.

設 $\boldsymbol{F}$ 是一力. 在空間取一点 O，以 d 表自 O 到 $\boldsymbol{F}$ 所作的垂綫的长度. $\boldsymbol{F}$ 对 O 的力矩是一自由矢量 $\boldsymbol{M}$，其长度等于 $d|\boldsymbol{F}|$，方向是垂直于 O 及 $\boldsymbol{F}$ 所成的平面，并且依力矩的正向而立，力之所向与时針的轉动方向相反. 換言之，命 $\boldsymbol{r}$ 表由 O 到 A 的矢量，則力矩就是

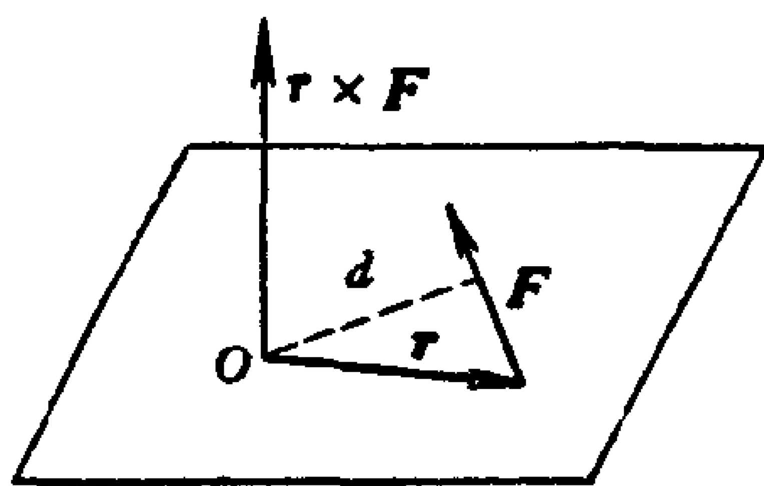


图 36

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}.$$

另取一点 O'，以 $\boldsymbol{M}'$ 表 $\boldsymbol{F}$ 对 O' 的力矩，則显然有

$$\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}+(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{F},$$

此处 $\boldsymbol{d}$ 是由 O' 到 O 的矢量.

一力系 Σ 中每一力对 O 点的力矩的矢量和称为 Σ 对 O 的合矩，即

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1+\cdots+\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_n.$$

显然有

定理 1. 力偶对任一点的力矩都相同(指作为自由矢量来說是相同的).

定理 2. 等效的力系对一点的合矩是相同的.

这可由 $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_2$ 立得

定理. 一共点力系对任一点的合矩等于合力对該点的力矩(即上公式中取 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\cdots=\boldsymbol{r}_n$)，又合力非 $\boldsymbol{0}$ 的一系平行綫上的力系对任一点的合矩也等于合力对該点的力矩.

§16. 力　　偶

本节的目的在于証明：凡合矩相同(作为一个自由矢量)的力偶都是等效的. 任何两个力偶可以合并成为一个力偶，所对应的力矩也是原力偶的力矩的矢量和.

1) 力偶中的力和力臂的大小可以任意改变，只要它們的合矩保持不变.

証. 在中点 O 加二力 $\boldsymbol{F}'$ 与 $-\boldsymbol{F}'$. 作 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}'$ 的合力得 $\boldsymbol{\Phi}$，則 $\boldsymbol{\Phi}$ 与 $-\boldsymbol{\Phi}$ 也成一力偶(見图 37). 由 §14 定理 1 可知

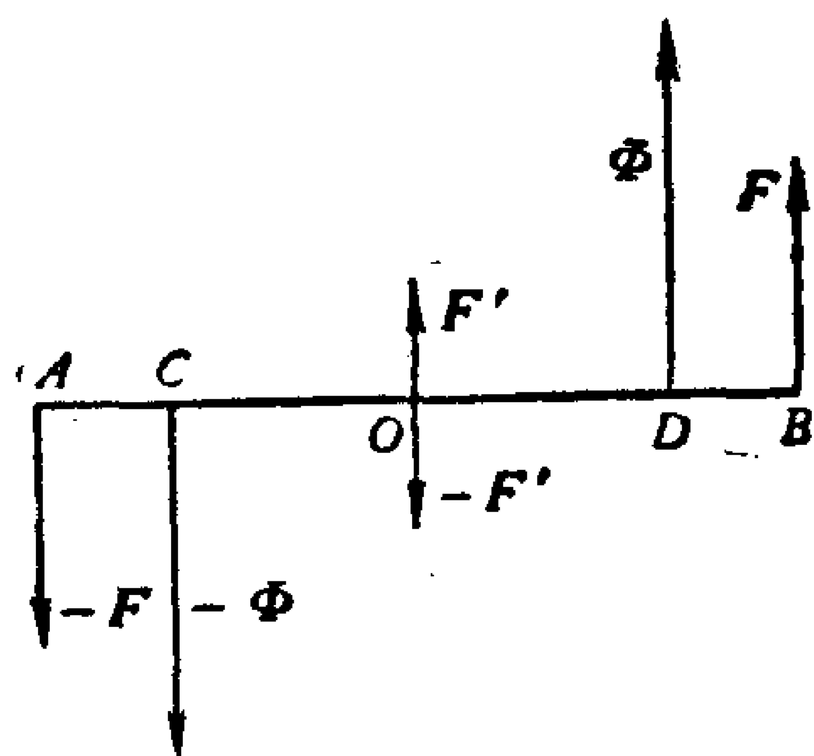


图 37

$$|\boldsymbol{F}'|OD=|\boldsymbol{F}|DB,$$

故

$$|\boldsymbol{\Phi}|OD=(|\boldsymbol{F}|+|\boldsymbol{F}'|)OD=$$
$$=|\boldsymbol{F}|(OD+DB)=|\boldsymbol{F}|OB.$$

取合适的 $\boldsymbol{F}'$，我們可以得出任意长的 $\boldsymbol{\Phi}$ 或任意长的 OD，但不能两个都任意. 实际上，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{\Phi}$ 的矢头在等腰双曲綫($xy=$ 常数)上.

2）力偶可以平行移动，即平行移动后的力偶与原力偶等效.

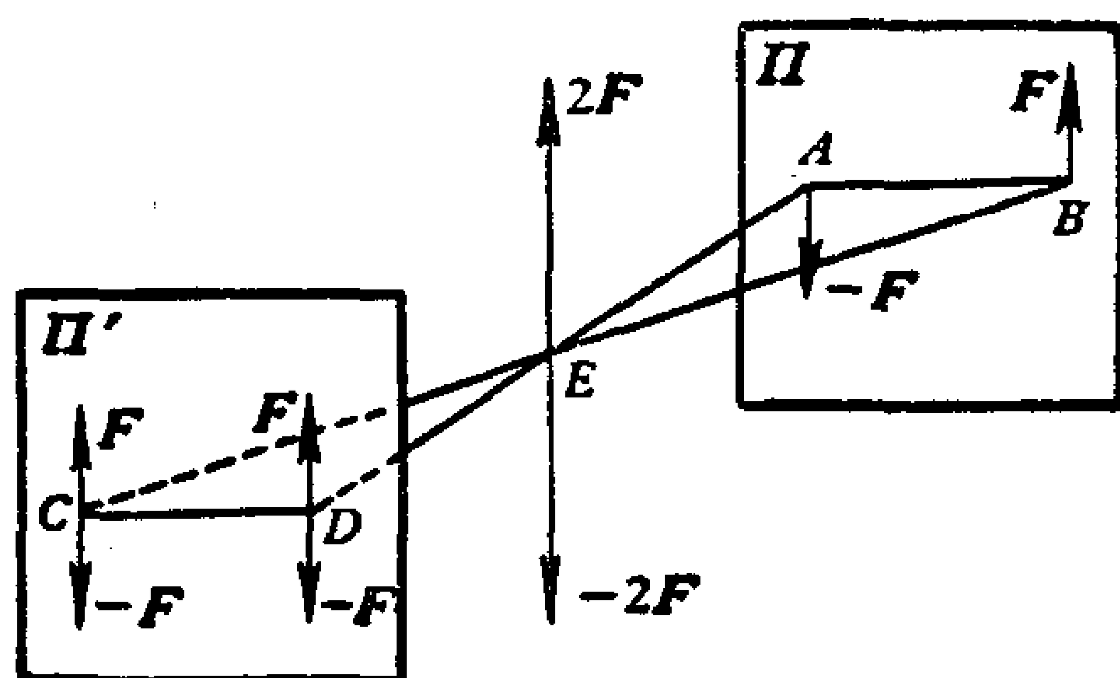


图 38

証. 設力偶所在的平面是 Π，我們現在把这个力偶平行移动到 Π' 內. 在 Π' 中画 AB 的平行等长綫 CD，并于 C，D 各加 $\boldsymbol{F}$，$-\boldsymbol{F}$ 的力. 由于 AB 与 CD 是等长平行的，故 AD，BC 是平行四边形的二对角綫，交于 E 点. 作用于 A，D 的两个 $-\boldsymbol{F}$ 在 E 点合成 $-2\boldsymbol{F}$. 在 B，C 的两个 $+\boldsymbol{F}$ 在 E 点合成 $+2\boldsymbol{F}$. 这二力在 E 点相抵消. 結果在 Π' 內剩下了由原力偶平移来的一力偶，故得定理（若 $\Pi=\Pi'$，則为同平面內平移的情况）.

3）一力偶可以繞其力臂中心旋轉任一角度（在同一平面上），即旋轉后所得的力偶与原力偶等效.

証. 繞中点 O 把 AB 旋轉到 CD，在 CD 的两端各加一力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $-\boldsymbol{F}_1$. $\boldsymbol{F}_1$ 垂直于 OD 且 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}|$. 在 BOD 角內作 $\boldsymbol{F}$ 与 $-\boldsymbol{F}_1$ 的作用綫交于 M. 同样，在 AOC 角內得交点 N. 由于 $\triangle OBM=\triangle ODM$，$\triangle OAN=\triangle OCN$，故 OM，ON 平分对頂角，即 M，O，N 在一直綫上. 在 M 点，$\boldsymbol{F}$ 与 $-\boldsymbol{F}_1$ 的合力与在 N 点 $-\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}_1$ 的合力对消了，所留下的就是以 CD 为臂的力偶 $(\boldsymbol{F}_1,-\boldsymbol{F}_1)$.

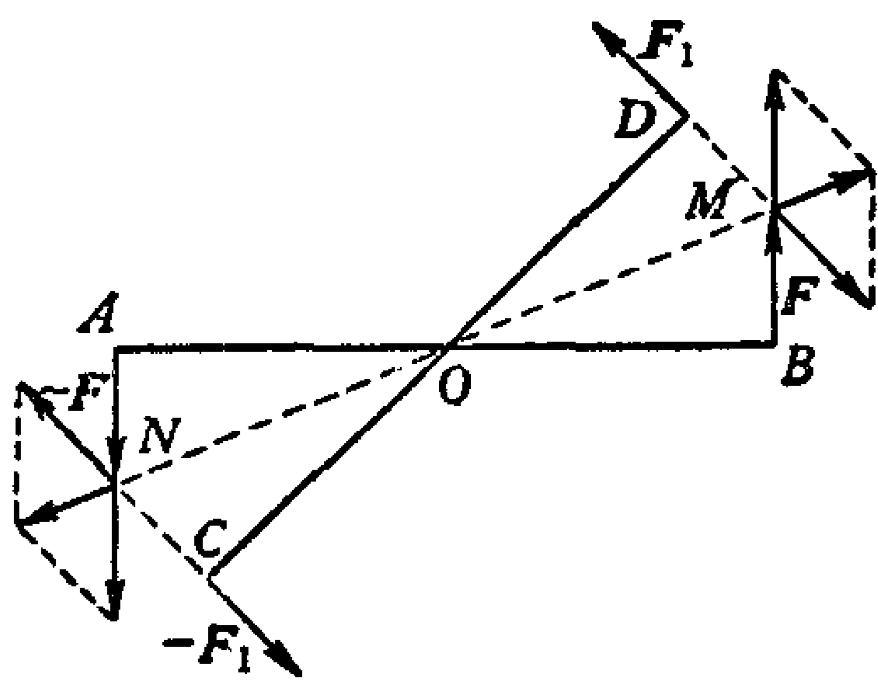


图 39

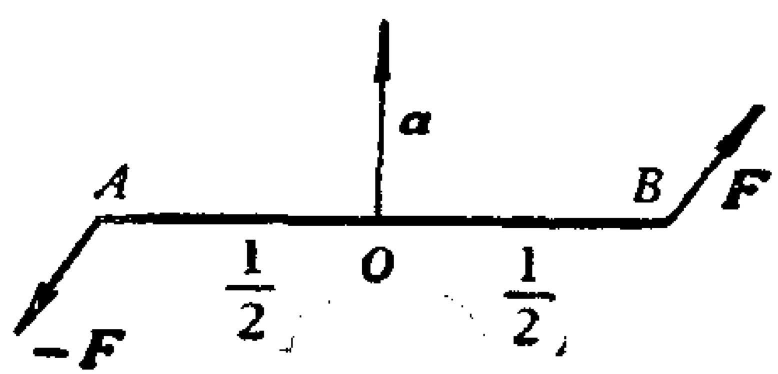


图 40

4）任意給了一个矢量 $\boldsymbol{a}$，过起点 O 作一垂直平面. 平面上取一以 O 为中心的綫段 AB，其长为 1. 作此平面上过 A，B 两点并垂直于 AB 的二矢 $\boldsymbol{F}$ 与 $-\boldsymbol{F}$，方向相反，其长为 $|\boldsymbol{a}|$，并照反时針方向定 $\boldsymbol{F}$ 的方向. 这样所得的力偶就是以 $\boldsymbol{a}$ 为力矩的力偶.

反之，任一以 $\boldsymbol{a}$ 为力矩的力偶，先由 2）可以把它所在的平面移为上述的平面；再由 3）把力臂移至上述的力臂；最后由 1）可以把这力偶变为与上述力偶完全相同.

5）两力偶可以合并成为一力偶，前二力偶的力矩的矢量和就等于后一力偶的力矩.

証. 如果两力偶所在的平面平行，則由 2）及 3）可以把它們移成为共平面同力臂的

两个力偶．由§14 定理 1 我們可以把它們加成一力偶，所得的力矩就是原力矩的和．

如果不平行，命 L 是它們的交綫．用 2)，3) 与 1) 可以变 L 上单位长綫段为二力偶的公共力臂，且二力偶处于同一平面．于是在此力臂的两端得二力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$，它們都与力臂垂直．作 $\boldsymbol{F}$ 表 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ 的和，显然 $(-\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F})$ 是該二力偶的和．又由§15 定理可見，二力偶的力矩的矢量和就等于二力偶之和的力矩．

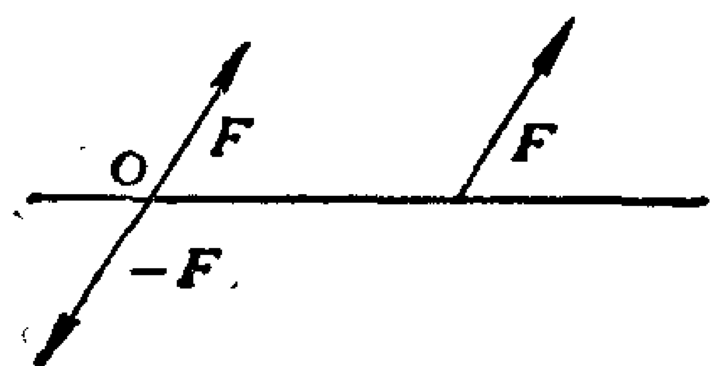


图 41

6) 任給一点 O，任一力系等效于以 O 点为起点的一个力和一个力偶所成的力系．

証．任給一力 $\boldsymbol{F}$，在 O 点添上 $\boldsymbol{F}$ 与 $-\boldsymbol{F}$ 二力，則得从 O 点为起点的一个力和一力偶．

把力系中每一个力都如此分解，則得一力系，其中是共 O 点的一些力加上一些力偶．将共点力合并为一力，把諸力偶合并成一力偶，卽得所証．

7) 任給一点 O，任一力系等效于二力，其一以 O 点为起点．

把力偶中一力的起点移到 O 点，把 O 点二力合并，卽得所証．

習題．如果一个力系中的各力，其位置、方向与大小可依次由一平面多边形的各边来代表，則此力系等效于一力偶，其力矩的大小等于多边形面积的两倍．

§17. 力系的标准形式

1) 任一力系等效于一个力和一个力偶，这力偶的力矩与該力平行．

証．由§16 的 6)，任一力系等效于一个力 $\boldsymbol{F}$ 和一个以 $\boldsymbol{M}$ 为力矩的力偶．把 $\boldsymbol{M}$ 分解为 $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M}_0$，$\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 平行，$\boldsymbol{M}_0$ 与 $\boldsymbol{F}$ 垂直．作垂直于 $\boldsymbol{M}_0$ 且包有 $\boldsymbol{F}$ 的平面 Π，在 Π 上作一力偶，其力矩为 $\boldsymbol{M}_0$，其一端就是 $\boldsymbol{F}$ 的出发点 O，則在 O 点的力是 $-\boldsymbol{F}$．另一端命之为 O'，如是則本力系等效于 O' 的一力 $\boldsymbol{F}$ 与以 $\boldsymbol{m}$ 为力矩的一力偶．

力系的如此表达法称为**标准形式**，力学中称为**螺旋系**．

矢量 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 仅相差一常数因子，卽

$$p\boldsymbol{F}=\boldsymbol{m}.$$

这 p 称为螺旋系的参数，$\boldsymbol{F}$ 的作用綫称为軸．

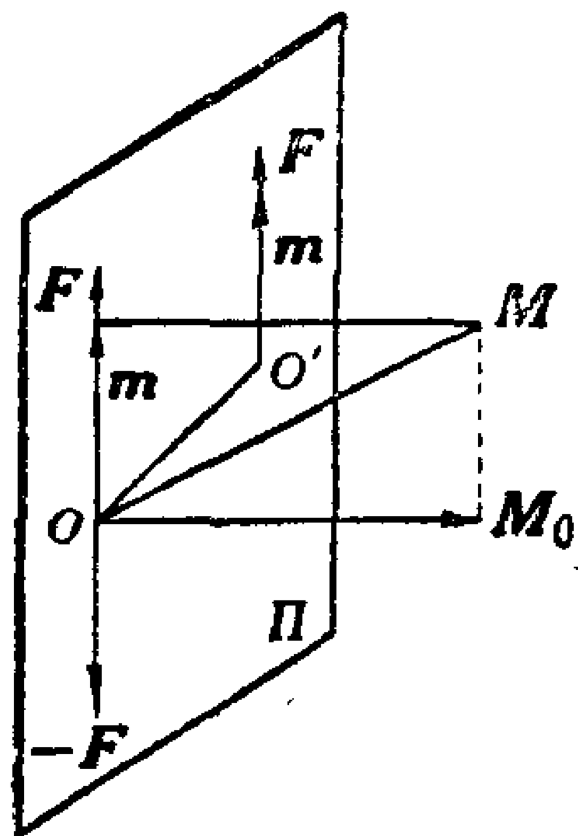


图 42

2) 注意．$\boldsymbol{F}$ 是一个滑动矢量，$\boldsymbol{m}=p\boldsymbol{F}$ 是一个自由矢量，这系对一点 O 的合矩是

$$M = r \times F + m,$$

此处 r 是由 O 到 F 的起点的矢量. 上式两边与矢量 F 做内积,可知

$$M \cdot F = m \cdot F = p(F \cdot F),$$

即

$$p = M \cdot F / F \cdot F.$$

矢量方程

$$M = r \times F + pF$$

的 r 作为未知矢量, p 作为未知数,则 $p = M \cdot F/F \cdot F$ 且由 § 5 可知这矢量方程有解,且解的一般形式是 $r = r_0 + tF$. 故得

图 43

定理 1. 給了点 O, F 与 M, 有一个且唯有一个螺旋力系存在,这力系对 O 点的合矢、合矩各为 F, M.

定理 2. O 点已給,二力系对 O 点的合矢、合矩各为 (F, M) 与 (F_1, M_1), 则二系等效的必要且充分条件是 $F = F_1$, $M = M_1$.

証. 由 § 13 的定义与 § 15 可知,两个等效力系的合矩是相同的; 反之,由定义可知,他們有同一的标准形式,故得定理.

定理 3. 二力系对一点的合矢、合矩相等,则对任一点的合矢、合矩也相等.

定理 4. 一力系平衡的必要且充分条件是 $F = 0$, $M = 0$. 若 $\{F_1, \cdots, F_l\}$ 所成的力系与 $\{F'_1, \cdots, F'_m\}$所成的力系等效,则$\{F_1, \cdots, F_l, -F'_1, \cdots, -F'_m\}$是一平衡力系.

3) 现在研究一下力系的分类.

先从 $M \cdot F = m \cdot F = p|F|^2$ 来討論. 如果 $M \cdot F = 0$, 则有 $p = 0$ 或 $|F| = 0$. 当 $p = 0$ 时,这力系等效于一个力;当 $|F| = 0$ 时,这力系等效于一力偶. 若 $p = 0$, $|F| = 0$ 同时出现,这力系平衡.

若 $M \cdot F \neq 0$,则有一非 0 的順中心軸的力,还有一力矩非 0 的力偶.

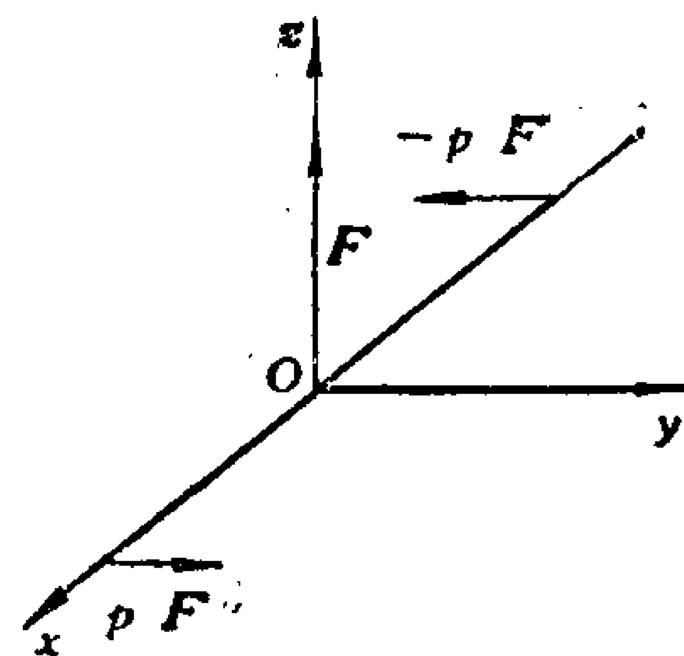


图 44

如果我們把坐标取得合适,就可以把标准力系表达如下: 取 z 軸的方向就是 F 的方向,取 $m = pF$ 的力臂就是 x 軸,力臂的长度等于 1. 在臂端各装一平行于 y 軸但方向相反长度为 $p|F|$ 的矢量. 当 $p > 0$ 时如上图,这三个力是

起　　点	終　　点	矢 量 表 示	对(x, y, z)的力矩
$(0, 0, 0)$	$(0, 0, Z)$	$(0, 0, Z)$	$(-yZ, xZ, 0)$
$(1/2, 0, 0)$	$(1/2, pZ, 0)$	$(0, pZ, 0)$	$(pzZ, 0, (1/2 - x)pZ)$
$(-1/2, 0, 0)$	$(-1/2, -pZ, 0)$	$(0, -pZ, 0)$	$(-pzZ, 0, (1/2 + x)pZ)$

§ 18. 平衡方程及其应用

1) 平衡方程.

静力学的問題一般都可用平衡方程来解决,平衡方程是

$$\boldsymbol{F}=0, \quad \boldsymbol{M}=0.$$

系$\sum$中有 n 个力 $\boldsymbol{F}_v(1\leqslant v\leqslant n)$，其作用点各为 (x_v, y_v, z_v)，其分量为 (X_v, Y_v, Z_v)，則平衡方程可以写为六个方程

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i=0, \quad Y=\sum_{i=1}^{n} Y_i=0, \quad Z=\sum_{i=1}^{n} Z_i=0,$$

$$M_x=\sum_{i=1}^{n}(y_iZ_i-z_iY_i)=0, \quad M_y=\sum_{i=1}^{n}(z_iX_i-x_iZ_i)=0,$$

$$M_z=\sum_{i=1}^{n}(x_iY_i-y_iX_i)=0.$$

在实际运用时，妥善地取坐标系統可以大大地化簡．例如：

2）三力平衡的条件．

我們現在只討論三力中无二力平行或反平行的情况，因为其他情况容易解决．

由 § 17 我們可以取坐标系統使这三力的矢量各为$(X_1, 0, 0)$，$(X_2, Y_2, 0)$，(X_3, Y_3, Z_3)．因为 $X=Y=Z=0$，所以它們实际上是 $(X_1, 0, 0)$，$(X_2, Y_2, 0)$，$(-X_1-X_2, -Y_2, 0)$，三个作用点，不妨取它們是 $(x_2, 0, 0)$，$(x_2, 0, z_2)$，$(x_3, 0, z_3)$（因为 $(x, y, z)+\lambda(X, Y, Z)$ 都可以作为作用点）．由 $M_x=M_y=M_z=0$ 可知

$$(z_3-z_2)Y_2=(z_2-z_3)X_2-z_3X_1=(x_2-x_3)Y_2=0.$$

由于 $Y_2\neq 0$，故 $z_2=z_3=0$，$x_2=x_3$，卽得共点于 $(x_2, 0, 0)$ 的三力（如下图）．

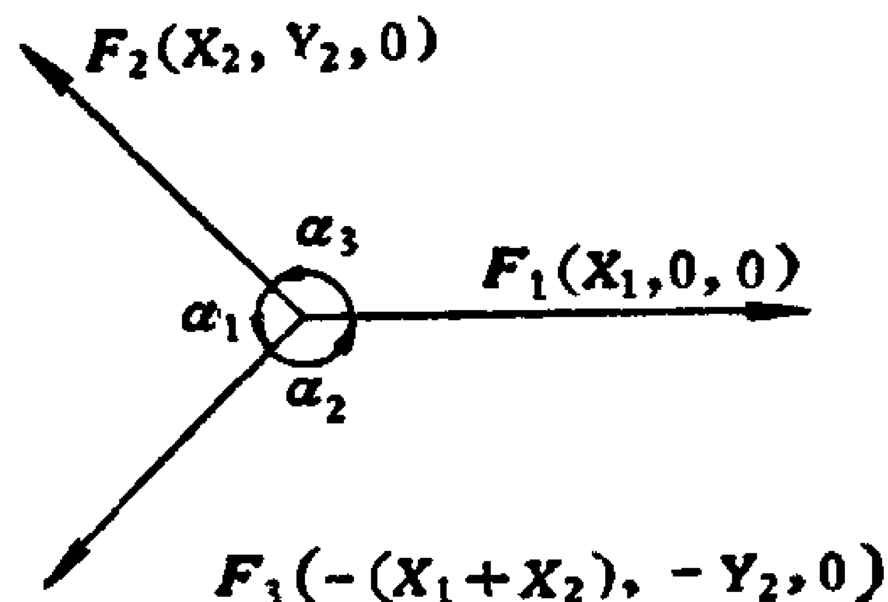


图 45

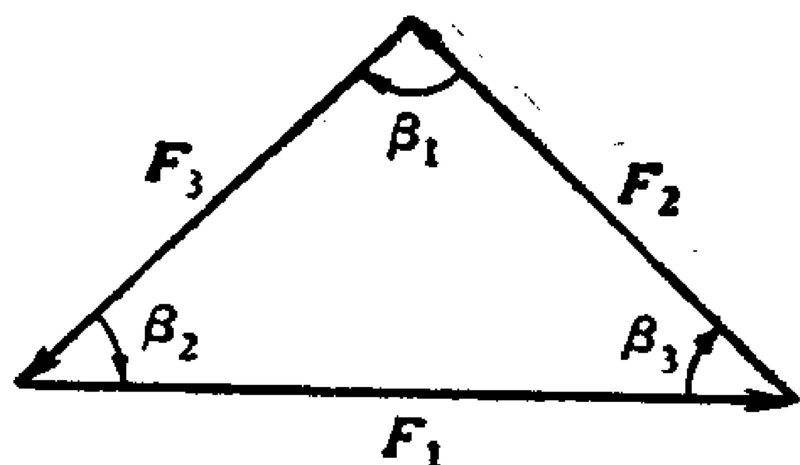


图 46

把 $\boldsymbol{F}_2$ 的起点移到 $\boldsymbol{F}_1$ 的終点，把 $\boldsymbol{F}_3$ 的起点移到 $\boldsymbol{F}_2$ 的終点，則易見 $\boldsymbol{F}_1$ 的起点是 $\boldsymbol{F}_3$ 的終点，成一三角形，边角关系有

$$\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{\sin\beta_1}=\frac{|\boldsymbol{F}_2|}{\sin\beta_2}=\frac{|\boldsymbol{F}_3|}{\sin\beta_3}.$$

因此得出

$$\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{\sin\alpha_1}=\frac{|\boldsymbol{F}_2|}{\sin\alpha_2}=\frac{|\boldsymbol{F}_3|}{\sin\alpha_3}.$$

3）約束力．

凡可以无限制地平行移动或者轉动的一个質点或者一个体，叫做自由点或自由体．如不能如此，則說它受有拘束，如算盘上的算珠就是有拘束的．約束的力学效应可以用一些被动性的力来代替，这些力叫做約束反作用；因此我們可以把不自由的剛体看作自由的

刚体，只要把它从約束中解脱出来而以約束的作用代替約束的效果.

約束公理：可以把任何不自由的刚体从約束中解脱出来，只要以約束反作用代替約束的效果，而把該物体看成是在施与它的主动性的力和約束反作用力共同作用下的自由刚体.

在所有的情况下反作用的強度和方向的决定都依賴于作用于物体的主动性的力.

例. 有一根重量是 P 的均匀杆子，两端 A 与 B 分别与水平的地板和鉛直的墙壁 Oy 接触. 接触面間并无摩擦作用，杆上 D 点栓一根繩子，連在 O 点. 已知杆长 $AB = 2l$，和地平面的交角是 α，繩和地面的交角是 β. 試求繩的张力.

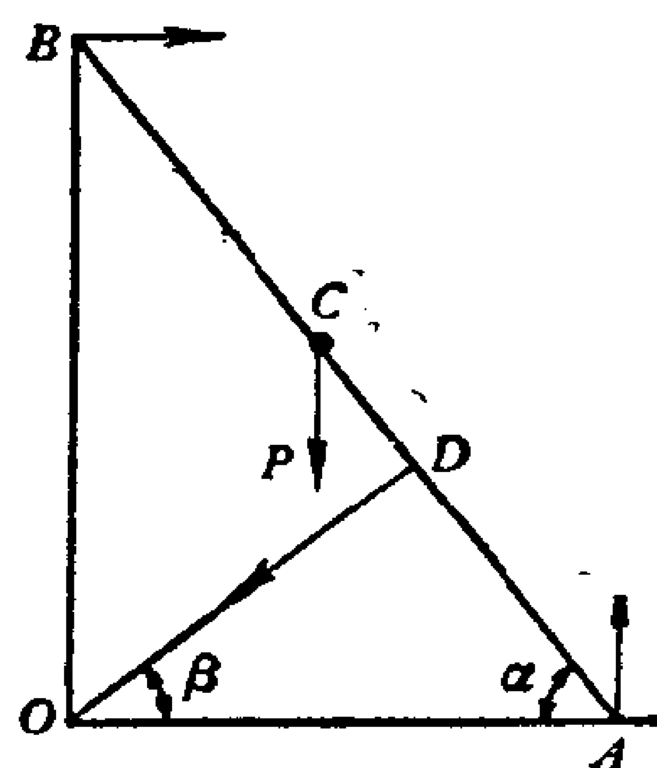


图 47

AB 的中点为 C，扣繩处命之为 D. 三个限制可以如 A，B，D 处三个力表示它們，也就是加上这三个力之后連原来的重力便得一个自由体了. 这四力的情形如下：

	起　　点	矢　　量	力　　矩
A 点的力	$(2l\cos\alpha, 0)$	$(0, Y)$	$2lY\cos\alpha$
B 点的力	$(0, 2l\sin\alpha)$	$(X, 0)$	$-2lX\sin\alpha$
C 点的力	$(l\cos\alpha, l\sin\alpha)$	$(0, P)$	$lP\cos\alpha$
O 点的力	$(0, 0)$	$(\lambda\cos\beta, \lambda\sin\beta)$	0

由于平衡，最后两栏相加得 0，故

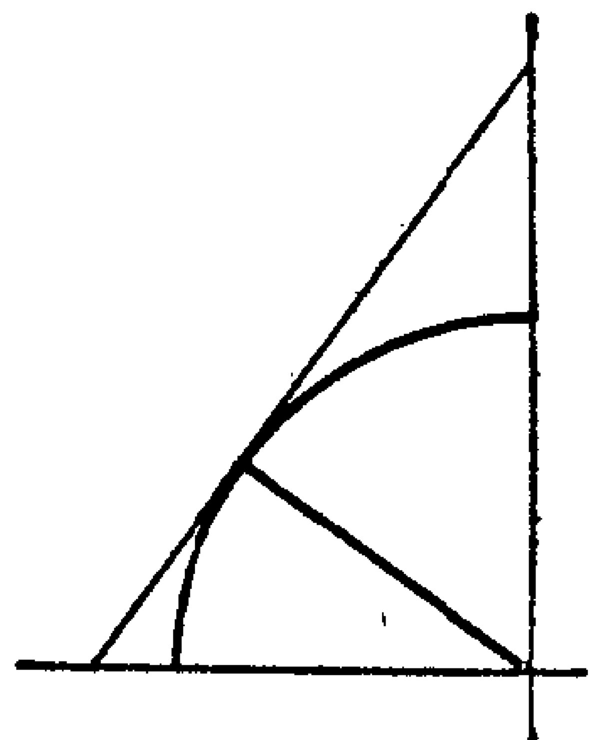
$$X = -\lambda\cos\beta,\quad Y = -P - \lambda\sin\beta,$$
$$2lY\cos\alpha - 2lX\sin\alpha + lP\cos\alpha = 0,$$

卽得张力

$$\lambda = \frac{P\cos\alpha}{2\sin(\alpha - \beta)}.$$

若 D 在 C 下，則 $\alpha > \beta$. 間題有解答. 若 D 在 C 点，則张力无穷；換言之，繩索无法綳紧. 若 D 在 C 上，张力为負. 如要阻止滑动，我們不是用繩拉，而且应当用杆頂了.

A，B 二点之力也可算出. 但在一般的情况中，反作用的力是不一定能够完全确定的.


图 48

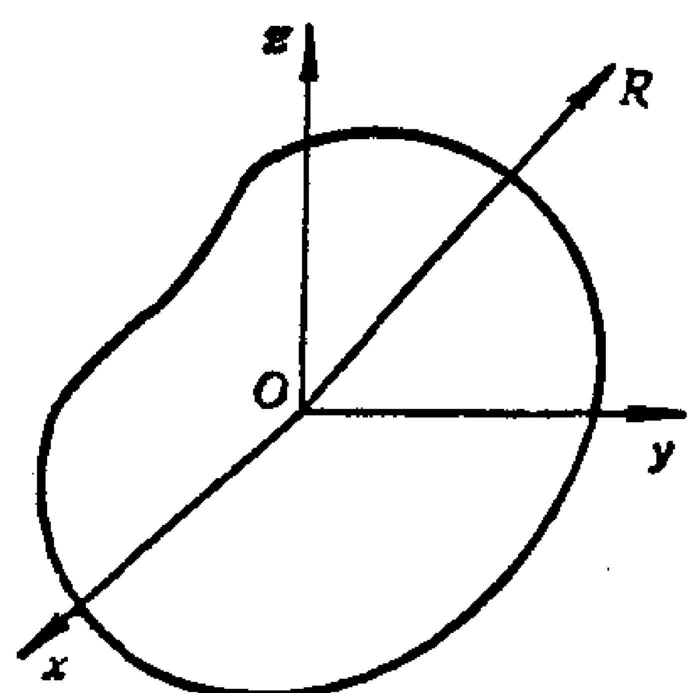


图 49

4）平衡条件.

我們也可以用約束力的性質来看出平衡所需的条件.

(1) 有一固定点的刚体的平衡条件.

不妨假定这点就是原点. 任何一个力系如果可以化为一个通过 O 点的力, 則此力系一定使此物体平衡. 而一力通过 O 点的必要且充分条件是对 O 的力矩为 0. 因此,有一固定点的刚体的平衡条件是这力系对这 O 点的合矩等于 0.

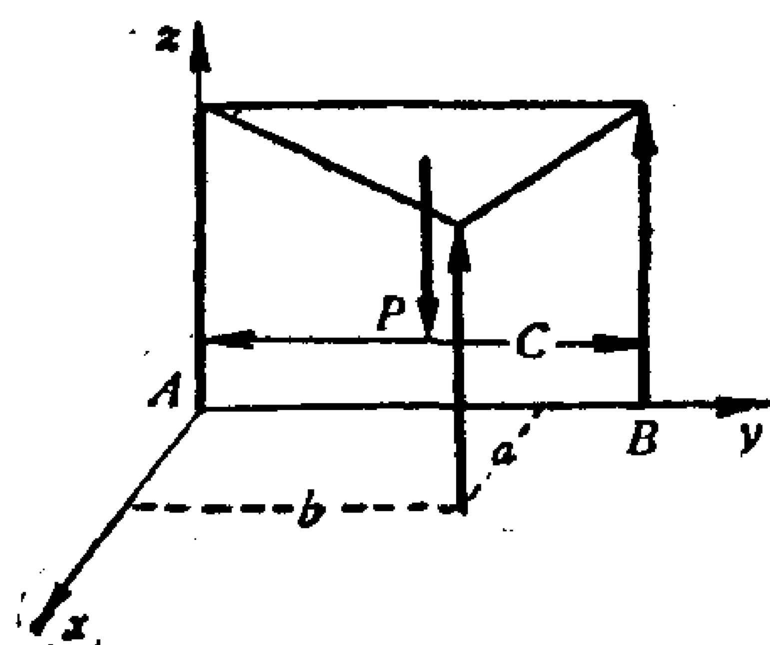


图 50

(2) 有一固定軸的刚体的平衡条件.

可以沿軸滑动,所以任何与軸相交且垂直的力是不能动搖这个刚体的. 取固定軸为 x 軸,直交于 x 軸的力的形状是

$$\text{起点 } (x, 0, 0), \quad \text{矢量 } (0, Y, Z).$$

一批这样力所成的力系有两个性質: $X=0$ 与 $M_x=0$. 这也就是一力系加于这刚体而平衡的条件.

(3) 軸上每一点都固定的刚体的平衡条件.

討論有二固定点的情况与此完全相同,所以我們可以用(1)来处理.

(4) 放在水平面的自由物体的平衡.

有一桌子,它的三条腿在 A, B, C 三点站在平面上. 諸力如下:

	起点	矢量	力矩
A 点的力	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, Z_1)$	$(0, 0, 0)$
B 点的力	$(0, c, 0)$	$(0, 0, Z_2)$	$(cZ_2, 0, 0)$
C 点的力	$(a, b, 0)$	$(0, 0, Z_3)$	$(bZ_3, -aZ_3, 0)$
	桌面重心	$(0, 0, P)$	$(*, *, 0)$

最后二栏加在一起,結果为 0, 我們可以唯一地算出 Z_1, Z_2, Z_3. 而沒有平衡条件,这就意味着,桌子总是平衡的.

假如在同样的情形下,取一个四脚桌子,則未知的反作用有四个,而方程只有三个,因此問題在靜力学上不确定.

第三章　函数与图形

§1. 变　　量

在自然現象中，我們經常遇到不同的量：如时間，长度，重量，温度等等．任一种量，按照不同的情况，有时取不同的数值，有时一成不变．前者称为变量，后者称为常量．

常量变量并不是絕对的，情况变了，常量可能轉化为变量，变量也可能轉化为常量；并且有的时候，如果变化微不足道并不影响我們的結論时，我們也可以把变量当作常量来处理．

在測量物体重量时，必須辨明是否在同一地点同一高度进行．在同一地点和高度某一物体的重量是常量，如果改变到不同地点或高度便成为变量．

某些量的变化往往依賴于另一些量的变化而定，后者称为自变量，前者称为因变量．关于自变因变之分也并不是絕对的．

以上所說的重量的变化是由于重力加速度改变而产生的，重力加速度的改变是由于地点（緯度）不同和高度不同，地球轉动的离心力和地球的吸引力不同的緣故．因之，緯度和高度是自变数，它們变了，重量也就跟着改变了．

变量有时可以毫无限制地取实数值．例如：时間 t 的变化可取任何实数值．有时要受某种限制，例如：温度的变化不能低于 -273℃．还有时只允許取自然数，例如：城市居民数，定体积气体內的分子数等．

适合于 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全部实数称为一个閉区間，以 $[a, b]$ 表示；$a < x < b$ 称为开区間，記为 (a, b)；也可以有半开半閉的区間 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$，我們分別記为 $[a, b)$ 与 $(a, b]$．通常，变量是在某一区間內变化的．

我們有时用 $[a, +\infty)$ 表 x 在不小于 a 的范圍內变化，同法定义 (a, ∞)，$(-\infty, b]$ 与 $(-\infty, \infty)$．

§2. 函　　数

在实际問題中，变量时常不只一个，而是几个．例如：著名的 Boyle-Mariotte 定律是：在温度不变的情况下，理想气体的容积与压強成反比例．用 p 表压強，V 表体积，则有

$$pV = C \text{（常量）}.$$

当压強 p 定了，体积也就定了，所以 p 是自变量而 V 是因变量．但是我們也可以先有了体积而求出应有的压強 p．如此，则自变、因变的关系就反轉过来了．

常量 C 也是跟着客观情况而变的：当温度变了 C 就变，物质换了 C 也变．在摄氏 0° 时，对一千克空气来說，$C = 273 \times 29.27$．而当温度是 T℃ 时，我們就有了 Clapeyron 关系式：

$$pV = 29.27(273 + T).$$

如此可以把 p, V, T 三个变量，任取其中的两个作为自变量，一个作为因变量．

另一方面，我們在应用 Boyle-Mariotte 公式时，还須注意这个公式的施用范围．一般說来，从 1 个半大气压到 8 个大气压这公式是可以很好地表达眞实情况的．但是在压強很大时，这一公式是有很大偏差的．换一句話說，在写下 Boyle-Mariotte 公式时，最好注明公式的适用范围．例如写一个 $1\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 8$ 来表明变数在此区間內变化．在一定的温度下，我們有較精确的 van der Waals 公式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \text{常数},$$

其中 a, b 是改正数．这公式中当然也可以把 p 与 V 互相看为自变量、因变量．但有一点必須指出的是当 p 做自变量的时候，V 可能有三个数值．

因变数就是函数，或称为自变数的函数．因变数的值由自变数唯一决定的称为单值函数，非唯一决定的（如上所指 V 有三个数值）称为多值函数．

自变数的选取，有时是任意的，有时是为了方便．但在大多数情况下，要以研究的目的为依据．例如，在物理学上我們有气压公式 $p = p_0 e^{-kh}$，此处 p_0 是在海平面时的大气压，k 是某一常数，h 为高度．根据这公式，p 是 h 的函数．但是当飞机师用压強来判断高度时，他就用 $h = \frac{1}{k}\log(p_0/p)$ 的公式．

§3. 隐 函 数

任一自然規律，給出一个現象和另一（或另一些）現象的关系，于是就建立一个量与量之間的函数关系．因而也就把其他科学部門中从客观現象所提出的問題，轉化为数学問題．

如果某函数（就是因变数）可以由自变数通过数学演算来直接表达，則叫做显函数．例如在定温下，用压強 p 作为自变数，气体容积 V 的表达式是

$$V = \frac{C}{p},$$

故 V 是 p 的显函数．

又如三角形的两边长是 a 与 b，夹角是 θ，則三角形的面积

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

是 a, b, θ 的显函数．

有时我們用

$$y = f(x)$$

来代表不很容易或不可能写出的函数关系. y 是自变数 x 的函数. f 表 y 对 x 的关系的符号,在考虑几种不同函数的时候,我們用不同的字母来表示对 x 的关系:

$$f(x), \quad F(x), \quad \varphi(x)$$

等等.

多变元的函数写成为

$$v = F(x, y, z, t).$$

这表示 v 是变数 x, y, z, t 的函数.

当 x, y, z, t 取特殊值 x_0, y_0, z_0, t_0 时, v 所得出的值称为函数在 $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $t = t_0$ 时的函数值. 例如, $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$,当 $a = 1$, $b = 2$, $\theta = 45°$ 时函数 A 的数值是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

若一个函数不是通过自变量直接表出, 而只有一个方程表示函数值和自变量的值的关系,就叫做隐函数. 例如,变量 y 与变量 x 适合方程

$$y^5 + xy + x^5 = 0,$$

則 y 是自变量 x 的隐函数. 另一方面, x 也是自变量 y 的隐函数,如 van der Waals 公式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \text{常数},$$

V 就是 p 的隐函数.

实际上,显函数和隐函数并沒有多大界限,有时可以从隐函数解出显函数来. 但是,一般講来,解一个方程并不容易,因而发生了一些用隐函数(也就是不解方程)直接处理問題的研究.

上面所講到的是自变量与因变量均取实数值的情况. 在数学及其各方面的应用中,經常会遇到另外两种重要类型的函数,即自变量取实数,因变量(卽函数)取复值的情况与自变量、因变量都取复值的情况. 前者将函数值分为虛、实两部分,实际上,就相当于一个实变数的两个实函数. 后者把自变数 $z = x + yi$ 的虛实部分看成两个自变数, 而函数就变为两个自变数 x, y 的两个函数了. 例如, $w = z^2$, 可以写成为 $w = u + iv$, $z = x + yi$, 則

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy,$$

卽 u, v 是二自变量 x, y 的函数了.

今后在很长一个时期,我們将討論实变数的实函数. 許多結果都极易推到实变数的复函数的情况. 至于复变数的复函数的情况, 有不少特殊的內容,将在本书第二卷中討論.

§4. 函数的图表法

設 $y = f(x)$ 是自变数 x 的函数 (或者隐函数形式 $F(x, y) = 0$). 我們用 x 軸表

自变数，用 y 軸表函数值，則对应于一个 x 的值，有 y 的对应数值．这样的 $(x, y) = (x, f(x))$ 就成为平面上的点，当 x 变化时，就在平面上画出了曲綫．这曲綫就被称为函数 $y=f(x)$ 的曲綫．曲綫上的坐标都满足于方程，反之，凡是满足于方程的数值 (x, y) 都在这曲綫上．

在描繪曲綫的时候，我們应当选择适当的尺度．x, y 的尺度可以选择得不一样，使不至于把图画得太长太扁或画出紙外．

这种方法——沟通代数与几何的方法，建立起代数与几何的紧密联系．一方面，可能由几何軌迹来表示分析的关系，来看出变化的情况；另一方面，也可能由代数演算来求几何问題的解答．这就是 Descartes 首創的解析几何．

在实际情况中，往往是从实驗中先得出一批数值，再把这些数值画在方格紙上，然后研究能否归納成为一个方程．这样的方程称为經驗公式．得到了經驗公式之后，一方面是从理論上找根据，另一方面是再到实驗中去考驗这公式，看它能不能符合客观事实．

例如，我們先做一个实驗，取 8 [升]气体，其压強是 $p=\frac{1}{2}$ [气压]，其温度一定．我們改变压強使它經过一組数值，例如 $p=\frac{1}{2}, 1, \frac{4}{3}, 2, \cdots$，幷量出相对应的气体的体积 V，列成下表

气压 p	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	2	4	8
体积 V	8	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$

因而归納出 Boyle-Mariotte 定律

$$pV = \text{常量}.$$

把这一公式在实驗中考驗．在高压时，找到了不符合事实的情况，因而有 van der Waals 的改进公式．

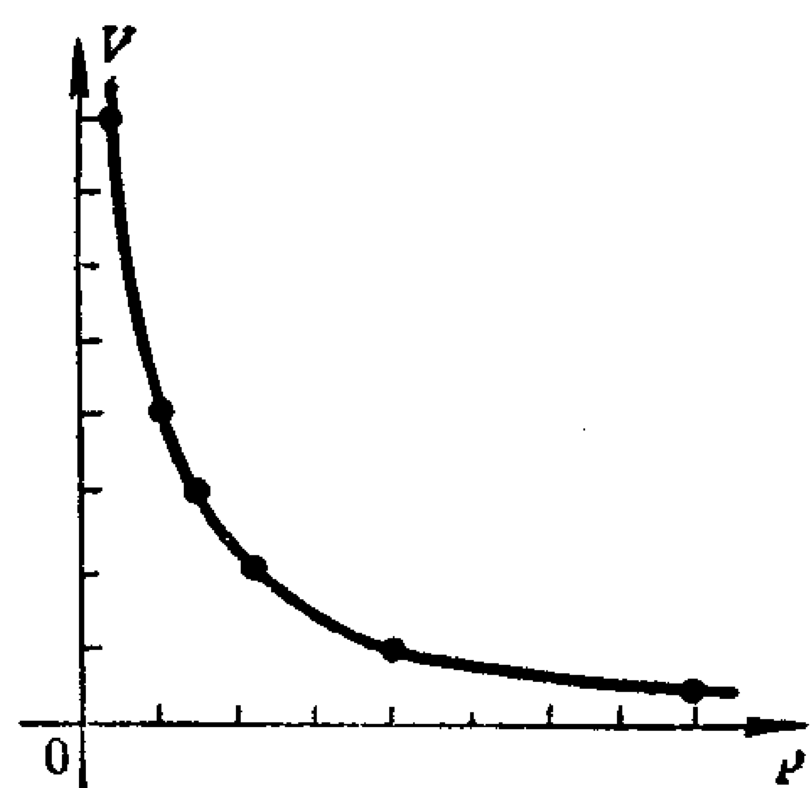


图 51

§5. 几个初等函数

1) 冪函数．我們现在来研究函数

$$y = ax^n,$$

此处 a 与 n 都是常数．这一函数称为冪函数．

我們作 $a=1$ 及 x 取正值的图形．无論 n 取什么值，$x=1$ 时，$y=x^n=1$．所以，所有的曲綫都經过 $(1, 1)$．当 n 取正值而 $x>1$ 时，則 n 愈大曲綫上升愈快(图 52)．当 n 取負值时，$y=x^n$ 相当于分式，例如，$y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$，当 x 增加时，y 要減小．这些曲綫叫做多态曲綫，热力学中常遇到它們(图 53)．

其中 $n=1$ 及 $n=0$ 是两条直綫：$y=x$ 及 $y=1$．又 $x=1$ 也可以看成为 n 趋向无穷时多态曲綫族的极限綫．

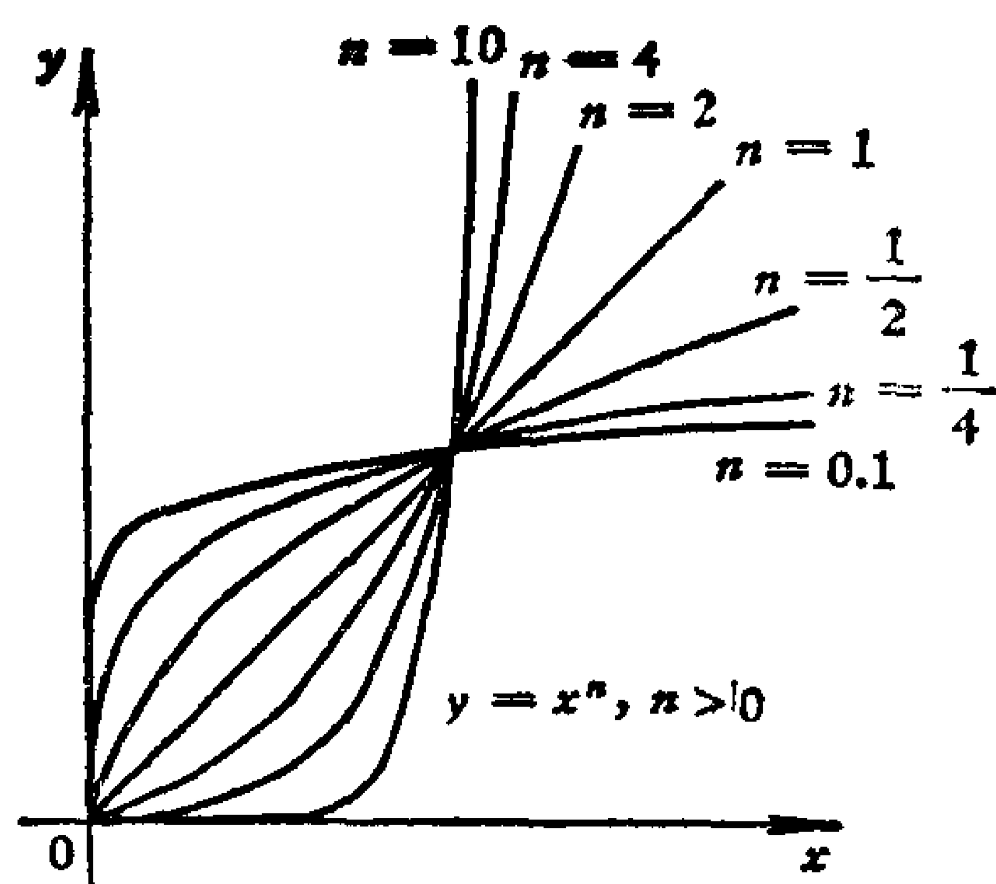


图 52

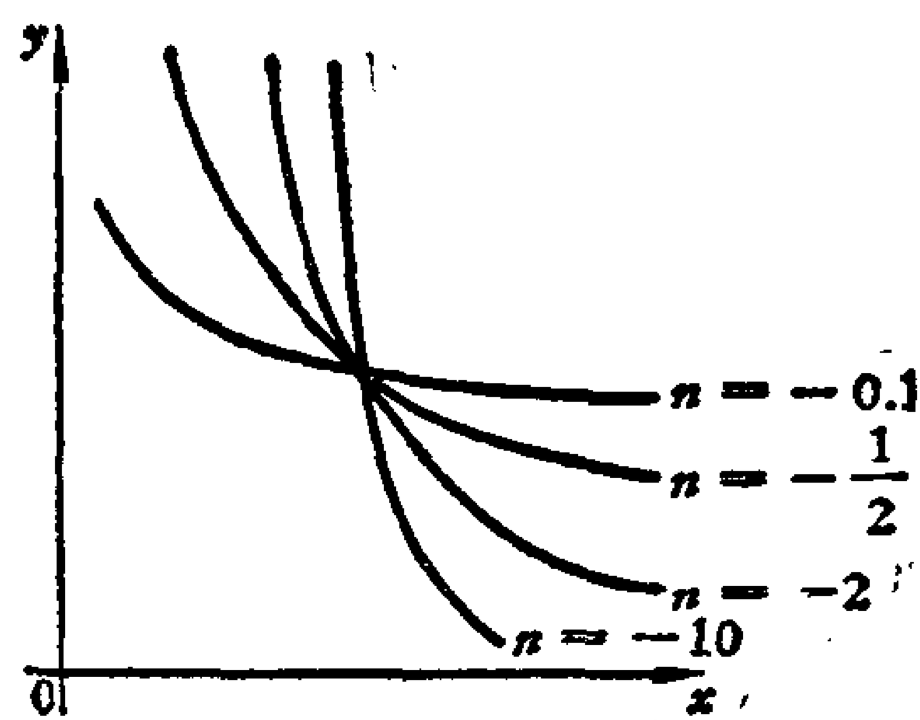


图 53

2）指数函数．函数

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

称为指数函数． 如果 $a > 1$，则当 x 朝正方向趋向无限时，y 无限增大，而当 x 朝負方向趋向无限时，y 趋向 0． 当 $a < 1$ 时，情况与此相反．$a = 1$ 时，得直綫 $y = 1$．指数函数的图形如下，注意曲綫必定过 (0，1) 点：

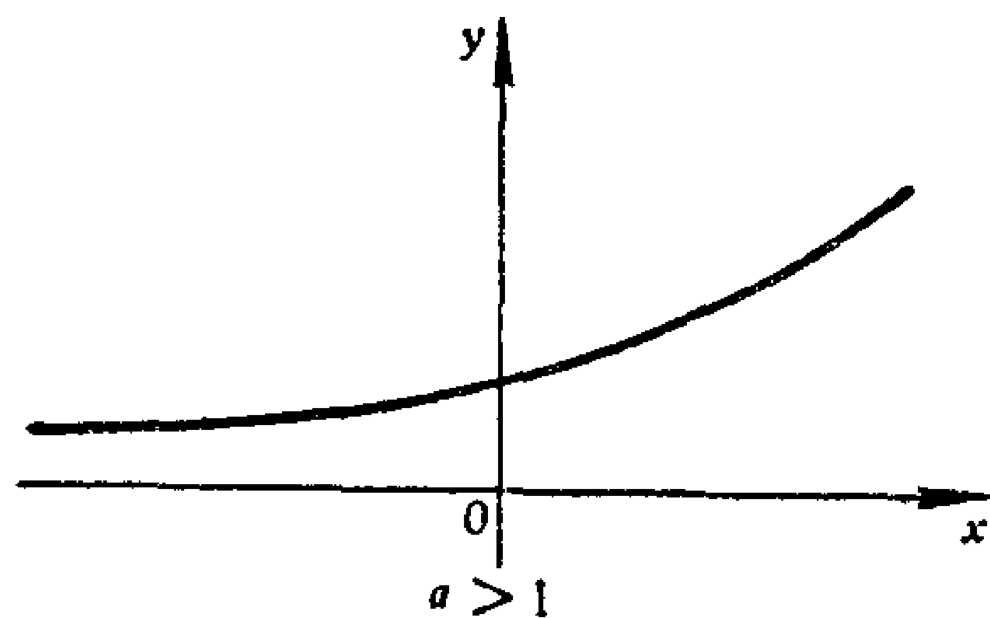


图 54(1)

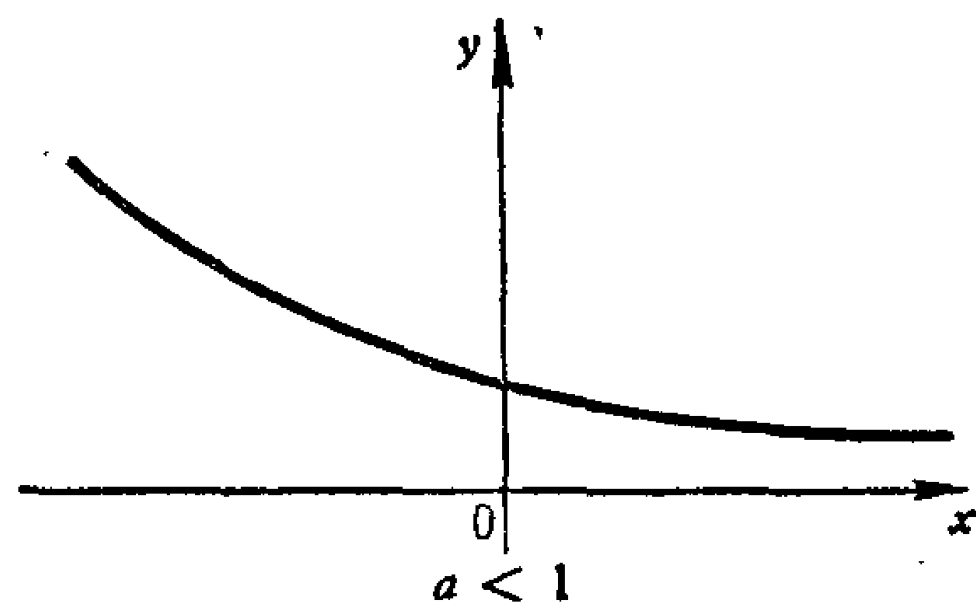


图 54(2)

3）三角函数．六个三角函数

$$y = \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x, \quad \sec x, \quad \csc x$$

都是所謂的周期函数，其中自变数我們用弧度来表达．角度与弧度的关系是：角度是把整个的圓周角分为 360°，而弧度是以单位圓周上的弧长来度量角的大小的．单位圓的周长是 2π，我們就以 2π 来代表 360°，π 代表平角 180°，$\frac{\pi}{2}$ 代表直角 90°．

图 55 是正弦函数 $y = \sin x$ 的图形，这图形显然有 $\sin(x + 2\pi) = \sin x$，2π 称为周期．换言之，$\sin x$ 的数值經过 2π 之后周而复始．

由 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 可知，把函数 $y = \sin x$ 的图形順着 x 軸左移 $\frac{\pi}{2}$ 就得到余弦 $y = \cos x$ 图形（图 56）．

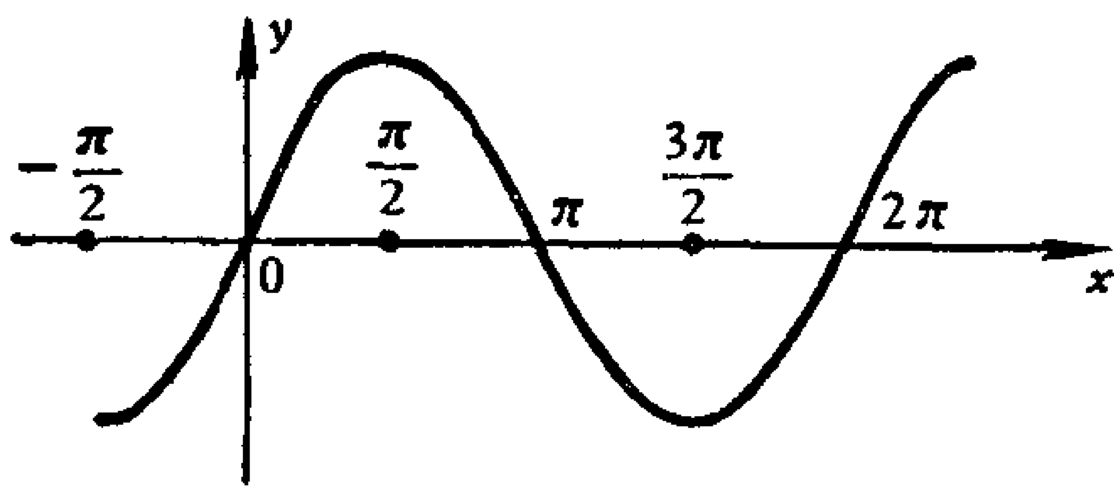


图 55

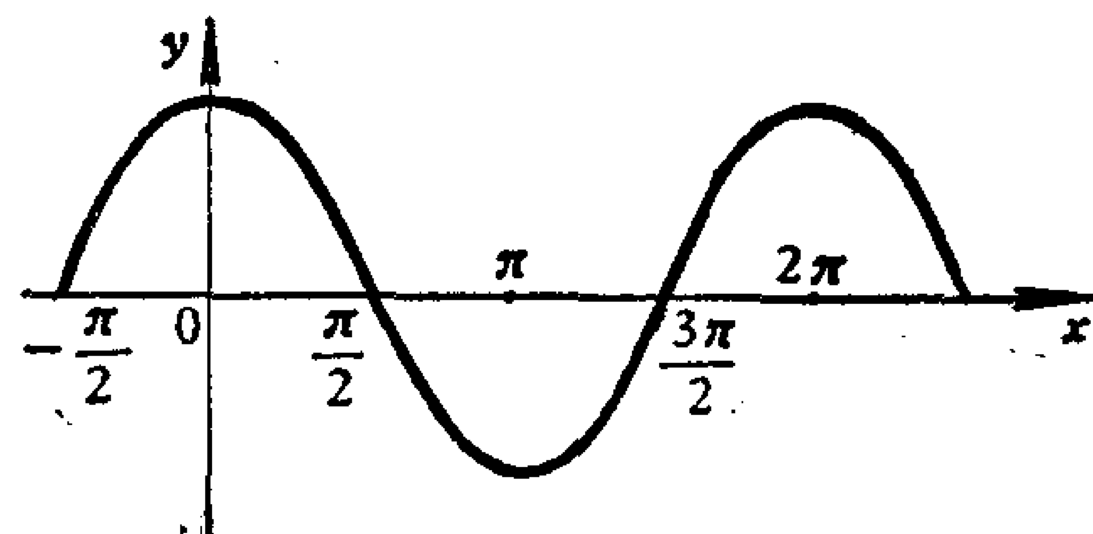


图 56

正切 $y = \operatorname{tg} x$ 的图形,是由一串全同的互相分离的无穷支綫所組成的. 每条支綫的寬度是 π,换言之,正切是以 π 为周期的函数(图 57).

由 $y = \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 可知,余切的图形可由正切的图形沿 x 軸平移 $\frac{\pi}{2}$,且以 x 軸为鏡子反射而得(图 58).

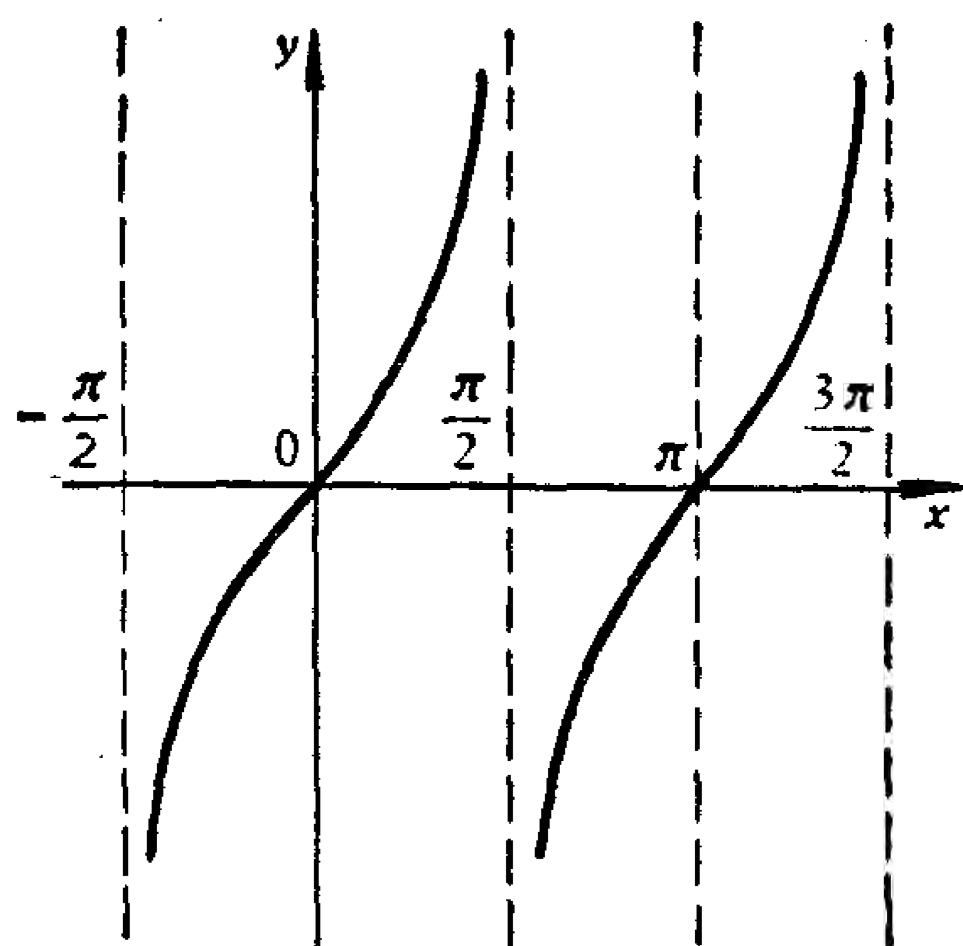


图 57

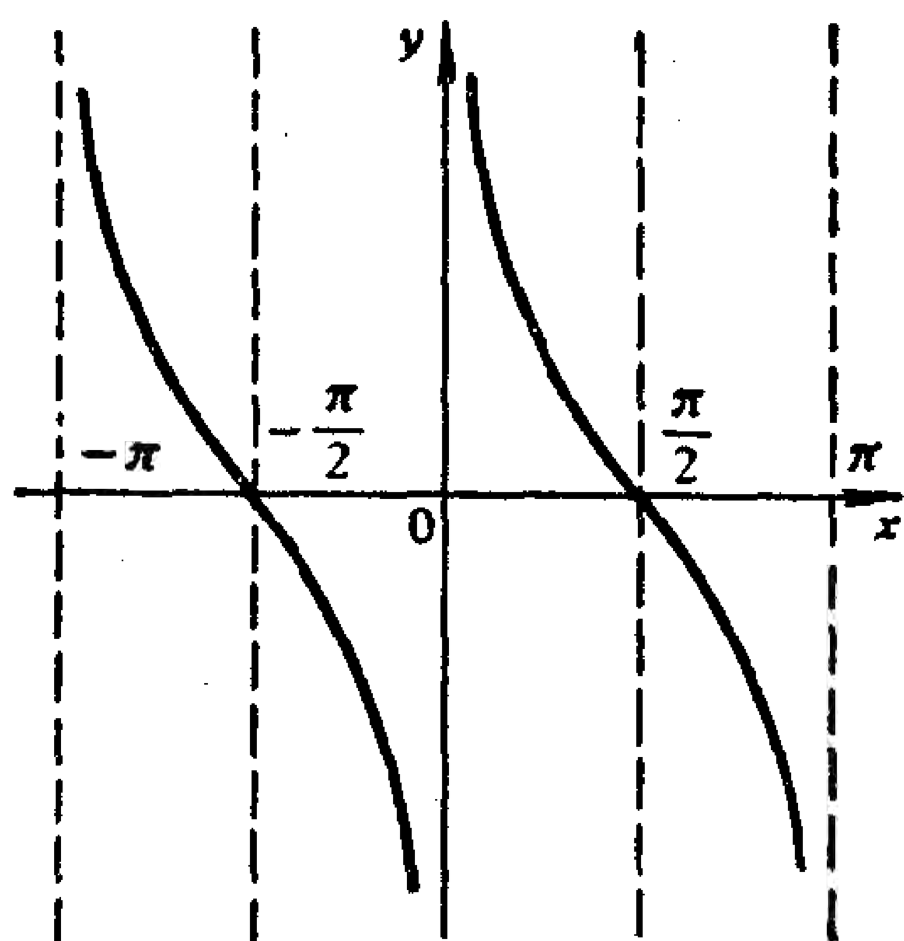


图 58

图 59 是正割 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ 的图形.

余割 $y = \csc x = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 可由正割經平移而得(图 60).

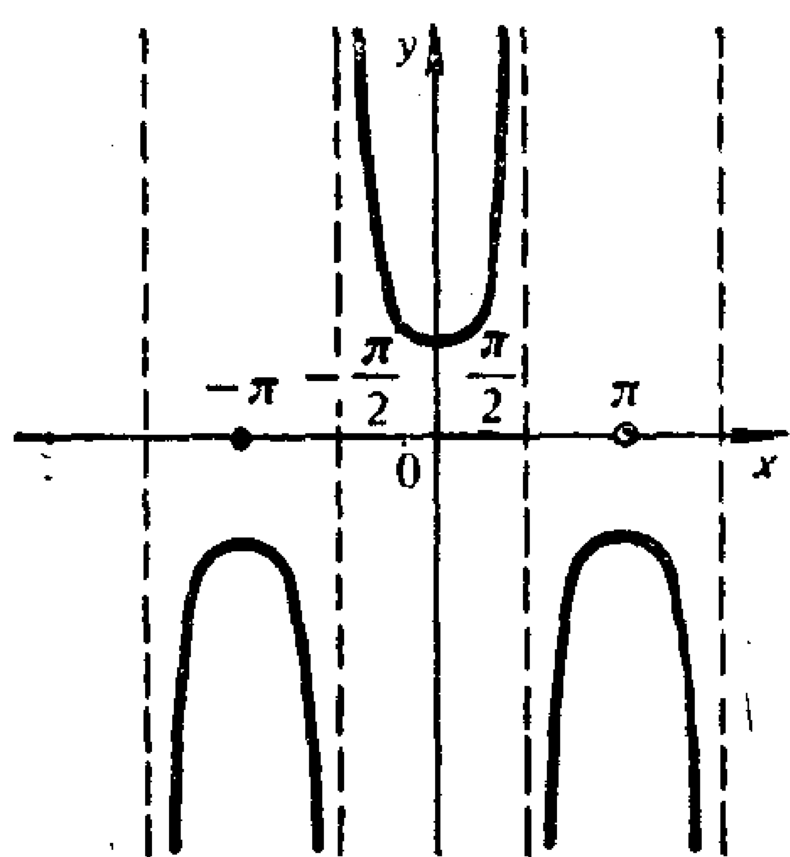


图 59

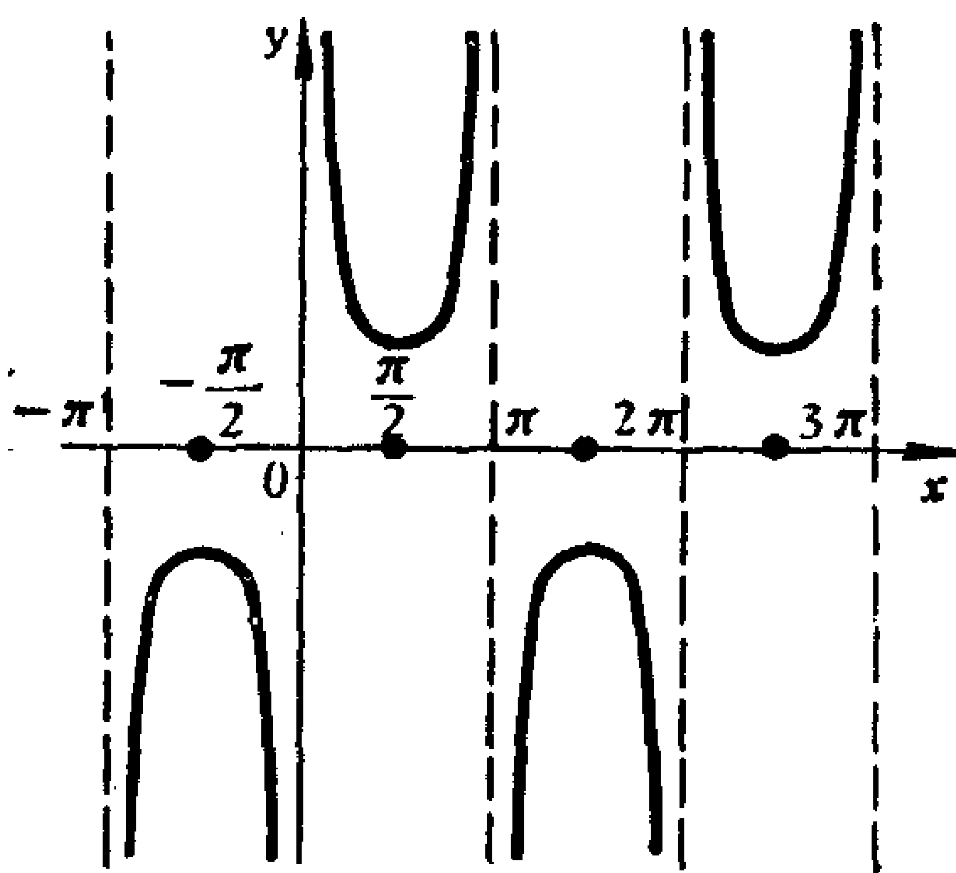


图 60

4) 反函数. 函数 $y = f(x)$ 是以 x 作为自变数, y 是因变数, y 是 x 的函数 $f(x)$. 反之, x 也可以看成为 y 的函数,这样的函数称为原函数的反函数.

例 1. $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $ad - bc \neq 0$,它的反函数就是 $x = \frac{dy - b}{a - cy}$.

例 2. $y = x^2$ 的反函数 $x = y^{\frac{1}{2}}$ 或 $x = -y^{\frac{1}{2}}$(見图 61).

指数函数的反函数称为对数函数,表为 $y = \log_a x$. 它的图形如图 62.

一般說来,把原函数图形从紙背面看,把 x 軸与 y 軸互换就得反函数的图形了.

三角函数

$$\sin x,\quad \cos x,\quad \operatorname{tg} x,\quad \operatorname{ctg} x,\quad \sec x,\quad \csc x$$

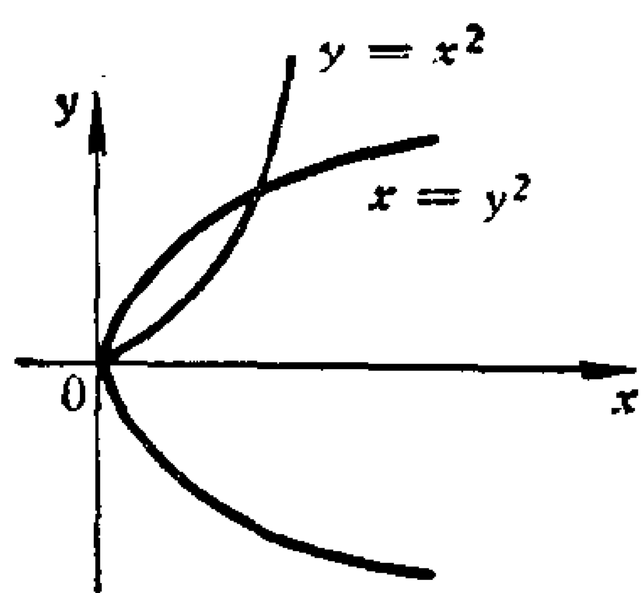


图 61

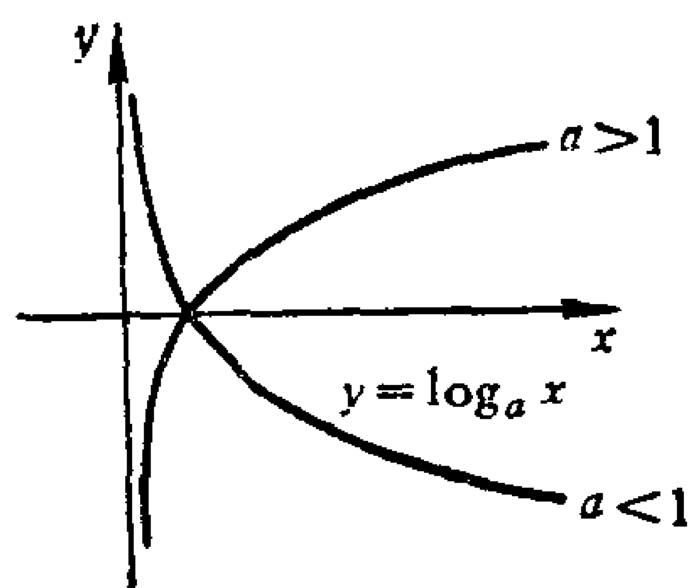


图 62

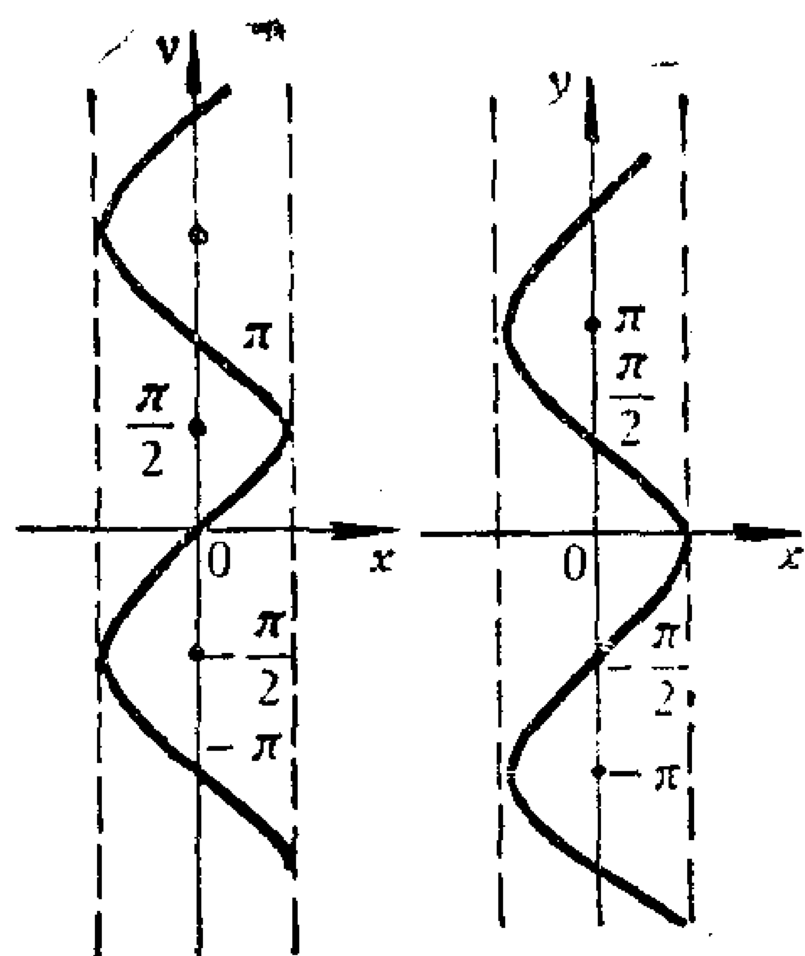


图 63

的反函数記作为

$$\sin^{-1}x,\quad \cos^{-1}x,\quad \mathrm{tg}^{-1}x,\quad \mathrm{ctg}^{-1}x,\quad \sec^{-1}x,\quad \csc^{-1}x.$$

或称 $\arcsin x$ 等等.

我們仅解释一下函数 $\sin^{-1}x$（图 63）. 它的图形在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 之間,給与 x 一个值, y 有无穷多个値,因而是一个多值函数. 当我們画出了 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的部分,其他部分就显然可以得出了.

以下把 $\cos^{-1}x$（图 63）, $\mathrm{tg}^{-1}x$, $\mathrm{ctg}^{-1}x$（图 64）, $\sec^{-1}x$, $\csc^{-1}x$（图 65）的图画出.

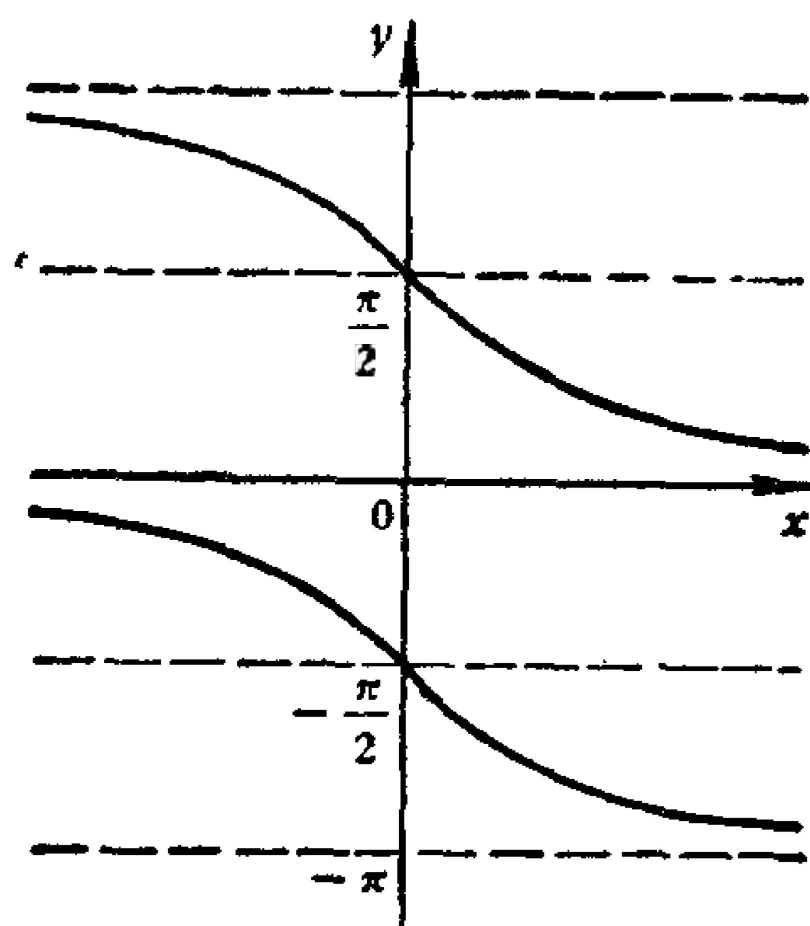


图 64(1)

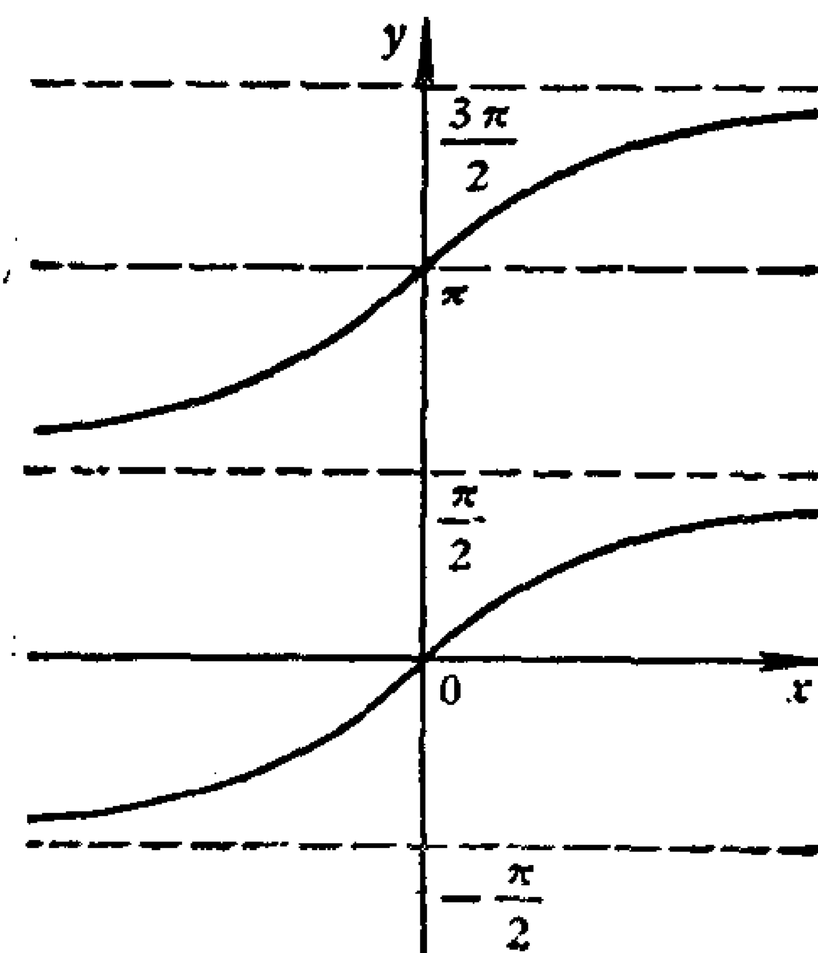


图 64(2)

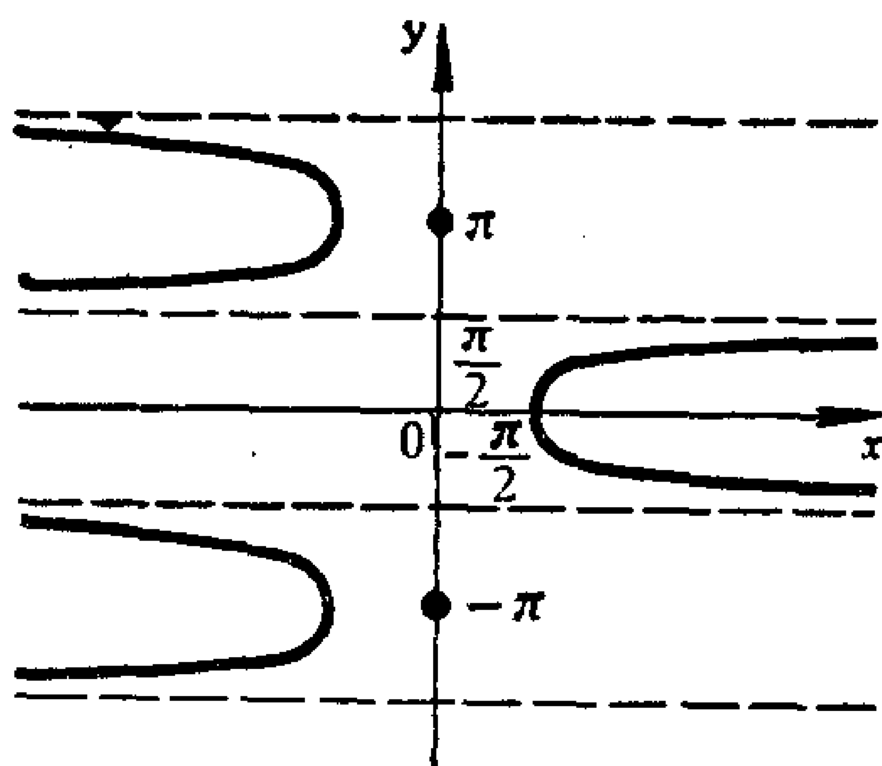


图 65(1)

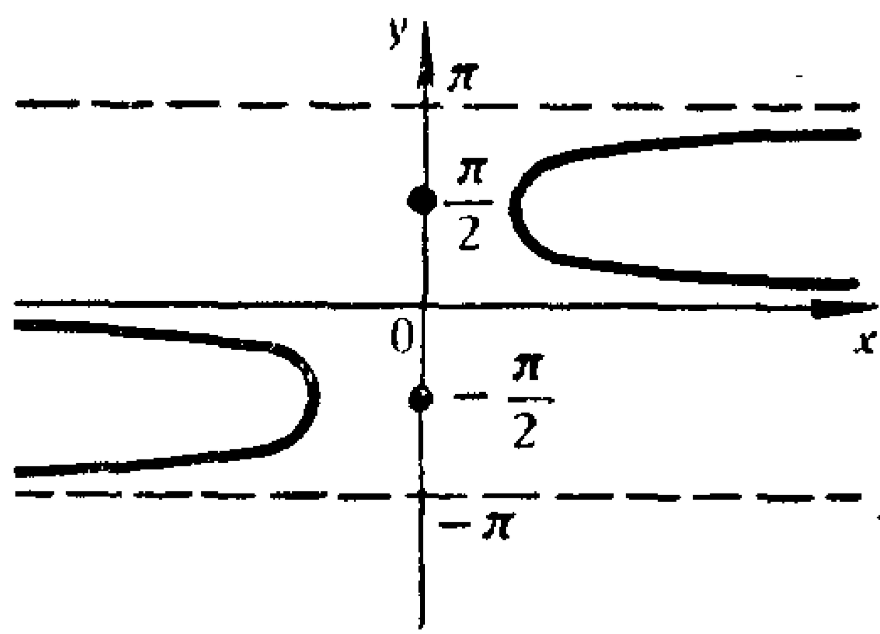


图 65(2)

§6. 函数的一些簡单特性

在以上所研究的函数中,已經可以看到函数的一些簡单特性.

奇函数 $y=f(x)$ 是适合于 $f(-x)=-f(x)$ 的函数．也就是說，画出图来是关于中心对称的．

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\operatorname{tg} x$ 等等．

偶函数 $y=f(x)$ 是适合于 $f(-x)=f(x)$ 的函数．也就是說，画出图来是关于 y 軸对称的．

例如，$y=x^2$，$y=\cos x$ 等．

不难証明，一多項式是奇函数的条件是它的每一項的次数都是奇数，而为偶函数的条件是它的每一項的次数都是偶数．

除 0 以外，沒有旣是奇又是偶的函数存在．

又任一函数 $f(x)$ 都可以分解成为两部分，一部分是奇的，一部分是偶的．也就是

$$f(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)).$$

增函数．在区間 $[a,b]$ 中，如果当 $x>x'$ 时 $f(x)\geqslant f(x')$ 則称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中为增函数，或称单調增函数．同法定义减函数．单調增、单調減的函数統称为单調函数．

例如，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 內 $\sin x$ 是增函数．但在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 內 $\sin x$ 就变为減函数了．

当 $x>0$ 时 x^2 是增函数，而当 $x<0$ 时 x^2 是減函数．

由增到減可能出現峯頂称为极大值．由減到增可以出現谷底称为极小值．

連續性与間断性． 由 $y=\sin x$，$y=x^2$ 等图形上可以看出一个性質，就是就图形来說它是一条不断头的連續曲綫．在 $y=\operatorname{tg} x$ 中就有另一特性出現，在 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之間是連續的，但是在 $x=\frac{\pi}{2}$ 这一点，这曲綫变为无穷．但这函数在 $\frac{\pi}{2}$ 的左边愈近于 $\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{tg} x$ 的值愈大；而在 $\frac{\pi}{2}$ 的右边愈近于 $\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{tg} x$ 的值愈小．这一現象是間断点的一种．現在再举几个間断性的例子．

例 1．命 $[x]$ 表 x 的整数部分或最大的整数 $\leqslant x$ 者．这函数在所有的整数点是間断的，在其他点是連續的(图 66)．

例 2．函数

$$x-[x]-\frac{1}{2}$$

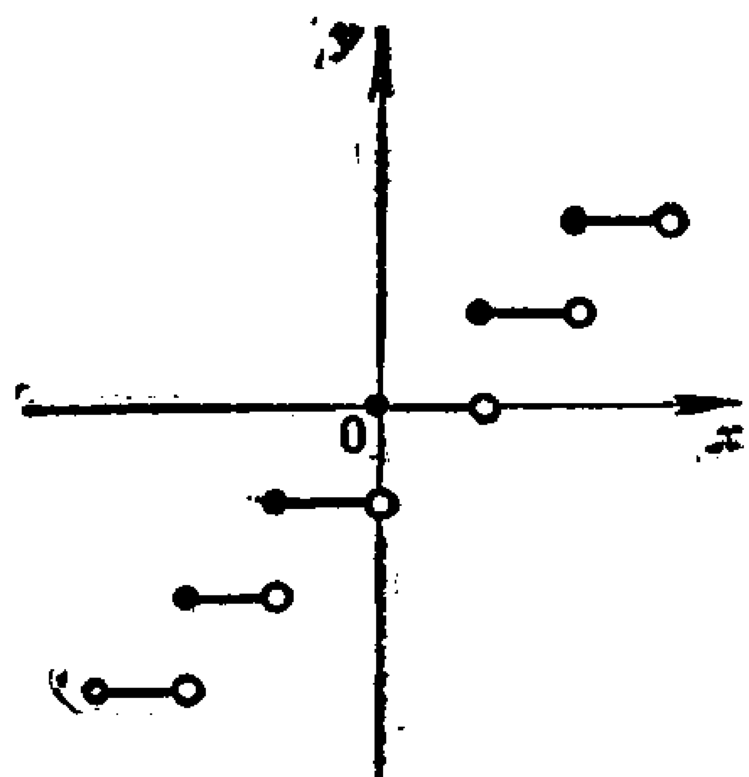


图 66

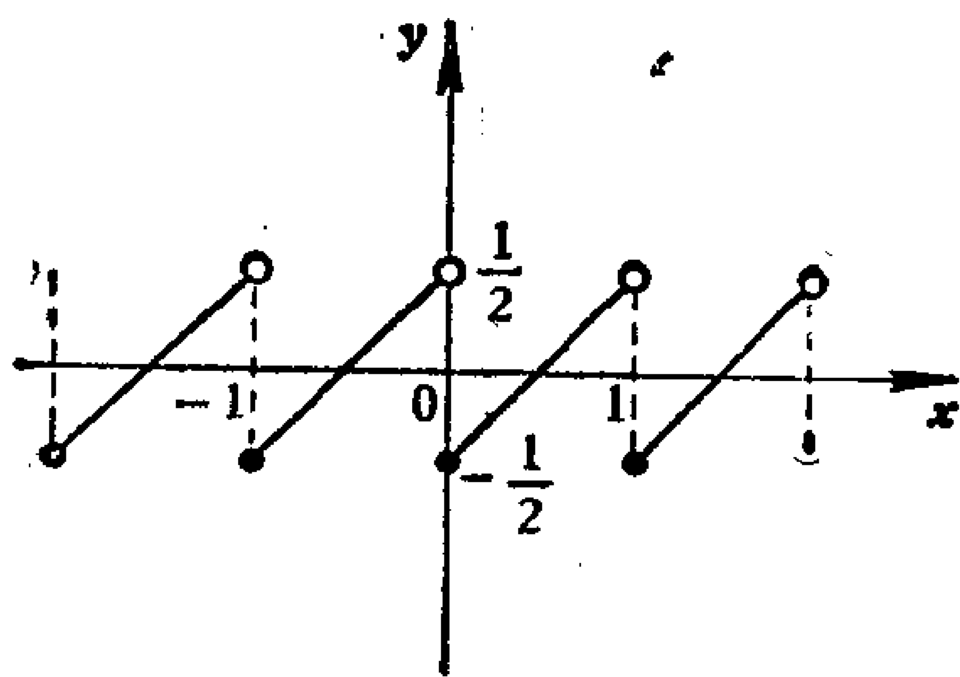


图 67

是一个在整数点不連續的函数，并且以 1 为周期. 它还是奇函数(图 67).

§7. 周期函数

上节所討論的三角函数都满足下述性質:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2\pi)=\cos x,\quad \operatorname{tg}(x+2\pi)=\operatorname{tg} x.$$

这样的函数称为以 2π 为周期的函数. 更一般些，有以下的

定义. 如果有一实数 $\omega\neq 0$，使对任意 x 常有

$$f(x+\omega)=f(x),$$

则 $f(x)$ 称为以 ω 为周期的函数.

不难看出，如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是以 ω 为周期的函数，則它們的和、差、积、商(除去分母为 0 的諸点外)仍然是以 ω 为周期的函数.

定理 1. 多項式不能是周期函数.

証. 一次式 $ax+b$ $(a\neq 0)$ 不是周期函数. 如属不然，它有一周期 $\omega(\neq 0)$，则

$$a(x+\omega)+b=ax+b.$$

这是不可能的.

現在对多項式的次数行归納法. 如果 $f(x)$ 是 n 次多項式，而且以 ω 为周期，则

$$f(x+\omega)-f(x)$$

是一个 $(n-1)$ 次的多項式，它仍以 ω 为周期. 这是不可能的、所以定理眞确.

一个函数是否能有两个周期，換言之，能否有两个实数 ω 与 ω'，使

$$f(x+\omega)=f(x),\quad f(x+\omega')=f(x). \tag{1}$$

我們現在分两种情况来討論:

1) ω/ω' 是有理数 p/q. 假定 p/q 是既約分数. 已知有二整数 r, t 使

$$pr-qt=1.$$

命 $\tau=\omega/p=\omega'/q$. 由(1)推得

$$f(x+r\omega-t\omega')=f(x),$$

而

$$r\omega-t\omega'=\left(\frac{pr}{q}-t\right)\omega'=\frac{\omega'}{q}=\tau,$$

即 $f(x)$ 以 τ 为周期. 如果 $f(x)$ 以 τ 为周期，则

$$f(x+\omega)=f(x+p\tau)=f(x),\quad f(x+\omega')=f(x+q\tau)=f(x),$$

自然而然地 $f(x)$ 以 ω, ω' 为周期了.

2) ω/ω' 是无理数. 由第一章 §13 可知，有二整数 p, q 使

$$\left|\frac{\omega}{\omega'}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2},$$

即

$$\left|\frac{q\omega-p\omega'}{\omega'}\right|<\frac{1}{q}.$$

所以给了任意小的 $\varepsilon(>0)$，我們常能找到 q 与 p 使

$$|q\omega - p\omega'| < \varepsilon,$$

而 $\tau = q\omega - p\omega'$ 也为一周期. 換言之，如果 $f(x)$ 有比例为无理数的二个周期，则它有任意小的周期.

例如，定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 是有理数}, \\ 1, & \text{如果 } x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

这个函数以任意的有理数为周期.

§8. 复变数函数表示举例

命 $z = x + iy$, $w = u + iv$，現在討論

$$w = f(z),$$

式中的 z 是平面 (x, y) 上的一点. 我們不可能在一个平面上来表达这一关系. 但是我們可以用两个平面上的相互关系来表达这一函数. 例如，在 (x, y) 平面上画平行于 x 軸，y 軸的直綫时，(u, v) 平面上对应的图形怎样，或者在 (u, v) 平面上画平行于 u 軸，v 軸的直綫时，(x, y) 平面上对应的是怎样的曲綫. 我們并不准备深入討論这一問題，仅举一个簡单的例子:

命 $w = z^2$，即得

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

当 $x = x_0$ 固定时，

$$u = x_0^2 - \left(\frac{v}{2x_0}\right)^2$$

是一抛物綫，即当在 (x, y) 平面上画綫 $x = x_0$ 时，在 (u, v) 平面上得出一条抛物綫. 而当画直綫 $y = y_0$ 时，(u, v) 平面上画抛物綫 $u = \left(\frac{v}{2y_0}\right)^2 - y_0^2$.

又当 $u = u_0$ 时，(x, y) 平面上画双曲綫 $x^2 - y^2 = u_0$，而当 $v = v_0$ 时，则 (x, y) 平面上画双曲綫 $xy = \frac{v_0}{2}$.

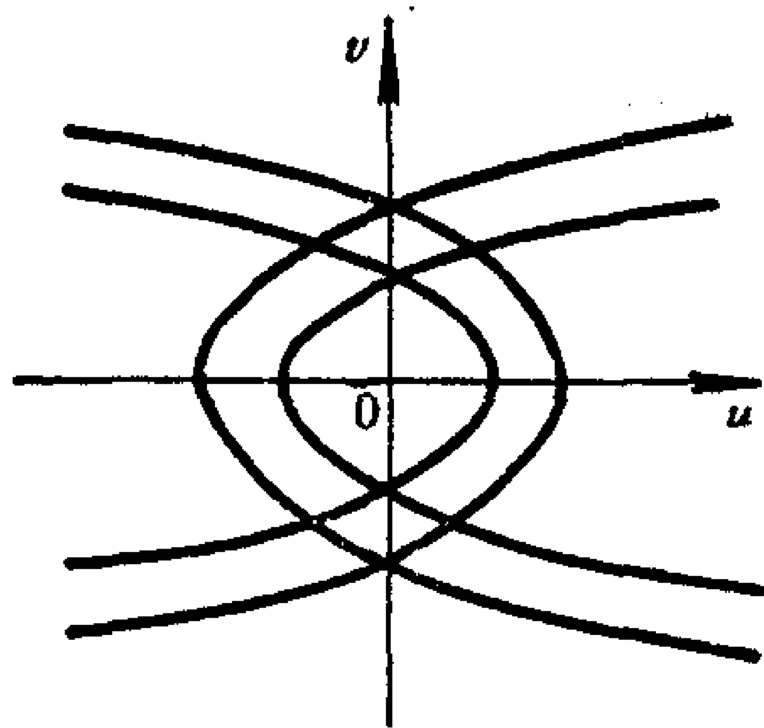


图 68

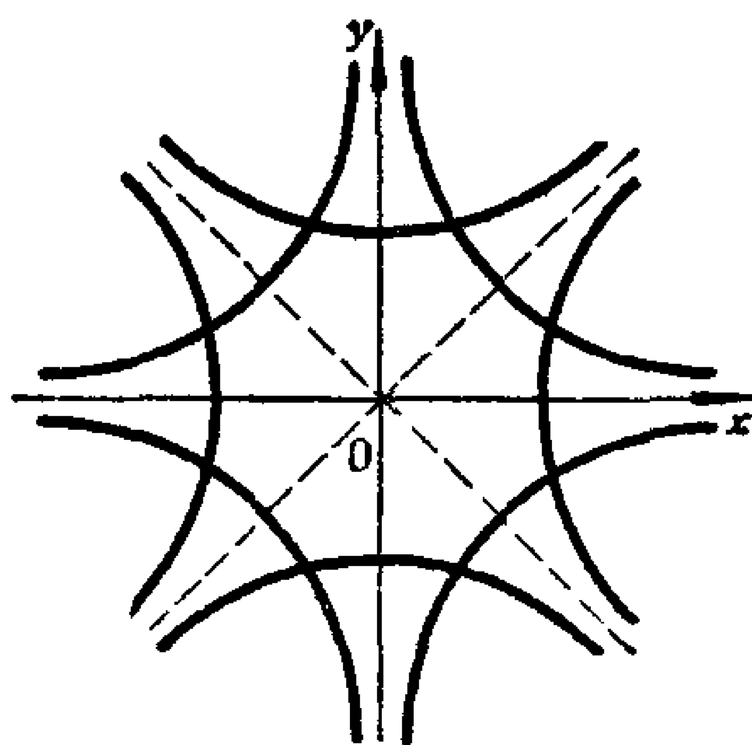


图 69

§9. 迴归直綫

自变量与因变量間最簡单的关系为綫性关系，即表示自变量与因变量成比例的性質. 由試驗的記录，在图紙上得到一系列的点；为了研究一个綫性的函数关系，我們希望得到一个近似的經驗公式，就要作一条直綫. 若沒有一条直綫过全部作出的点，則只好作一条直綫，使在它两側的点都离它充分近. 但什么叫做充分近？得有个标准才合适！

对于不很精确的研究，往往采用"紧繩"法，就是用一条繩子拉直了試着比，使两边的点的数目相等. 作好直綫之后，再直接量一量，就可确定它的方程：

$$y = ax + b.$$

这就是經驗公式，

例如，給出数据

x	0.212	0.451	0.530	0.708	0.901	1.120	1.341	1.520	1.738	1.871
y	3.721	3.779	3.870	3.910	4.009	4.089	4.150	4.201	4.269	4.350

得到經驗公式

$$y \approx 0.375x + 3.65 \text{（≈ 表示近似相等）}.$$

下面我們来介紹統計学中常用的迴归直綫.

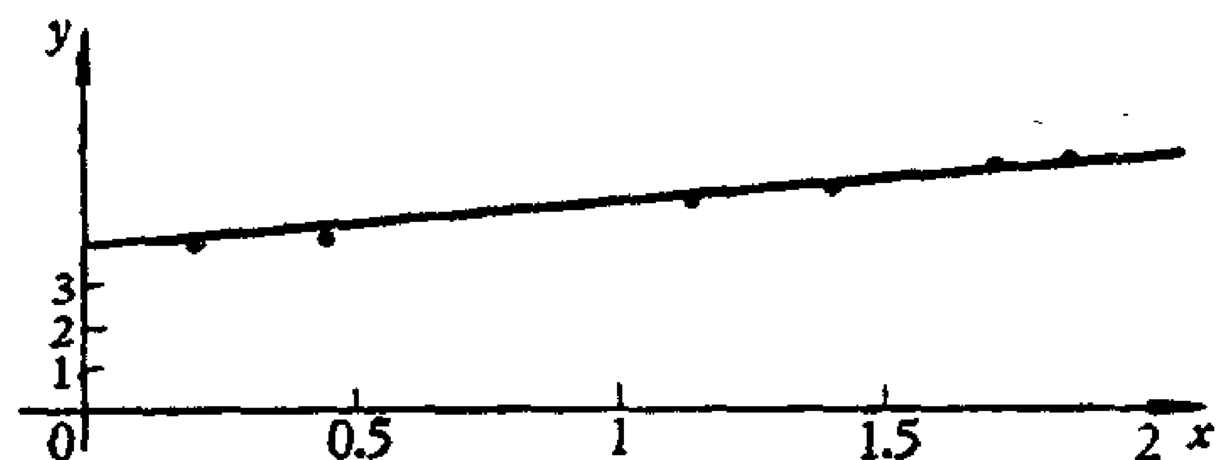


图 70

从实驗中得到自变量 x 与因变量 y 的一組数据：

$$x: \quad x_1, x_2, \cdots, x_n,$$
$$y: \quad y_1, y_2, \cdots, y_n,$$

求直綫

$$y = a + bx,$$

使均方差

$$Q(a, b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

达到最小.

将 $Q(a, b)$ 展开，并凑平方，得

$$Q = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + b^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + na^2 - 2b\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + 2ab\sum_{i=1}^{n} x_i - 2a\sum_{i=1}^{n} y_i\right] =$$
$$= \left(a + \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)b^2 +$$
$$+ \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right) - \frac{2b}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} y_i\right) =$$
$$= (a + b\bar{x} - \bar{y})^2 + \sigma_x^2 b^2 + \sigma_y^2 - 2b\sigma_{xy} = (a + b\bar{x} - \bar{y})^2 +$$
$$+ \sigma_x^2\left(b - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\right)^2 + \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2},$$

此处

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}},$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}},$$

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}).$$

因此当

$$b=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2};\quad a=\bar{y}-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}$$

时，$Q(a,b)$ 最小,我們称直綫

$$y=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x+\bar{y}-\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x}$$

为**迴归直綫**,或改写为

$$y-\bar{y}=r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x}),$$

此处

$$r_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

下面我們来求直綫,使各点至該直綫的垂距的平方和最小.

定理 1. 命 A 与 B 表实数. 对于所有的实数 θ 常有

$$-\sqrt{A^2+B^2}\leqslant A\cos\theta+B\sin\theta\leqslant\sqrt{A^2+B^2},$$

命

$$\cos\psi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\psi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

仅当 $\theta=\psi$ 时,右边的等号才有可能;仅当 $\theta=\psi+\pi$ 时,左边的等号才有可能.

証. 由

$$\frac{A\cos\theta+B\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sin\theta=\cos(\psi-\theta)$$

即得定理 1.

定理 2. 命 A, B, C 表实数,对所有的实数 θ 常有

$$\frac{A+C}{2}-\sqrt{B^2+\left(\frac{A-C}{2}\right)^2}\leqslant A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A+C}{2}+\sqrt{B^2+\left(\frac{A-C}{2}\right)^2}.$$

命

$$\cos\tau=\frac{A-C}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}},\quad \sin\tau=\frac{2B}{\sqrt{4B^2+(A-C)^2}}\tag{1}$$

甲

乙

仅当 $2\theta=\tau$ 时,右边的等号才有可能，且仅当 $2\theta=\tau+\pi$ 时，左边的等号才有可能.必須注意，$B=0$，$A=C$ 的情况必須除外,該时对任一 θ 皆取极值.

證．我們有

$$
\begin{aligned}
& A\cos^2\theta+2B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta= \\
&=\frac{A+C}{2}+2B\sin\theta\cos\theta+\frac{A-C}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)= \\
&=\frac{A+C}{2}+B\sin 2\theta+\frac{A-C}{2}\cos 2\theta.
\end{aligned}
$$

由定理 1 可以推得本定理.

給定 n 个点:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n),$$

求这样的直綫,使这些点到这直綫的距离的平方和最小.

命所求的直綫的方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0.$$

点 (x_i, y_i)和这直綫的距离等于

$$x_i\cos\theta+y_i\sin\theta-p.$$

所以諸距离的平方和等于

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}(x_i\cos\theta+y_i\sin\theta-p)^2 \\
&=np^2-2p\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cos\theta+\sum_{i=1}^{n}y_i\sin\theta\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\cos^2\theta+ \\
&\quad+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\cos\theta\sin\theta+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\sin^2\theta= \\
&=n\left(p-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cos\theta-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\sin\theta\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)\cos^2\theta+ \\
&\qquad+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\cos\theta\sin\theta+ \\
&\qquad+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2\right)\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

由定理 2 可知,上式最后三項的和的最小值是

$$\frac{A+C}{2}-\sqrt{B^2+\left(\frac{A-C}{2}\right)^2},$$

此处

$$
\begin{aligned}
A&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2, \\
B&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{n}\sum_{i<j}(x_i-x_j)(y_i-y_j), \qquad (2) \\
C&=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2,
\end{aligned}
$$

于是取
$$2\theta = \tau + \pi, \tag{3}$$
及
$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cos\theta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sin\theta, \tag{4}$$
便使前式达到最小值.

定理 3. 我們給了 n 点 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$. 依公式(2)作出 A, B, C, 再依公式(1),(3)及(4)定出 θ 及 p_0,則直綫
$$x\cos\theta + y\sin\theta = p$$
有这样的性質: n 点到这直綫的距离的平方和最小.

这直綫的方程式也就是
$$\frac{y - \frac{1}{n}\Sigma y_i}{x - \frac{1}{n}\Sigma x_i} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1-\cos\tau}{\sin\tau} = \frac{-A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2B}.$$

我們用 $\sigma(\xi)$ 表
$$\sigma(\xi) = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n},$$
則直綫方程变为
$$\frac{y - \sigma(y)}{x - \sigma(x)} = \frac{-\alpha + \gamma + \sqrt{(\alpha-\gamma)^2 + 4\beta^2}}{2\beta},$$
此处
$$\alpha = \sigma(x^2) - (\sigma(x))^2,$$
$$\beta = \sigma(xy) - \sigma(x)\sigma(y),$$
$$\gamma = \sigma(y^2) - (\sigma(y))^2.$$

但必須指出,当 $B = 0$ 而 $A \neq C$ 时,我們所求的直綫就是
$$x = \sigma(x).$$
又如果 $B = 0$, $A = C$, 則任意一条通过 $(\sigma(x), \sigma(y))$ 的直綫都有同样的性質(例如取四点 $(0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)$).

§ 10. Lagrange 插入公式

上节已經說明过,我們用直綫
$$y = ax + b$$
来做出經驗公式. 这种方法无疑地在很多情况下不能符合客观情况. 我們有时用多項式
$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$
来接近客观的曲綫.

如果知道了 $y = f(x)$ 的 $n+1$ 个数值:
$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \cdots,\ y_n = f(x_n), \tag{2}$$

我們可以定出一条形状如(1)的曲綫經过这 $n+1$ 点．我們知道，这样的多項式只可能有一个，因为如果另一个次数不超过 n 的多項式也满足同样的要求，那么二者之差在 $n+1$ 点上等于 0，而其次数不超过 n，故其系数非全为 0 不可．也就是說，并不是“另一个”．

这个曲綫的导出方法如下：先求一条曲綫使

$$1 = l(x_0),\ 0 = l(x_1),\ \cdots,\ 0 = l(x_n).$$

这多項式 $l(x)$ 以 $x_1, \cdots, x_n$ 为根，所以

$$l(x) = A(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

再以 $x=x_0$ 代入，立得

$$l(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}.$$

由此可知

$$L(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots + f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

就是通过(2)中 $n+1$ 点的 n 次曲綫．这个公式称为 Lagrange 公式．

如取等分点时，公式还可以化簡：

$$x_1 = x_0+d,\ x_2 = x_0+2d,\ \cdots,\ x_n = x_0+nd,$$

則

$$L(x) = \frac{P(x)}{n!d^n}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{\nu}{n}\frac{f(x_\nu)}{x-x_\nu},$$

此处 $P(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

关于实际求出 $L(x)$ 在 x 点的数值，我們运用如下的表格：

$$\begin{array}{lllll}
x_0-x & y_0 & & & \\
x_1-x & y_1 & (y_0, y_1) & & \\
x_2-x & y_2 & (y_0, y_2) & (y_0, y_1, y_2) & \\
\cdots & & & & \\
x_n-x & y_n & (y_0, y_n) & (y_0, y_1, y_n)\cdots & (y_0, y_1, \cdots, y_n).
\end{array}$$

具体的算法是一列一列地进行．第一、二列显然不必加以說明，第三列由公式

$$(y_0, y_k) = \frac{(x_0-x)y_k - (x_k-x)y_0}{(x_0-x)-(x_k-x)} \tag{1}$$

算出．这就是在过 (x_0, y_0) 与 (x_k, y_k) 的直綫上与 x 对应的 y 的数值．第四列由公式

$$(y_0, y_1, y_k) = \frac{(x_1-x)(y_0, y_k)-(x_k-x)(y_0, y_1)}{(x_1-x)-(x_k-x)} \tag{2}$$

算出．第五列与第四列的关系如第四列与第三列的关系，最后得出

$$L(x) = (y_0, y_1, \cdots, y_n).$$

要証明这点是不难的，用归納法．首先有

$$(y_0, y_k)_{x=x_0} = y_0,\quad (y_0, y_k)_{x=x_k} = y_k.$$

再由

$$(y_0, y_1, \cdots, y_l, y_k) = \frac{(x_l - x)(y_0, \cdots, y_{l-1}, y_k) - (x_k - x)(y_0, \cdots, y_l)}{(x_l - x) - (x_k - x)}$$

显然有

$$(y_0, y_1, \cdots, y_l, y_k)_{x=x_l} = (y_0, \cdots, y_l)_{x=x_l} = y_l$$

及

$$(y_0, y_1, \cdots, y_l, y_k)_{x=x_k} = (y_1, \cdots, y_{l-1}, y_k)_{x=x_k} = y_k.$$

又当 $m < l$ 时

$$(y_0, y_1, \cdots, y_l, y_k)_{x=x_m} = \frac{(x_l - x_m)y_m - (x_k - x_m)y_m}{(x_l - x_m) - (x_k - x_m)} = y_m.$$

由此立得

$$(y_0, y_1, \cdots, y_n)_{x=x_m} = y_m, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

由于 $(y_0, y_1, \cdots, y_n)$ 是 x 的 n 次多项式,故可知

$$(y_0, y_1, \cdots, y_n) = L(x).$$

例如,已知 0°, 30°, 45°, 60°, 90° 的正弦函数值,求 sin 50°. 其表格是

−50	0.00000				
−20	0.50000	0.83333			
−5	0.70711	0.78568	0.76980		
10	0.86603	0.72169	0.75890	6617	
40	1.00000	0.55556	0.74074	6657	04.

注意,如果有一列,其前几位数字都相同,这几位数字就不必再入算,因为后一列也一定有这几位数字(为什么?). 因此上表的第四列都有 0.7,因而第五列不再列入这几位数字,但理解为仍有 0.7 在前面. 第五列都有 66,第六列不再列这两数字,但理解为仍有 0.766 在前. 第六列的算法是

$$\frac{10 \times 57 - 40 \times 17}{10 - 40} = 04.$$

因而 $\sin 50° = 0.76604.$

§ 11. Newton, Bessel, Stirling 插入公式

我們現在考虑等分点的情况,也就是命

$$h = x_{i+1} - x_i.$$

如此則

$$x_k = x_0 + hk.$$

我們还定义 $k < 0$ 的情况.

以 h 为分距的差分(第一阶)定义为

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x),$$

即得

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

第二阶差分是第一阶差分的差分,即

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + h) - \Delta f(x) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)$$
$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

同样定义高阶差分

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)),$$

$$\Delta^k f(x) = f(x + kh) - kf(x + (k-1)h) + \frac{k(k-1)}{2} f(x + (k-2)h) + \\ + \cdots \pm f(x).$$

(我們可用算符

$$\Delta^k f(x) = (E - 1)^k f(x)$$

来表它，$E^j f(x) = f(x + jh)$.)

由函数值求插入公式，可以通过以下的差分表：

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	
$\cdots$	$\cdots$					
		Δy_{-3}				
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$			
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	$\Delta^4 y_{-4}$	$\to N_{II}$
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$	
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$	$\to S$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\to B$
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\to N_I$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$			
$\cdots$	$\cdots$					

每一列都是第一列的差分(前两列除外). 注意,差分方法的应用并不是愈多算愈好,应当适可而止. 因为如果第一列的誤差不超过 ε,而第二列的誤差只能要求其不超过 2ε. 第三列的誤差只能要求其不超过 $2^2\varepsilon$,而第 m 列的誤差在 $2^{m-1}\varepsilon$ 之內. m 大时, 2^{m-1} 增长很快. 为了保証准确性,差分次数必須适可而止.

命

$$u = (x - x_0)/h.$$

利用差分表,我們常用以下的插入多項式

$$N_I(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{u(u-1)\cdots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$N_{II}(x) = y_0 + u\Delta y_{-1} + \frac{u(u+1)}{2}\Delta^2 y_{-2} + \cdots + \frac{u(u+1)\cdots(u+n-1)}{n!}\Delta^n y_{-n}$$

(Newton 公式),

$$s(x) = y_0 + u\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{u(u^2-1)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \\ + \frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \frac{u^2(u^2-1)\cdots[u^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

(Stirling 公式),

$$B(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\ + \frac{u(u-1)\left(u - \frac{1}{2}\right)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{u(u-1)(u^2-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} +$$

$$+\cdots+\frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)u(u^2-1)\cdots[u^2-(n-1)^2](u-n)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}y_{-n}$$

(Bessel 公式).

讀者試自己找出这些公式与 Lagrange 公式的关系. 上表中的箭头表示这些插入公式与原数据的关系.

例. 函数 $f(x)$ 有下表的数据,現在要求出 $f(22)$.

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0				
		487			
5	4.87		78		
		565		29	
10	10.52		107		2
		672		31	
15	17.24		138		3
		810		34	
20	25.34		172		−7
		982		27	
25	35.16		199		5
		1181		32	
30	46.97		231		1
		1412		33	
35	61.09		264		
		1676			
40	77.85				

取 $x_0=20$, 則 $u=\frac{22-20}{5}=0.4$. 由 Bessel 公式得

$$f(22)=25.34+0.4\times 9.82-\frac{0.4\times 0.6}{2}\frac{1.72+1.99}{2}+$$
$$+\frac{0.4\times 0.6\times 0.1}{6}\times 0.27=29.05.$$

由 Stirling 公式得

$$f(22)=25.34+0.4\frac{8.10+9.82}{2}+\frac{0.16}{2}1.72-$$
$$-\frac{0.4\times 0.84}{6}\frac{0.34+0.27}{2}=29.04,$$

而由 Newton 公式得

$$f(22)=25.34+0.4\times 9.82-\frac{0.4\times 0.6}{2}1.99+\frac{0.4\times 0.6\times 1.6}{6}0.32=29.05.$$

如果我們仅取第二差分,則由 Bessel, Stirling, Newton 公式各得 29.05, 29.06 及 29.03.

§12. 經驗公式

建立一个由經驗得出的函数关系 $y=f(x)$ 的經驗公式可以分为两部分: 首先选择公式的大概形式, 然后再决定参数的数値, 这些参数应該使給定函数的逼近成为最好的(在某种意义下). 以上討論过的迴归直綫就是一个重要的例子. 从实际中来的数据总是有限的. 我們总可以找到一个 Lagrange 多項式在这許多点完全符合. 但这样做仅仅是

把数据机械地变为公式并不可能启发我們了解到自然現象中內在的規律．例如：极簡单的反比規律

$$y=\frac{1}{x}.$$

如果我們在 1 与 2 之間取出很多数据，因而得出了高阶的 Lagrange 多項式，結果可能愈来愈繁，但愈来愈不象这个簡单規律．因此选择合适的曲綫类型，有它的基本重要性．例如，在某区間內有一个最大値的情况，我們可以考虑选取公式 $y=ax^2+bx+c$．

函数的类型一般是在一些簡单的函数中去找寻，方法是把这些曲綫的一般形态与已知的若干图形的形态相比較．但选择合适的变量有时可能更好地解决問題．例如，曲綫

$$y=\frac{x}{a+bx}$$

也等价于

$$\frac{1}{y}=b+\frac{a}{x}.$$

如果我們选取了 $\frac{1}{x}=X$，$\frac{1}{y}=Y$，則 X 与 Y 間的关系就是綫性的了．

更难的选择是观察点的問題，坐标系选择的問題．如果在地球上看木星运动，它的軌道是十分复杂的．但是如果我們选取太阳作为我們的观察站，則木星的运动就是一个椭圓了．

总之，选坐标，选尺度，选綫型，定参数是我們找經驗公式的步驟．至于怎样定参数，下面将具体說明．

下面我們介紹几个簡单的，但很常用的經驗公式，并附有曲綫图．每一图对公式中的不同参数値画出不同的曲綫．

I. $$y=ax^h \ (\text{图 } 71).$$

如果选定了这一曲綫作为定型，我們可以取 $Y=\lg y$，$X=\lg x$，用迴归直綫法定出 a，h．

II. $$y=a\cdot b^x \ (\text{图 } 72).$$

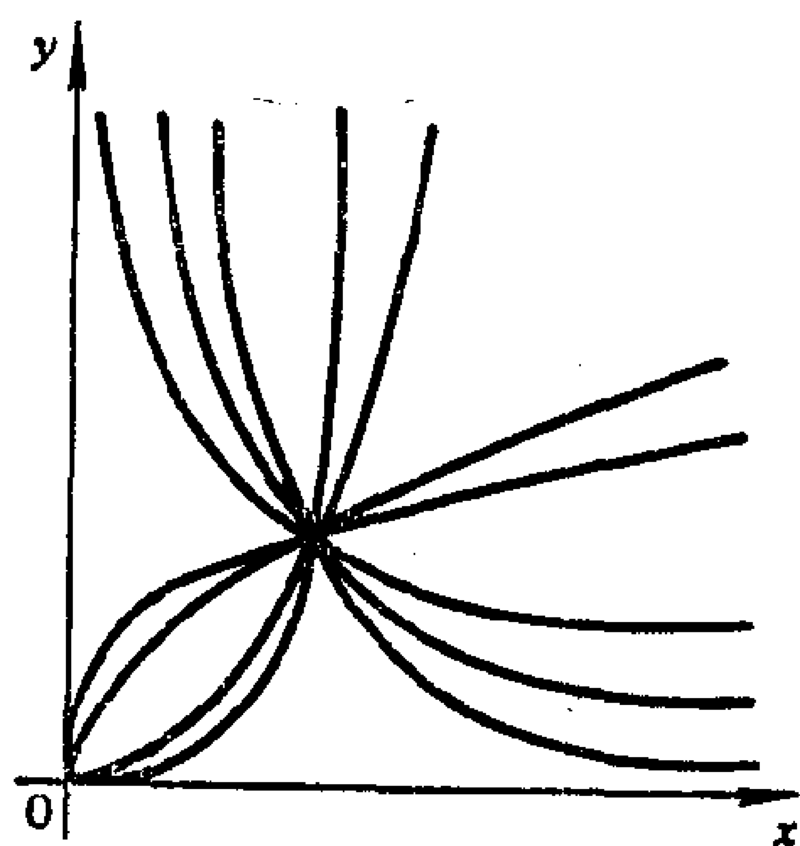


图 71

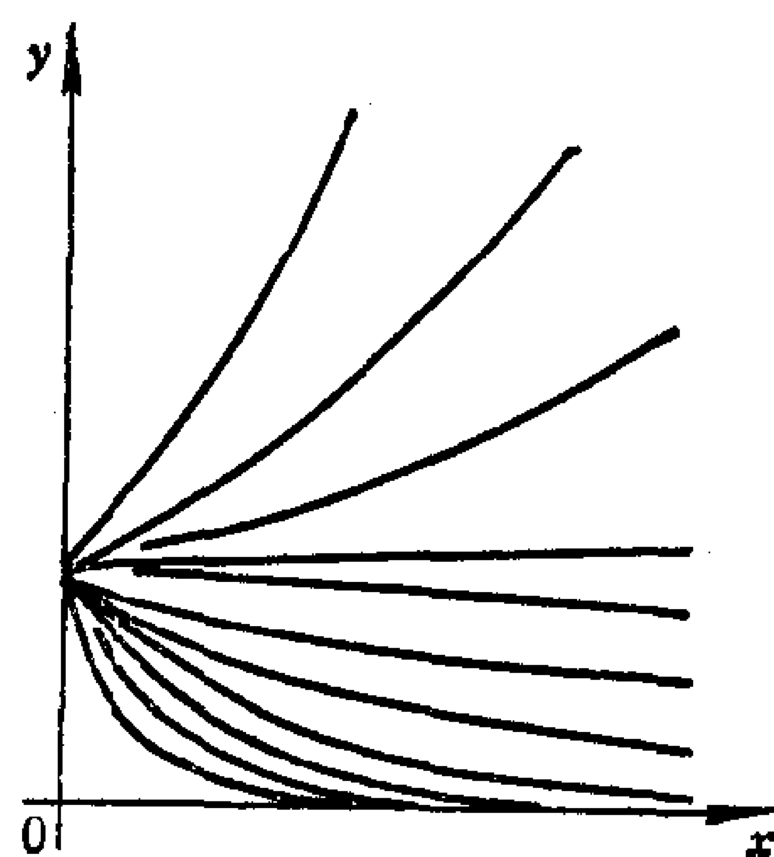


图 72

取 $Y=\lg y$，$X=x$，用迴归直綫法定出 a，b．

III. $$y = ax^b + c \text{ (图 73)}.$$

曲綫和公式 I 相同,但在 y 軸的方向作了移动. 先在給定函数的曲綫上选取三点,設它們的横坐标是 x_1, x_2 及 $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$, 縱坐标是 y_1, y_2 及 y_3, 而命

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}.$$

确定 c 后,再命 $Y = \log(y - c)$, $X = \log x$,而用迴归直綫法确定 a, b.

IV. $$y = a \cdot b^x + c \text{ (图 74)}.$$

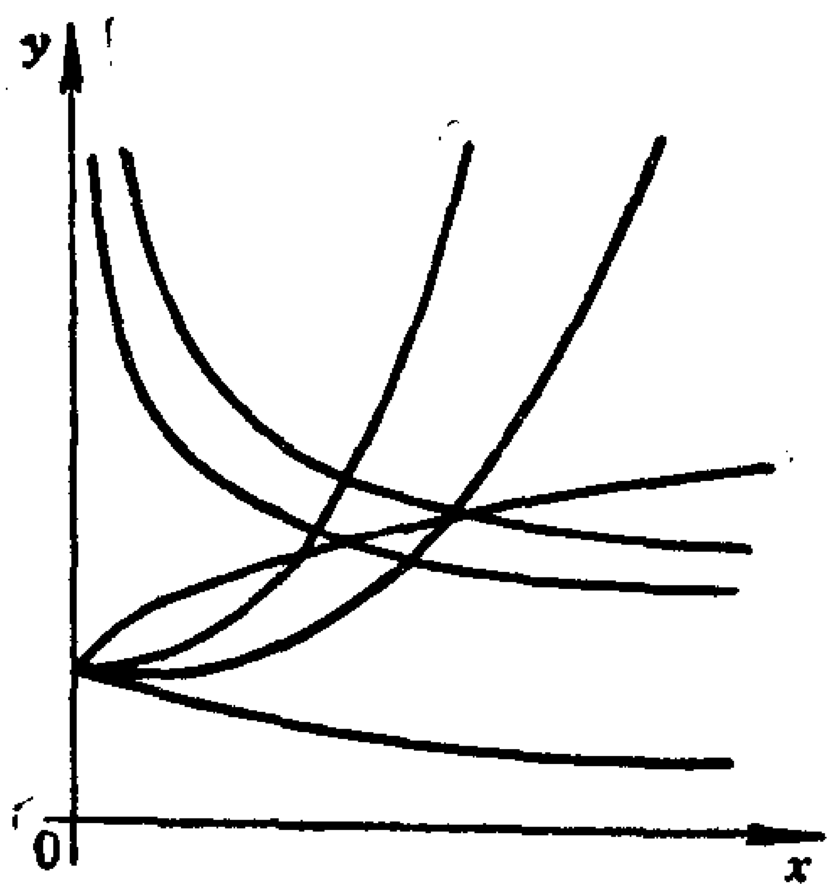


图 73

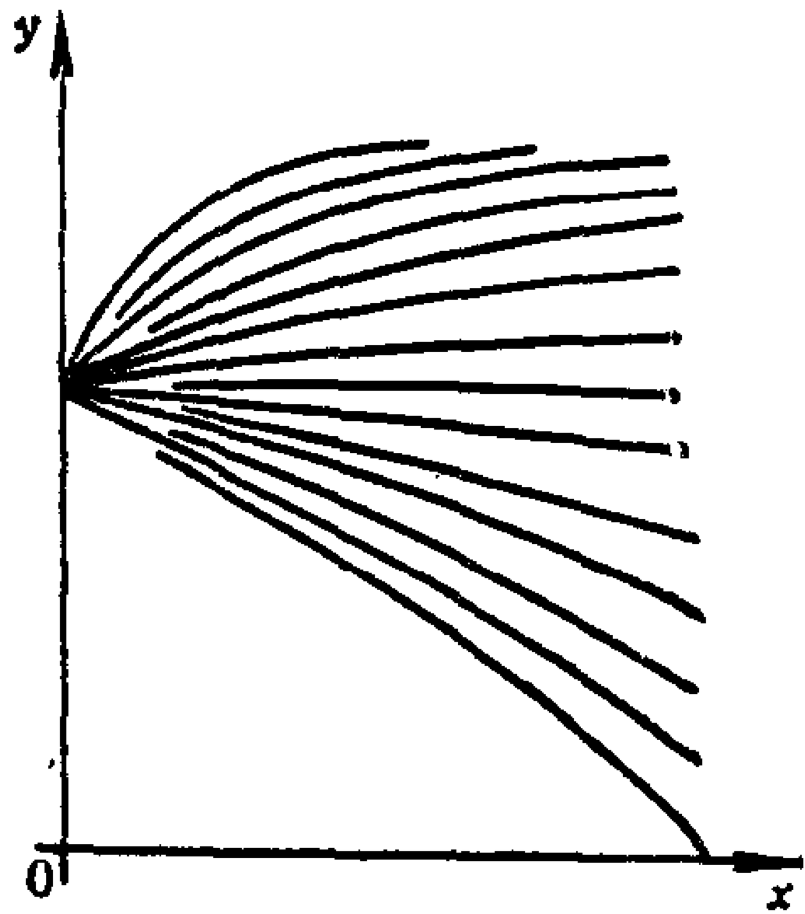


图 74

这曲綫图形和公式 II 的相同,但在 y 軸的方向作了移动. 在給定函数的曲綫上选出三点,設它們的横坐标是 x_1, x_2, 及 $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$,縱坐标是 y_1, y_2 及 y_3, 而命

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}.$$

然后令 $Y = \log(y - c)$, $X = x$,而行迴归直綫法.

V. $$y = ax^2 + bx + c \text{ (图 75)}.$$

在曲綫上任取一点 (x_1, y_1),而命 $Y = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, 則有

$$Y = (b + ax_1) + ax;$$

如果給定的 x 值組成一个有公差等于 h 的等差数貫,則命 $Y = \Delta y$,而有

$$Y = (bh + ah^2) + 2ahx.$$

对这两种情形,都能用迴归直綫法定出 a, b,然后由

$$\Sigma y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x + nc$$

定出 c,此处 n 是給定的 x 值的个数, Σ 是关于 x 或对应的 y 求和.

VI. $$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc \neq 0 \text{ (图 76)}.$$

在曲綫上任取一点 (x_1, y_1),而命 $Y = \frac{x - x_1}{y - y_1}$, 則有

$$Y = A + Bx.$$

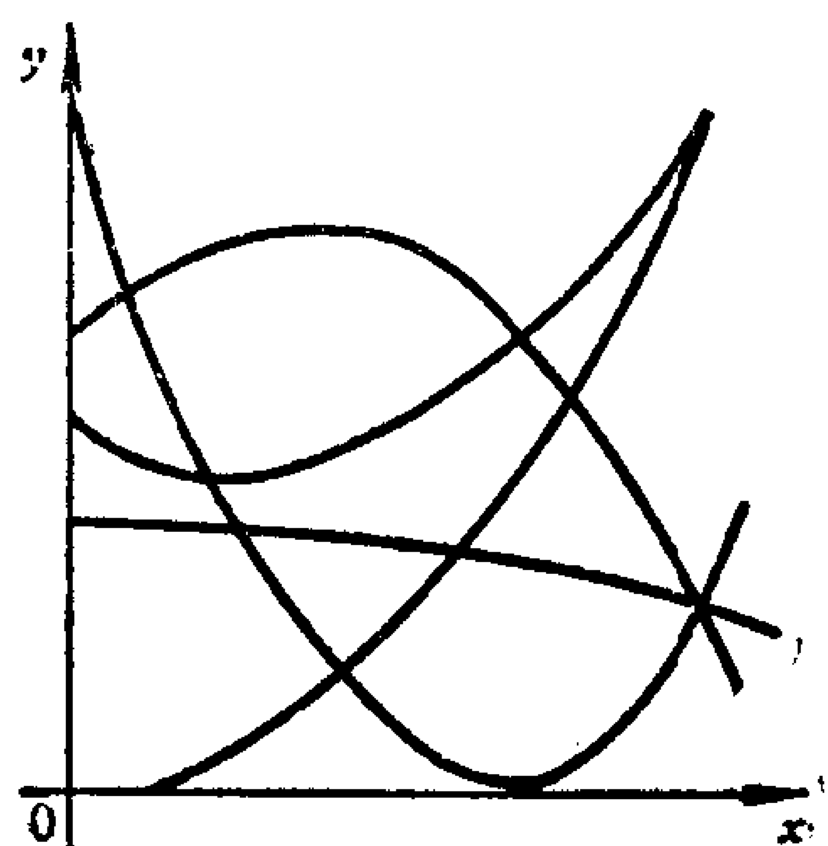


图 75

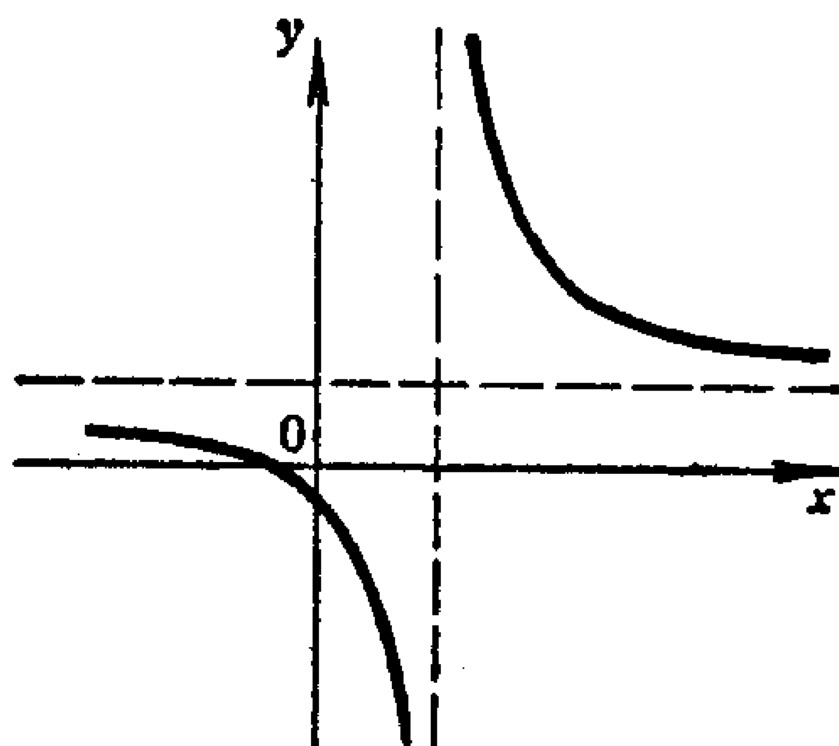


图 76

用迴归直綫法由給定的 x 值与 y 值可以定出 A, B,于是

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + Bx}.$$

VII. $$y^2 = ax^2 + bx + c \text{ (图 77)}.$$

作变换 $Y = y^2$,而化成V的情形.

VIII. $$y = ae^{b+cx+dx^2} \text{ (图 78)}.$$

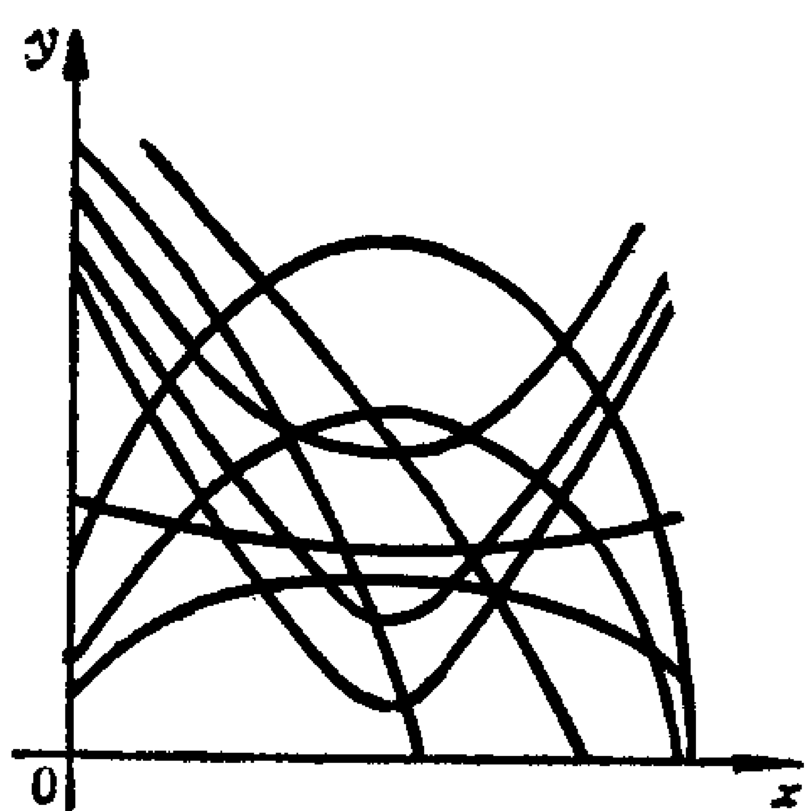


图 77

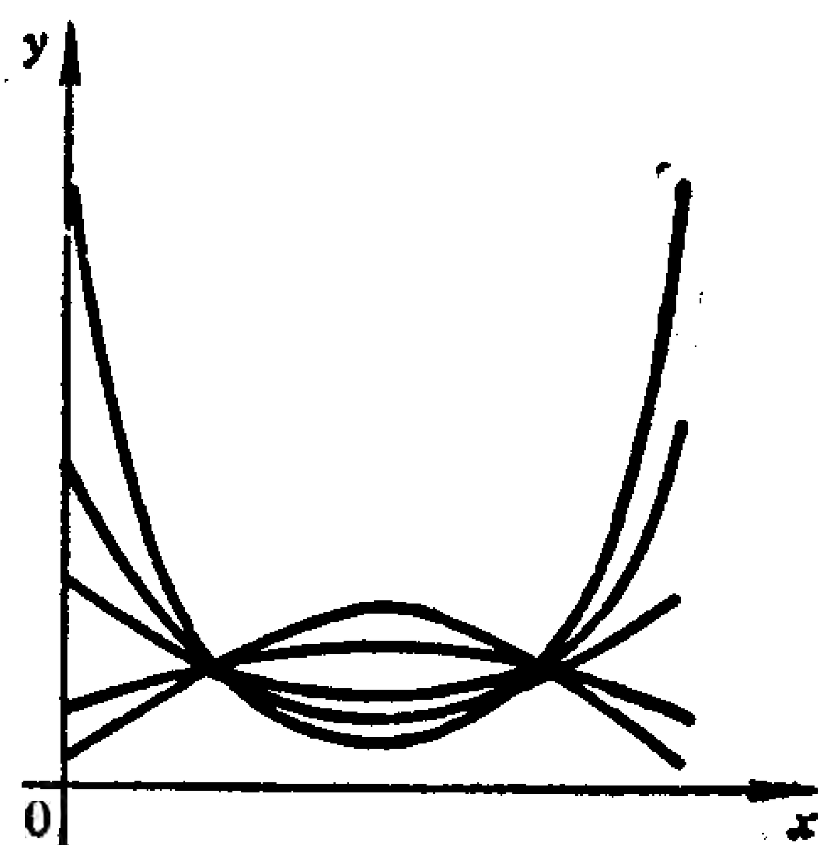


图 78

因为

$$\log y = \log a + b + cx + dx^2,$$

故通过变换 $Y = \log y$,又化成V的情形.

IX. $$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c} \text{ (图 79)}.$$

通过变换 $Y = \frac{1}{y}$ 化成V的情形.

X. $$y = \frac{x}{ax^2 + bx + c} \text{ (图 80)}.$$

通过变换 $Y = \frac{x}{y}$ 化成情形 V.

XI. $$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \text{ (图 81)}.$$

通过变换 $X = \frac{1}{x}$ 又化为 V.

XII. $$y = ax^be^{cx} \text{ (图 82)}.$$

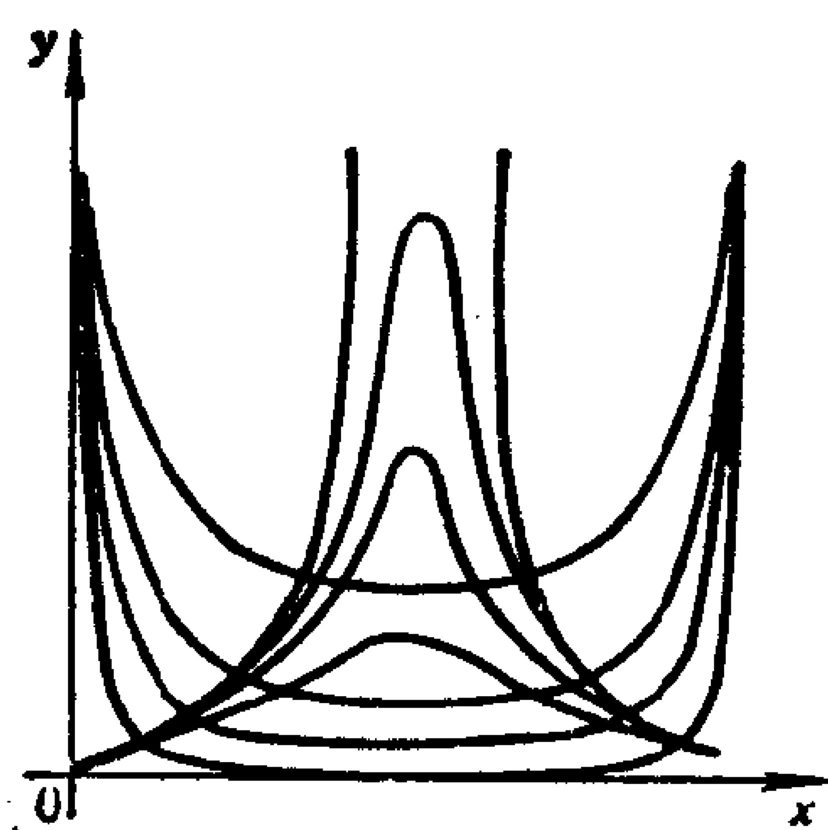


图 79

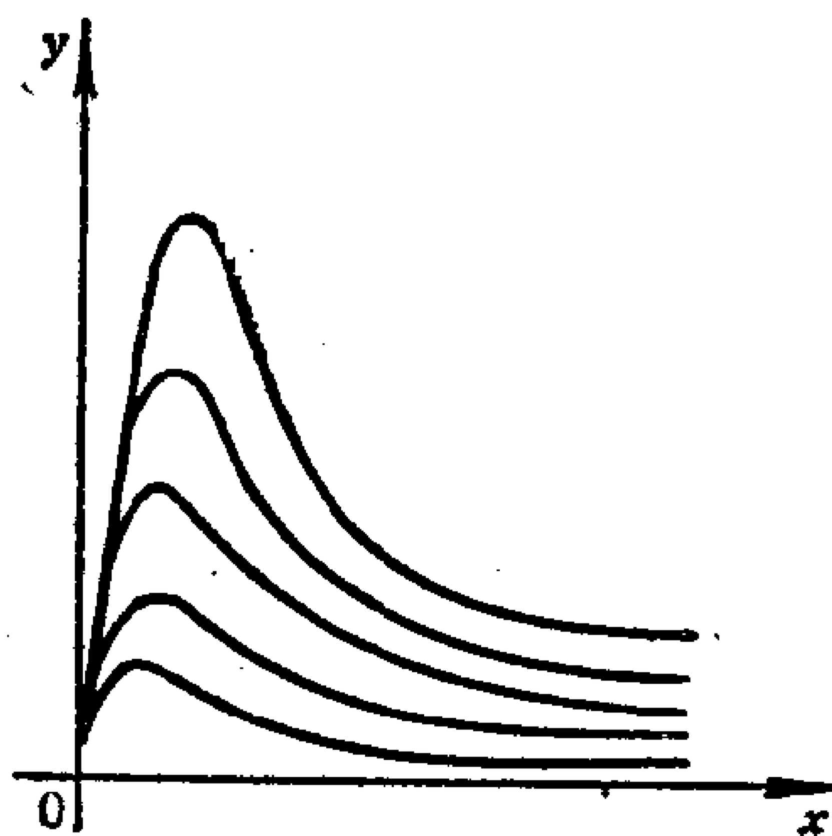


图 80

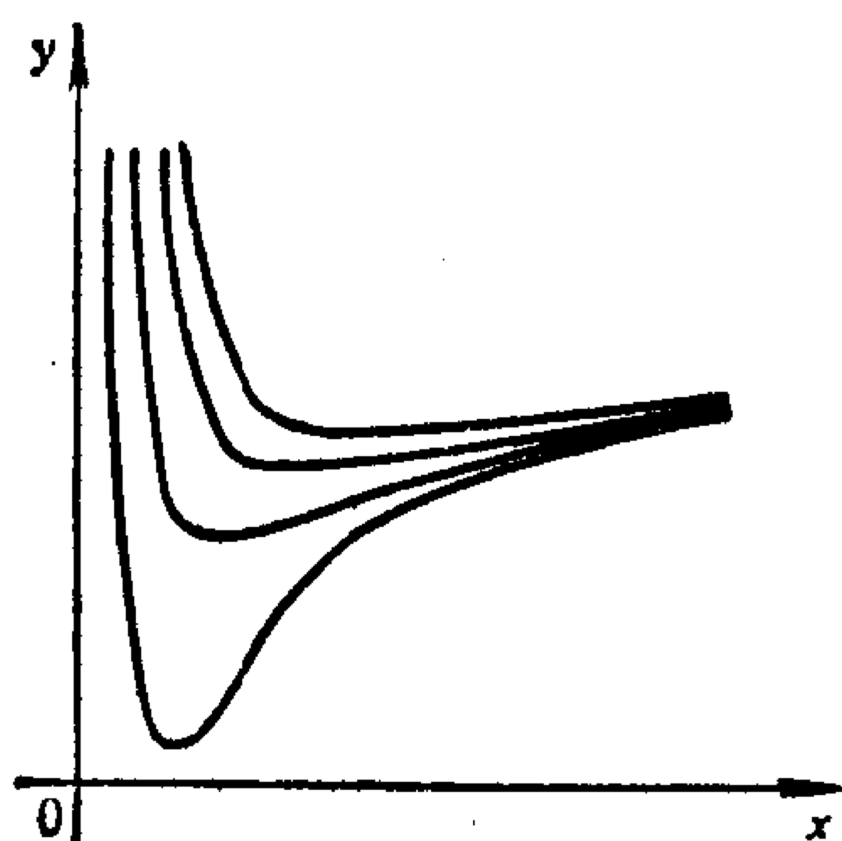


图 81

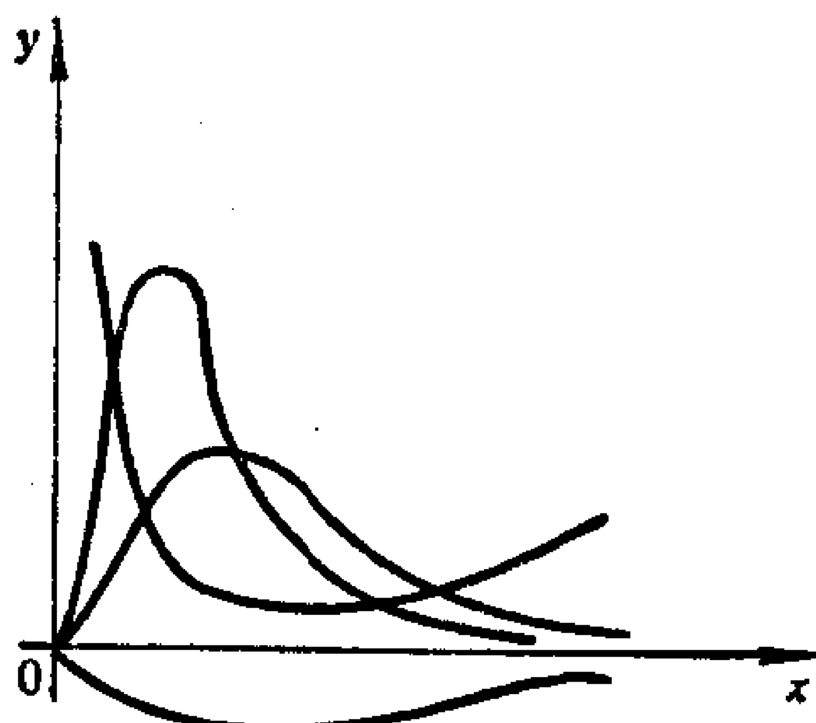


图 82

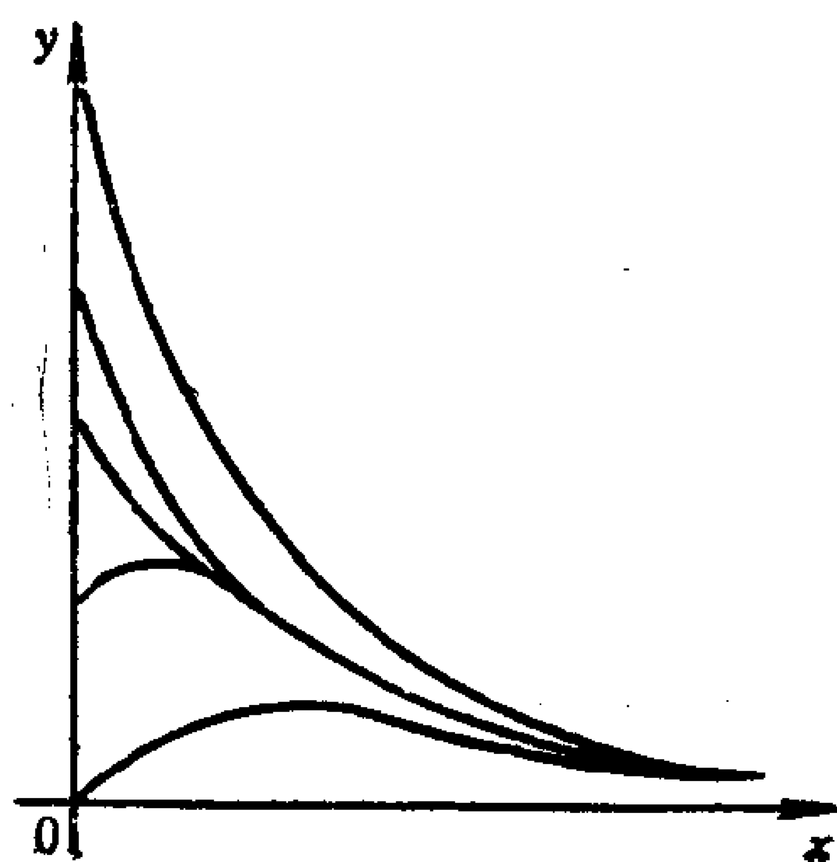


图 83

如果給定的 x 值构成以 h 为公差的等差数貫，則命 $Y = \Delta \log y$, $X = \Delta \log x$，而得

$$Y = ch + bX;$$

如果給定的 x 值构成以 q 为公比的等比数貫，則命 $Y = \Delta_1 \log y$，而得

$$Y = b \log q + c(q-1)x$$

($\Delta_1 \log y$ 是相邻两 $\log y$ 值之差)．对这两种情形，都能通过迴归直綫法定出 b, c。然后由

$$\Sigma \log y = b \Sigma \log x + c \Sigma x + n \log a$$

定出 $\log a$ 及 a 来．

XIII. $$y = ae^{bx} + ce^{dx} \text{（图 83）}.$$

如果 x 值构成以 h 为公差的等差数貫，并且 y, y_1 及 y_2 是三个相継的 y 的数值，命

$$Y = \frac{y_2}{y}, \quad X = \frac{y_1}{y},$$

則得

$$Y = (e^{bh} + e^{dh})X - e^{bh}e^{dh}.$$

由此用迴归直綫法定出 b, d 后，再命 $\xi = e^{(b-d)x}$, $\eta = ye^{-dx}$，而由

$$\eta = a\xi + c$$

定出 a, c.

例．試求 x, y 間的經驗公式，此处 x, y 之值在下表中之首二列給出：

x	y	$\frac{x}{y}$	$\Delta\frac{x}{y}$	$\log_{10} x$	$\log_{10} y$	$\Delta \log_{10} x$	$\Delta \log_{10} y$	$\Delta_1 \log_{10} y$	由經驗公式所得 y 的值
0.1	1.78	0.056	0.007	−1.000	0.250	0.301	0.252	0.252	1.78
0.2	3.18	0.063	0.031	−0.699	0.502	0.176	+0.002	−0.097	3.15
0.3	3.19	0.094	0.063	−0.523	0.504	0.125	−0.099	−0.447	3.16
0.4	2.54	0.157	0.125	−0.398	0.405	0.097	−0.157	−0.803	2.52
0.5	1.77	0.282	0.244	−0.301	0.248	0.079	−0.191	−1.134	1.76
0.6	1.14	0.526	0.488	−0.222	0.057	0.067	−0.218	−1.455	1.14
0.7	0.69	1.014	0.986	−0.155	−0.161	0.058	−0.237	—	0.70
0.8	0.40	2.000	1.913	−0.097	−0.398	0.051	−0.240	—	0.41
0.9	0.23	3.913	3.78	−0.046	−0.638	0.046	−0.248	—	0.23
1.0	0.13	7.69	8.02	0.000	−0.886	0.041	−0.269	—	0.13
1.1	0.07	15.71	14.29	0.041	−1.155	0.038	−0.243	—	0.07
1.2	0.04	30.0	—	0.079	−1.398	—	—	—	0.04

在画出曲綫(图 84)后,发現它与公式X及 XII 的图形相似. 对于公式 X,我們采用修正变量 $\Delta\frac{x}{y}$ 及 x,由表易見,x 和 $\Delta\frac{x}{y}$ 間的关系跟綫性关系偏差很大. 又对公式 XII,我們作出 $\Delta\log_{10} x$ 及 $\Delta\log_{10} y$ 間的函数关系的曲綫图($h=0.1$, 图 85) 并作 $\Delta_1\log_{10} y$ 与 x 間的函数关系的曲綫图 ($q=2$, 图 86).

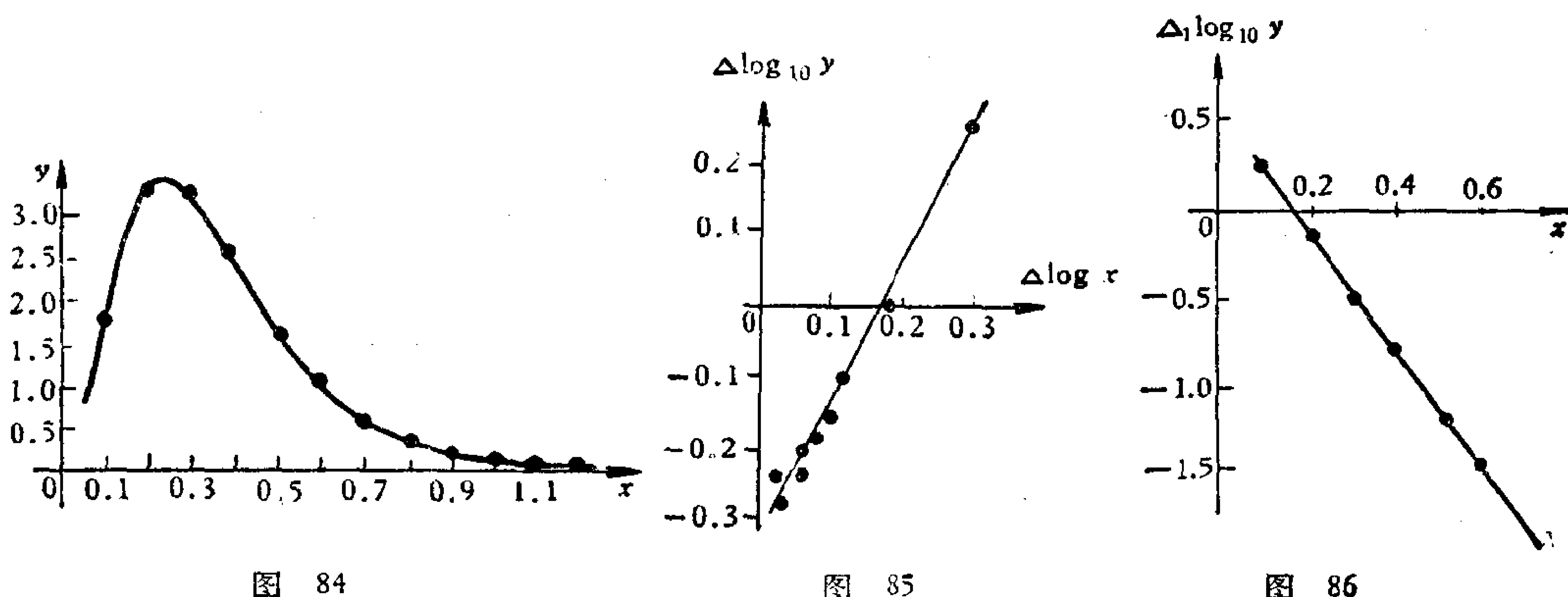


图 84　　　　图 85　　　　图 86

在这两种情形中,都可把曲綫看成与直綫完全一致,而有

$$y = ax^b e^{cx}.$$

为了定出 a, b 与 c,我們用下面的平均值方法找出 x 和 $\Delta_1\log_{10} y$ 間的綫性关系. 在把条件方程

$$\Delta_1 \log_{10} y = b\log_{10} 2 + cx\log_{10} e$$

分組相加后(每組含三个方程),得

$$-0.292 = 0.903b + 0.2606c,$$

$$-3.392 = 0.903b + 0.6514c.$$

从而算出 $b = 1.966$ 及 $c = -7.932$. 然后通过

$$\Sigma \log_{10} y = 12\log_{10} a + b\Sigma\log_{10} x + c\log_{10} e\Sigma x,$$

或即

$$-2.670 = 12\log_{10} a - 6.529 - 26.87,$$

算出 $\log_{10} a = 2.561$. 因此 $a = 364$. 于是我們有公式

$$y = 364x^{1.966}e^{-7.932x},$$

由此算出与各个 x 对应的 y 值. 上表最后一列就是按此公式与 $x=0.1, 0.2, \cdots, 1.1, 1.2$ 对应的各个 y 值.

§13. 曲 綫 族

两个自变量 x, y 的函数

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

应当用三維空間的曲面来表达,但有时可以用一曲綫族来表达. 例如,把 y 作为常数,則 (1) 定义一曲綫,当 y 变化时得一曲綫族. 这样得出的曲綫族称为以 y 为参数的曲綫族.

取 y 抑取 x 为参数,須視应用时的目的性而定.

以弹道为例,一个射出物(炮弹或人造卫星)的軌道依賴于发射时的初速 v_0 与发射时的仰角 α 而定. 实质上,弹道曲綫是有两个参变数的曲綫.

在研究定型大炮时,初速 v_0 取定数,而发射角作为参数. 如取发射点为原点, x 軸为射向水平方向, y 軸的正向朝上,則弹道方程是

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{x^2 g \sec^2 \alpha}{2v_0^2}. \tag{2}$$

如图 87 所示,就是当 α 取不同数值所得的抛物軌道.

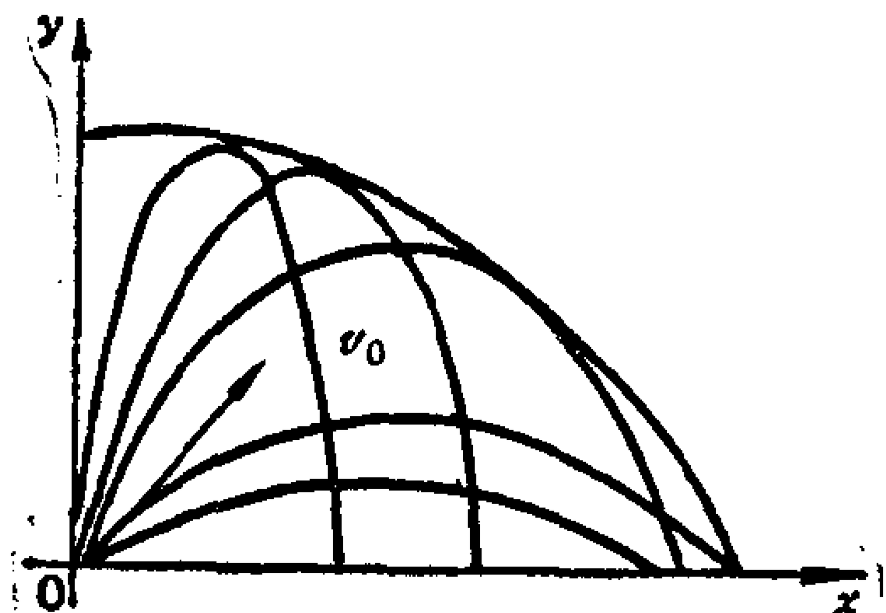


图 87

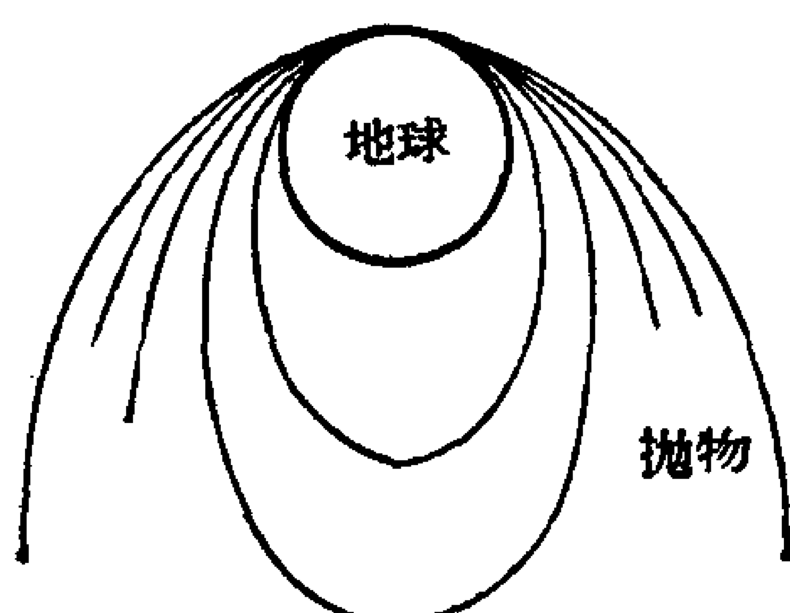


图 88

但人造卫星的发射,是依初速为主要依据. 不同的初速得不同的軌道,这样得一曲綫族:采用极坐标,以地心为极点,水平綫为基綫,并假定在某一高度依水平角发射,則軌道方程是

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}, \tag{3}$$

这里

$$p = \frac{R^2 v_0^2}{fM},$$

$$e = \sqrt{1 + \left(v_0^2 - \frac{2fM}{R}\right)\frac{R^2 v_0^2}{fM}},$$

其中 M 表地球质量 5.98×10^{27} 克, f 表引力常数 6.685×10^{-23} [公里]^3/[克][秒]^2, R 是发射点到球心的距离(地球半径 6370 公里).

从軌道方程(3)中可以算出：如果取 $R=6370$，速度小于第一宇宙速度（7.9 公里/秒),則物体回到地球上来. 当初速等于第一宇宙速度时,(3)表示一圓. 当初速在第一、第二(11.2 公里/秒)宇宙速度之間时,則得椭圓軌道. 当取第二宇宙速度时,則取抛物綫軌道. 超过第二宇宙速度时,則得双曲綫軌道(讀者試自做之,它是复习二次曲綫的一个好习題).

習題 1. 有二椭圓:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

过这二椭圓的交点有一二次曲綫族:

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\mu\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-1\right)=0.$$

証此族中有一个圓,有一对直綫,有一批双曲綫,求这些双曲綫的漸近綫.

習題 2. 求过两二次曲綫 $Q_1=0$，$Q_2=0$ 及两条直綫 $l_1=0$，$l_2=0$ 的交点（如图）的三次曲綫. 証明它有无穷多条(考虑 $\lambda l_1Q_2+\mu l_2Q_1=0$).

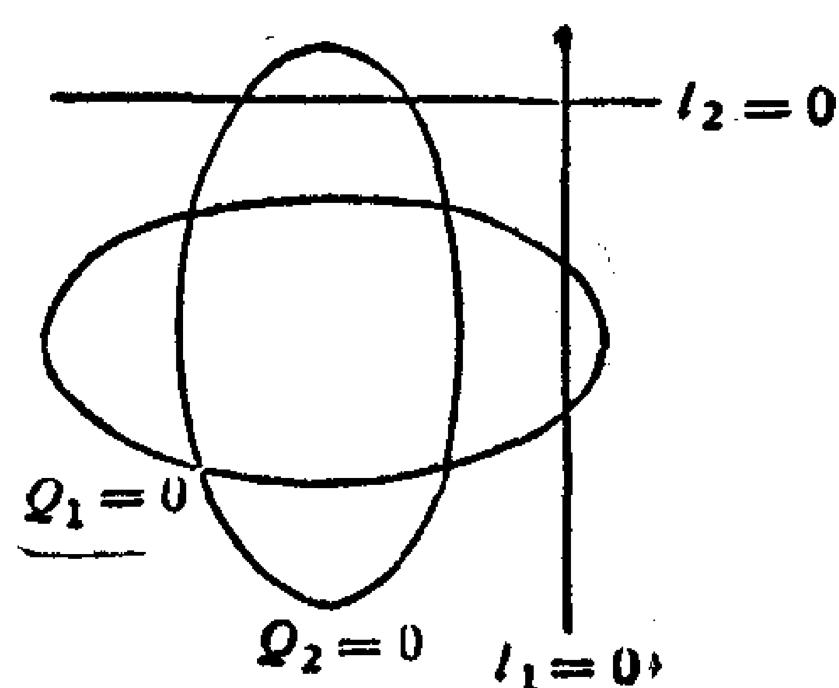


图 89

第四章 极 限

§1. 貫的趋限情况

仅仅从有极限和沒有极限来說明貫的性質,有的时候不够細致,不能符合客观需要.

先說一下趋限情况. 命

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

是一实数貫趋于一限 x. 一般講来,有三种情况: (i) 当 n 充分大时,这些 x_n 都在 x 的左边,也可以說 $x_n \leqslant x$. 在这样的情况下,我們說 x_n 从左趋限 x, 也就是任給一个 $\varepsilon > 0$, 我們有一个充分大的自然数 N 存在,使当 $n > N$ 时

$$0 \leqslant x - x_n \leqslant \varepsilon.$$

同样,可以說明,(ii) 右趋限的情况. 还有 (iii) 或左或右地趋于限的情况.

例 1. $x_n = \frac{1}{n}, x_n = -\frac{1}{n}, x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 就各表一种情况. 第三类还可以举更复杂一些的例子. 对任一实数 x, $x_n = \frac{\sin nx}{n}$ 也是趋于 0 的貫.

例 2. 研究貫

$$x_n = \frac{2n^2 + 3n + 4}{5n^2 + 6n + 7}.$$

我們将証明它的极限是 $\frac{2}{5}$. 当 $n \geqslant 2$ 时,

$$0 \leqslant x_n - \frac{2}{5} = \frac{3n + 6}{5(5n^2 + 6n + 7)} \leqslant \frac{6n}{25n^2} < \frac{6}{25n} < \varepsilon;$$

当 $n > N = \left[\frac{6}{25\varepsilon}\right]$ 时,此式成立,所以我們的貫是从右边趋近于 $\frac{2}{5}$.

例 3. 假定 $a > 1$, 求証

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

这 $x_n = a^{\frac{1}{n}}$ 是递减的貫并且 $\geqslant 1$, 所以极限存在,并且是从右边趋限的. 从公式

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{a - 1}{(a^{\frac{1}{n}})^{n-1} + (a^{\frac{1}{n}})^{n-2} + \cdots + 1},$$

及 $(a^{\frac{1}{n}})^l > 1$ 可知

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n},$$

所以当 $n > N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$ 时,

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon.$$

例 4. 假定 $|q|<1$ (q 可能是复数)，现在证明

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

$q=0$ 时显然. 今考察 $q\neq 0$ 时如何才能使

$$|q|^n < \varepsilon.$$

当

$$\log\frac{1}{\varepsilon} < n\log\left|\frac{1}{q}\right|,$$

亦即

$$n > N = \left[\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\left|\frac{1}{q}\right|}\right]$$

时，

$$|q^n| < \varepsilon.$$

我们现在来考察等比级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n.$$

这级数的和是

$$a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q},$$

当 $n\to\infty$ 时，后面一项趋于 0，所以我们可以说级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots$$

收敛于$\frac{a}{1-q}$.

例 5. 先给二数 a 与 b, $a<b$. 命 $x_0=a$, $x_1=b$, 并定义

$$x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2} \quad (n\geqslant 2),$$

求 x_n 的极限. 由

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2}),$$

所以

$$x_1-x_0=b-a,\ x_2-x_1,\cdots,\ x_{n-1}-x_{n-2},\ x_n-x_{n-1}$$

是一个等比级数的诸项，其公比是 $-\frac{1}{2}$. 所以

$$(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1}) = x_n - a = \frac{b-a-\left(-\frac{1}{2}\right)^n(b-a)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

故当 $n\to\infty$ 时，x_n-a 趋向于 $\frac{2}{3}(b-a)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a+2b}{3}.$$

这种趋限的方法，是忽然在左，忽然在右的趋限方法.

在趋限的情况中，还有单调趋限或非单调趋限两种情况．单调趋限是从一方面一步近于一步地接近于极限.

例5虽然不是从单方面趋限，但它还是一步近于一步地接近极限的贯.

§2. 贯的不趋限情况

不趋限的情况，更有许多值得注意的现象.

无穷大：有以下性质的贯称为趋向无穷大，给了一个任意大的正数 E，我们可以找到一个自然数 $N(=N(E))$，使当 $n>N$ 时

$$|x_n|>E.$$

例如，$x_n=n$, $x_n=-n$, $x_n=(-1)^{n+1}n$ 都趋向无穷大.

特别重要的是当无穷大贯 x_n（当 n 充分大时）的符号（+或−）保持不变的情形；这时，按照符号为正或负，而称 x_n 趋向正无穷大（$+\infty$）或负无穷大（$-\infty$），并写成为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty, \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty.$$

换言之，如果给了任意大的正数 E，我们有自然数 $N(=N(E))$ 存在，使当 $n>N$ 时，

$$x_n>E, \quad (或 \quad <-E),$$

则 x_n 趋向 $+\infty$（或 $-\infty$）.

上例中，$x_n=n$ 趋向 $+\infty$，$x_n=-n$ 趋向 $-\infty$，而 $x_n=(-1)^{n+1}n$ 却不能说它趋向 $+\infty$ 或 $-\infty$，而仅能说它趋向无穷大.

趋于0的贯也称为无穷小，而无穷大与无穷小之间的关系是：

如果 x_n 趋向无穷大，则它的倒数 $y_n=\dfrac{1}{x_n}$ 是无穷小．反之，如果 y_n（不等于0）是无穷小，则 $x_n=\dfrac{1}{y_n}$ 趋向无穷大．x_n 与 y_n 中可能有些等于0的项，这些项必须除去.

如果 x_n 趋向 $+\infty$，则它的倒数 $y_n=\dfrac{1}{x_n}$ 从右趋向于0；如果 x_n 趋向 $-\infty$，则 y_n 从左趋向于0．反之亦然.

不趋限的情况，有时还更复杂.

聚点：把 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 都记在一条直线上，因为有无穷个点，所以可能有以下的情况出现．有一点 x，在 x 附近有无数点；换言之，任与 $\varepsilon>0$，我们有无穷多个自然数 $n_1, n_2, \cdots$，使

$$|x - x_{n_\nu}| < \varepsilon \quad \nu = 1, 2, \cdots.$$

这样的点 x 称为贯 $\{x_n\}$ 的一个聚点或极限点．显然趋限的贯有唯一的聚点．没有聚点的贯一定趋向无穷．因对任一 $E > 0$，$|x_\nu| < E$ 的 x_ν 仅有有限个，所以，有一自然数 N 存在，使当 $n > N$ 时，$|x_n| > E$．即得所证．

例 1．$x_{2n} = \frac{1}{n}$，$x_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$，这一个贯显然有二聚点 0 与 1．一般地说，如果 $x_n \to x$，$y_n \to y$，$z_n \to z$，则我们定义一新贯

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots.$$

这新贯有三个聚点 x，y，z．

例 2．我们把(0,1)之间的全体有理数，用以下的方法排成一贯：

$$0, 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3};\ \frac{1}{4}, \frac{3}{4};\ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5};\ \frac{1}{6}, \frac{5}{6};\ \cdots$$

一般讲来，先依分母排，再依分子大小排下所有的既约分数，这贯既然包含 [0,1] 间的全体有理数，则显然 [0,1] 间的任何一个实数都是极限点．

定义． 在聚点中最大的一个称为上极限，用

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

来表示(上极限可能是 $\pm\infty$)．而最小的一个称为下极限，用

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

来表示(也可能是 $\pm\infty$)．

上极限的定义也可转述为：对任一 $\varepsilon > 0$，仅有有限个 n 使 $a_n > \alpha + \varepsilon$；而有无穷个 n 使

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

定理 1． 对于任何贯 $\{x_n\}$，上极限和下极限都存在．又 $\{x_n\}$ 有极限的必要且充分条件是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

证．如果 $\{x_n\}$ 无上界，则一定有一子贯 x_{n_k}，使

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty.$$

因此 $+\infty$ 是一聚点，从而上极限是 $+\infty$．如果 $\{x_n\}$ 有上界，定义 M_k 为 $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots$ 的确上限，用符号

$$M_k = \sup_{n>k}\{x_n\} = \sup\{x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots\}$$

表之，则 M_k 为一单调减少贯，它或者以 $-\infty$ 为其极限，或者有有限的极限．

如果

$$\lim_{k\to\infty} M_k = -\infty,$$

则对任何正数 E，必有充分大的 K，使

$$M_K < -E.$$

于是由 M_k 的定义，当 $k > K$ 时，

$$x_k < -E$$

恒成立，所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

它同时是贯 $\{x_n\}$ 的上极限与下极限.

如果 $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M^*$ 为一有限数，则对任何 $\varepsilon > 0$，必有充分大的K，使

$$M_K < M^* + \varepsilon.$$

因此当 $k > K$ 时，x_k 适合

$$x_k < M^* + \varepsilon.$$

另一方面，我们有

$$M_k \geqslant M^*(k = 0,1,2,\cdots).$$

因为 $M_0 \geqslant M^*$，所以在 x_1，x_2，$\cdots$中必有一 x_{n_1} 适合

$$x_{n_1} > M_0 - \varepsilon \geqslant M^* - \varepsilon.$$

又因 $M_{n_1} \geqslant M^*$，所以在 x_{n_1+1}，x_{n_1+2}，$\cdots$中又必有一 $x_{n_2}(n_2 > n_1)$ 适合

$$x_{n_2} > M_{n_1} - \varepsilon \geqslant M^* - \varepsilon.$$

按此方法，我们可以找到无限多个 $x_{n_i}(i = 1, 2, \cdots)$，适合

$$x_{n_i} > M^* - \varepsilon;$$

另一方面，前已证明，大于 $M^* + \varepsilon$ 的 x_n 至多只有有限多个，所以 M^* 即为 $\{x_n\}$ 的上极限. 因此不论何种情形，上极限恒存在. 同样证明下极限的存在性.

定理的后半部分很是显然，读者试自补出它的证明.

§3. 级　数

所谓级数是指

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

而言，其中 a_n 是实数或复数. 命

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称它为级数的部分和. 如果

$$s_n \to s,$$

则称级数为收敛级数，并且称它收敛于 s.

关于贯有极限的 Cauchy 条件，就变为级数的收敛条件.

定理 1. 级数(1)收敛的必要且充分条件是：对任一 $\varepsilon > 0$，有一自然数N存在，使

当 $n > m > N$ 时，

$$|s_n - s_m| < \varepsilon,$$

亦即

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

递增而限于上的贯必有极限的定理一变而为

定理 2. 如果 $a_\nu \geqslant 0$ 而 $|s_n| \leqslant M$，则级数(1)一定收敛.

定义. 如果级数

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

收敛，则级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为绝对收敛. 由定理 1 及 $|a_{m+1} + \cdots + a_n| \leqslant |a_{m+1}| + \cdots + |a_n|$ 可知

定理 3. 凡绝对收敛的级数一定收敛.

更一般些有

定理 4. 如果 $a_n \geqslant 0$，且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

收敛. 若 $|b_n| \leqslant a_n$，则级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

绝对收敛.（注意：只要当 n 充分大时，有 $|b_n| \leqslant a_n$ 便已足够.）

取

$$a_n \leqslant r^n, \quad 0 < r < 1,$$

则由定理 4 可知，级数 Σa_n 收敛. 因之，如果当 n 充分大时，常有

$$|a_n| \leqslant r^n, \quad 或即 \quad |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant r,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 因得

定理 5（Cauchy 判别法）. 如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = r < 1,$$

则级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

绝对收敛.

定理 6（此例判别法）. 命

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r < 1,$$

则级数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 绝对收敛.

证. 由假定可知，对任一 $0 < \varepsilon < 1 - r$，我们有一自然数 N 存在，使当 $n \geqslant N$ 时，

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leqslant r + \varepsilon, \quad 或即 \quad |a_{n+1}| \leqslant (r + \varepsilon)|a_n|.$$

即得

$$|a_{N+p}| \leqslant (r+\varepsilon)^p |a_N|.$$

因为 $\sum_{p=1}^{\infty} |a_N|(r+\varepsilon)^p$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

例 1. 假定 $z = x + yi$ 是一个复数,则当 $|z| < 1$ 时,

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}.$$

例 2. 当 $|z| < 1$ 时

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n + \cdots$$

也绝对收敛,

因为

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\left(\frac{n+1}{n}\right) z\right| \to |z|.$$

所以得出需要的结果.

例 3. 命 α 是任一实数,当 $|z| < 1$ 时

$$1 + 2^\alpha z + 3^\alpha z^2 + \cdots + (n+1)^\alpha z^n + \cdots$$

也绝对收敛.

例 4. 级数

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

的收敛性不能由比例判别条件得到 $\left(因为 \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1\right)$, 也不能用 Cauchy 判别法得到 $\left(因为 \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1\right)$, 但可通过以下的方法来证明它的收敛性. 先考虑

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots,$$

这个级数的收敛性可由

$$\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(m+p)(m+p+1)} =$$
$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m+p} - \frac{1}{m+p+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+p+1} \to 0, (当 m \to \infty 时)$$

导出,而

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}, \quad n \geqslant 2,$$

所以原级数收敛.

更一般些,我们还可证明:

定理 7. 对任一 $\alpha > 1$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

常收敛.

证. 由于

$$\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}<\frac{2}{2^\alpha},$$

$$\frac{1}{5^\alpha}+\cdots+\frac{1}{8^\alpha}<\frac{4}{4^\alpha},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(2^n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1})^\alpha}<\frac{2^n}{(2^n)^\alpha},$$

而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$$

是收敛的,所以定理成立.

下面我们来说明绝对收敛级数的一个重要性质.

定理 8. 如果级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

绝对收敛,并且它的和等于 s, 则在任意颠倒它的各项次序后所得到的级数

$$a_1'+a_2'+\cdots+a_n'+\cdots,$$

也一定绝对收敛,并且它的和也等于 s. 简单地说,任意颠倒一个绝对收敛级数的各项次序,对级数的绝对收敛性与级数的和不生影响.

证. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,故对任何 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|<\varepsilon. \tag{1}$$

因为级数 $\sum_{k=1}^{-}a_k$ 的前 N 项 $a_1,\cdots,a_N$ 就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n'$ 的某 N 项 $a_{i_1}',\cdots,a_{i_N}'$, 命 $m_N=\max(i_1,\cdots,i_N)$, 则对任何 $m>m_N$,

$$\sum_{k=1}^{m}a_k'=\sum_{k=1}^{N}a_k+r,$$

此处 r 是足标 $>N$ 的某些 a_k 之和,所以由不等式(1)得到

$$|r|<\varepsilon.$$

因此,对于 $m>m_N$,

$$\left|\sum_{k=1}^{m}a_k'-s\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{N}a_k-s\right|+|r|=\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k\right|+|r|<2\varepsilon.$$

这說明了級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ 的收斂性，并且它的和就等于 s。

因为

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k'|$$

是級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 中的某 n 項之和，所以

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k'| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

而左方是 n 的增加貫，由此得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ 的絕对收斂性。

不收斂的級数称为发散。发散也有种种不同的情况。由定理 1 可以立刻推得：如果級数 Σa_n 收斂，則

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

所以任何一个公項不趋 0 的級数一定是发散的。

例如，$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 就是发散級数。

但是公項趋于 0 的級数并不一定收斂，例如，調和級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

就是一个发散級数，因为該級数

$$\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \geqslant$$
$$\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots.$$

故調和級数是发散的。

与收斂相仿，我們也有一批与发散性有关的定理：

定理 4′. 如果 $a_n \geqslant 0$ 且 Σa_n 发散。若 $b_n \geqslant a_n$，則 Σb_n 也发散。

定理 5′. 如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = r > 1,$$

則級数 Σa_n 发散(因为如果这样，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$)。

定理 6′. 如果

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1,$$

則級数 Σa_n 发散。

証法也是如此，卽在此情形中，a_n 不趋于 0 。注意，由

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1$$

不能推出級数发散．例如，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{2}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots$$

适合以上的条件,但这是一收斂級数．

附記． 凡能用比例判別法判定是收斂的級数，一定能用 Cauchy 判别法判定之；反之不真．对于发散的情形,也是如此．

§ 4. 条件收斂的級数

不絕对收斂的收斂級数称为条件收斂級数．

例如，$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 不絕对收斂,但是

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^p\frac{1}{n+p}\leqslant\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+2\left[\frac{p}{2}\right]-1}-\frac{1}{n+2\left[\frac{p}{2}\right]}\right)\leqslant\frac{1}{n}$$

及

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^p\frac{1}{n+p}\geqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2\left[\frac{p-1}{2}\right]}-\frac{1}{n+2\left[\frac{p-1}{2}\right]+1}\right)\geqslant 0.$$

所以当 $n\to\infty$ 时，$s_n-s_{n+p}\to 0$．由定理 3.1 可知級数收斂．

以上的証明原則立即可以推广,而得

定理 1. 如果 $0\leqslant a_{n+1}\leqslant a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

收斂．

証． 由于

$$a_n-a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+(-1)^p a_{n+p}\begin{cases}\leqslant a_n\\ \geqslant 0,\end{cases}$$

故由定理 3.1 推得本定理．

在检驗非絕对收斂級数的收斂性时，經常用到下面的 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法．我們先証明一个重要的引理．

引理 1. 設 a_n 单調,又設

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots,N),$$

則对 $n=1,2,\cdots,N$，可有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leqslant M(|a_1|+2|a_n|).$$

証. 命 $s_0=0,\ s_n=\sum_{k=1}^{n} b_k\ (n\geqslant 1)$,則有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=\sum_{k=1}^{n} a_k(s_k-s_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} a_k s_k-\sum_{k=2}^{n} a_k s_{k-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k s_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} s_k=\sum_{k=1}^{n-1} s_k(a_k-a_{k+1})+s_n a_n. \tag{1}$$

因为 a_n 是单調負,所以 a_k-a_{k+1} 有固定的符号,于是得到

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|\leqslant M\left(\left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})\right|+|a_n|\right)\leqslant M(|a_1|+2|a_n|).$$

等式(1)俗称为分部求和公式,这与以后积分中的分部积分公式相当.

定理 2(Abel 判別法). 設 a_n 有界单調,又設級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂,則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

也收斂.

証. 設 $|a_n|\leqslant K$, 由級数 Σb_n 的收斂,故对任何 ε,存在 N,使

$$\left|\sum_{k=N+1}^{N+p} b_k\right|<\varepsilon,\quad (p=1,2,\cdots).$$

于是由引理 1 得到

$$\left|\sum_{k=N+1}^{N+p} a_k b_k\right|\leqslant \varepsilon(|a_{N+1}|+2|a_{N+p}|)\leqslant 3K\varepsilon,\quad (p=1,2,\cdots).$$

所以定理得証.

定理 3(Dirichlet 判別法). 設 a_n 单調,且当 $n\to\infty$ 时趋于 0. 又設級数 Σb_n 的部分和有界,也卽

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|\leqslant M\quad (n=1,2,\cdots),$$

則級数 $\Sigma a_n b_n$ 收斂.

証. 对于任何 $\varepsilon>0$,存在 N,使当 $n>N$ 时, $|a_n|<\varepsilon$. 于是由引理得到

$$\left|\sum_{k=N+1}^{N+p} a_k b_k\right|\leqslant M(|a_{N+1}|+2|a_{N+p}|)<6M\varepsilon.$$

所以 $\Sigma a_n b_n$ 收斂.

在上一节中,我們講到,任意顚倒絕对收斂級数的各項次序并不影响級数的和值. 对于条件收斂級数,却无此性质. 事实上,我們有

定理 4. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收斂,則适当顚倒它的各項次序,可以作出发散級数,也可以作出收斂于任何預給数 s 的收斂級数.

在証明之前,先証明一个引理.

引理 2. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收斂,則它所有的正項构成一个发散級数,同样,它所有的負項也构成一发散級数.

證. 用 $p_1, p_2, \cdots$ 表示从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中依次取出的各个正項,$q_1, q_2, \cdots$ 表示从 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中依次取出的負項,則

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n'} p_k + \sum_{k=1}^{n''} q_k,$$

此处 $n'(n'')$ 为前 n 个 a_n 中的正(負)項个数,自然有 $n' + n'' = n$,且当 $n \to \infty$ 时, n' 与 n'' 也都趋向 ∞. 因为 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂,故若 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ 中有一收斂, 則另一个也收斂. 但因

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n'} p_k - \sum_{k=1}^{n''} q_k,$$

于是推出 $\Sigma|a_k|$ 也收斂,这与 Σa_k 为条件收斂矛盾,所以 Σp_k 与 Σq_k 都发散.

定理 4 的証明. 为了得到一个发散級数, 我們将原級数的各項次序作如下的調整. 先取級数的若干个正項,使它們的和大于 1. 根据引理,此事总为可能. 然后在它們后面添一負項,之后再加若干正項,而使这些新加的正項之和仍大于 1,然后再加一負項,……等等,将此手續繼續进行以至无穷,于是得到一个新的級数. 很显然,原級数的每一項一定在这新級数中出現. 又此新級数一定发散,因为在无論怎样远的地方,此新級数总有一片段,它們的和数大于 1 所以它发散.

其次, 为了得到一个和数为預先給定的 s 的收斂級数, 我們調整級数的各項次序如下. 为确定起見,不妨假設 $s \geqslant 0$. 我們依次取出原級数中的各个正項,直到它們的和大于 s 为止. 然后再依次添上原級数的各个負項,直到这些負項与前面这些正項之和小于或等于 s 为止. 然后再添正項、添負項、……等等, 按此手續进行以至无穷. 这样我們又得到一个新級数

$$a_1' + a_2' + \cdots + a_n' + \cdots.$$

显然这个新級数是通过对原級数調整各項次序而得. 我們将証明这个新級数的和就等于 s. 命

$$\sum_{k=1}^{n} a_k' = s_n' \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

今設 $\varepsilon > 0$ 任意小, 因为 $a_n' \to 0$, 故必有 N, 使当 $n > N$ 时, $|a_n'| < \varepsilon$. 依据上述 $\Sigma a_n'$ 的构造方法,必有 $n_0 > N$, 使

$$s_{n_0-1}' \leqslant s < s_{n_0}',$$

所以

$$0 < s_{n_0}' - s \leqslant s_{n_0}' - s_{n_0-1}' = a_{n_0}' < \varepsilon.$$

而对 $n > n_0$, 又根据 $\Sigma a_n'$ 的构造方法,一定有

$$|s_n' - s| < \varepsilon \quad (n \geqslant n_0),$$

所以 s_n' 趋于 s；也就是説

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = s.$$

定理証毕.

从引理 2 及定理 4 可以看到，在絕对收斂級数与条件收斂級数之間存在着深刻的实質性的差异.

§ 5. 祖冲之計算圓周率的方法

祖冲之首先証明了圓周率 π 落在

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

之間，这是数学史上的一个光輝成就. 他的算法也是极限的最好説明，他从单位圓的內接正六边形和外切正六边形出发. 显然圓夹在这两个六边形之間，再作內接的和外切的正 12 边形、正 24 边形、…正 $6\cdot 2^{n-1}$ 边形等等，边数愈多，內接的和外切的正 $6\cdot 2^{n-1}$ 边形的面积就愈接近于圓的面积，由此可以逐步地精确地算出圓周的长度.

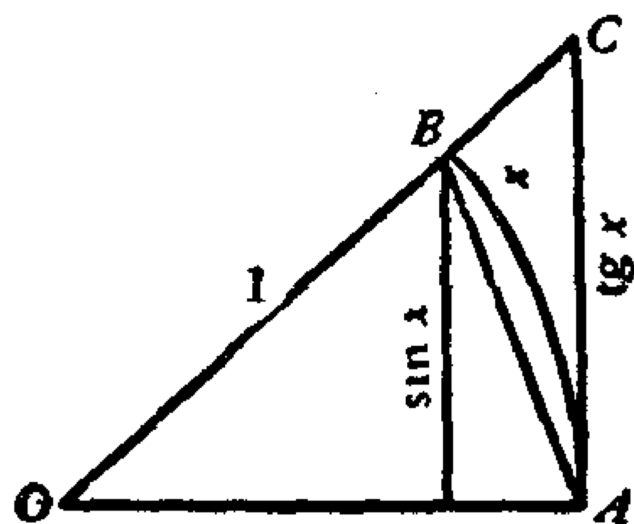


图 90

由图 90 可見

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

圓內接正 l 边形的一边长度等于

$$2 \sin \frac{\pi}{l},$$

而外切正 l 边形的一边长度等于

$$2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{l}.$$

命 x_n 表內接正 $6\cdot 2^{n-1}$ 边形的总边长，而 y_n 表外切正 $6\cdot 2^{n-1}$ 边形的总边长. 由两点之間的距离以直綫为最短的原則，我們可以証明 $x_n < x_{n+1}$, $y_n > y_{n+1}$，因而得出两个貫

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots,$$

及

$$y_1 > y_2 > y_3 > \cdots.$$

这儿

$$x_n = 6 \cdot 2^n \sin \frac{2\pi}{6\cdot 2^n}, \qquad y_n = 6 \cdot 2^n \operatorname{tg} \frac{2\pi}{6\cdot 2^n}.$$

由(1)式可知

$$x_n < 2\pi < y_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

卽內接正 $6\cdot 2^{n-1}$ 边形的周长恆小于圓的周长，而外切正 $6\cdot 2^{n-1}$ 边形的周长恆大于圓的周长. 又由

$$0 \leqslant y_n - x_n = 6 \cdot 2^n \left(\operatorname{tg} \frac{2\pi}{6\cdot 2^n} - \sin \frac{2\pi}{6\cdot 2^n}\right) =$$

$$= 6 \cdot 2^n \operatorname{tg} \frac{2\pi}{6\cdot 2^n}\left(1 - \cos \frac{2\pi}{6\cdot 2^n}\right) = 6 \cdot 2^{n+1} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{6\cdot 2^n} \sin^2 \frac{\pi}{6\cdot 2^n},$$

及 $\sin x < x$（也就是两点之間直綫最短）可知，当 n 趨向∞时

$$y_n - x_n \leqslant \frac{\pi^2}{6\cdot 2^{n-1}} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{6\cdot 2^n} \to 0.$$

因此我們知道

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 2\pi.$$

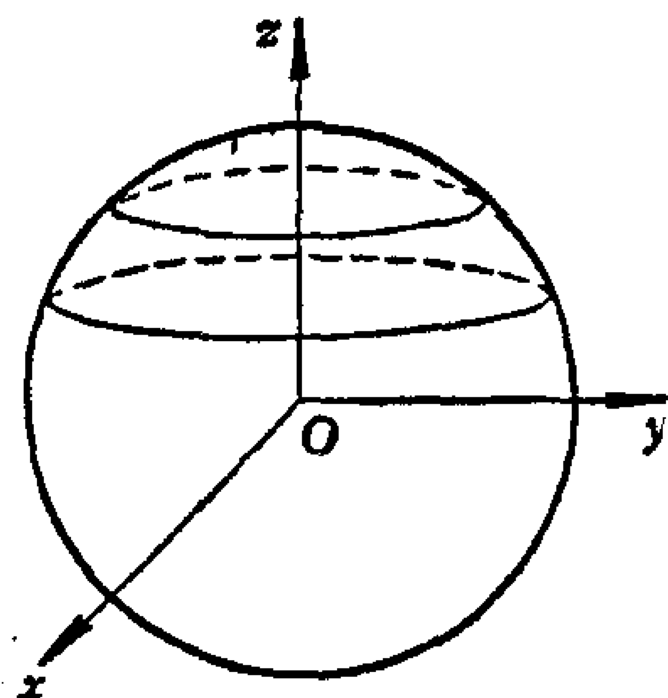


图 91

在实际計算时，我們用以下的方法．因

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$

故能从 $\cos\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 开始逐步算出

$$\cos\frac{2\pi}{6\cdot 2^n}.$$

同法可以算出半径为 r 的圓面积是 πr^2.

我們也可以求半径为 r 的球体积，把一半径分为 n 分，依垂直于这半径的方向切片，第 i 切片，是一圓台，其上底与下底的半径分别等于 $r\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}$ 与 $r\sqrt{1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}$，所以第 i 片的体积在

$$\pi\left(1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right) r^2 \times \frac{r}{n} \quad 与 \quad \pi\left(1-\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) r^2 \times \frac{r}{n}$$

之間，即在两柱之間，因而球体积 V 适合于

$$2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right) r^3 > V > 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) r^3.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

可知

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) r^3 = 2\pi r^3\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) = 2\pi r^3\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

后面的方法就是祖冲之的儿子祖暅之所用到的"綴术".

§6. Archimedes 求抛物形面积法

求图形 OPM 的面积 Q.

图形 OPM 由抛物綫 $y = ax^2$ $(a > 0)$ 上的一部分 OM，x 軸上的綫段 OP 及綫段 PM 围成，将 OP 分成 n 等分，并在各部分上作一系列的內含及外包的矩形，如图 92 所示，其面积分别記之为 Q_n 及 Q_n'，而其面积之差，就等于最大外凸矩形之面积，也即 $\frac{x}{n}\cdot y$.

由

$$Q_n < Q < Q_n'$$

及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\cdot y=0,$$

得

$$Q=\lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}Q_n',$$

各分点的坐标是

$$\frac{1}{n}x,\ \frac{2}{n}x,\ \cdots,\ \frac{i}{n}x,\ \cdots,\ \frac{n}{n}x=x,$$

其对应的高分别为

$$a\frac{1}{n^2}x^2,\ a\frac{2^2}{n^2}x^2,\ \cdots,\ a\frac{i^2}{n^2}x^2,\ \cdots,\ ax^2.$$

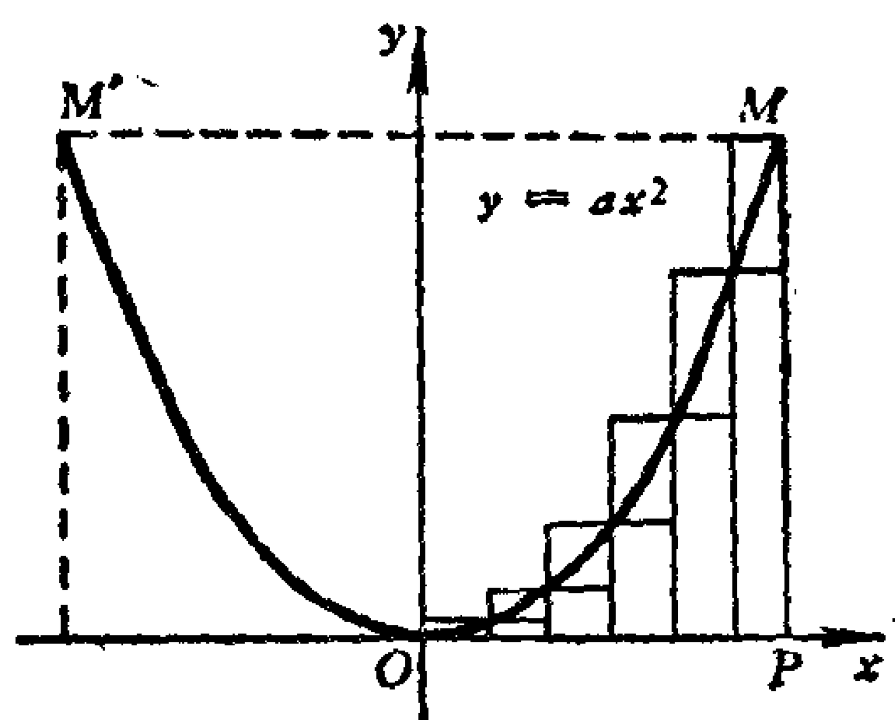


图 92

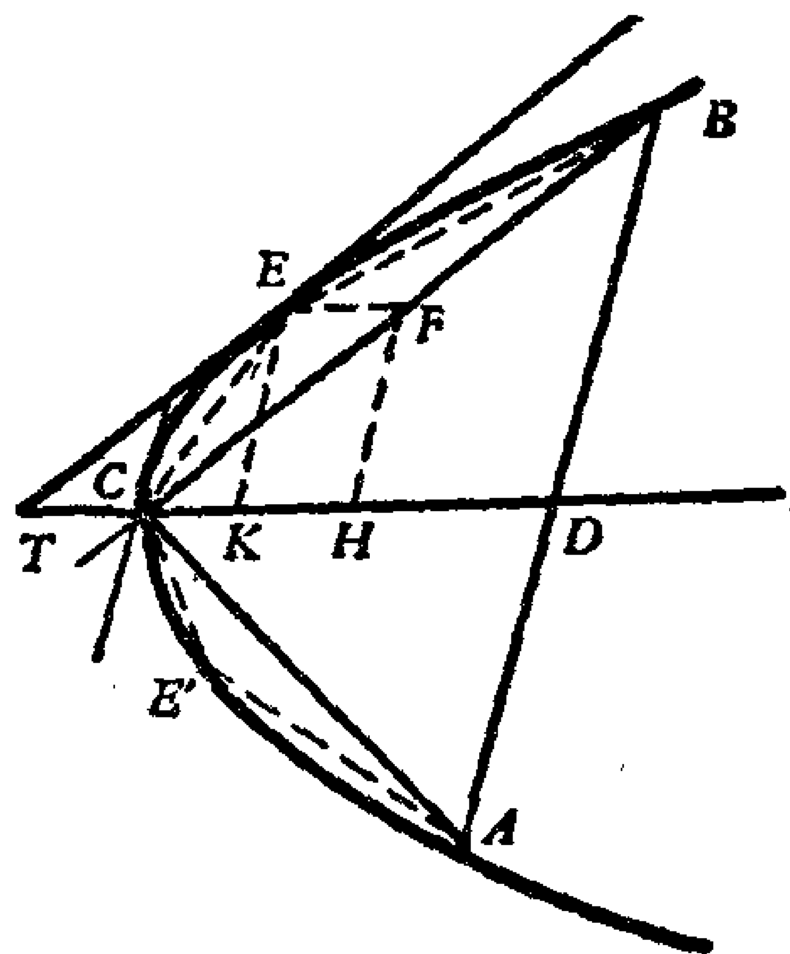


图 93

故得

$$Q_n'=\frac{ax^2}{n^2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)\cdot\frac{x}{n}=\frac{ax^3}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2},$$

因此

$$Q=\lim_{n\to\infty}Q_n'=\frac{ax^3}{3}=\frac{xy}{3}.$$

現在来談談 Achimede 原来算抛物形面积的方法：算出抛物綫 ACB 与弦 AB 之間的面积(图 93)。

通过 AB 的中点D及与 AB 平行而切于抛物綫的切綫的切点C作一直綫，这直綫称为抛物綫的直径；再联弦 BC（与 CA），由之再作平行于 BC（与 CA）的切綫，切点在E（与E'），我們将証明：如果用S表 $\triangle ABC$ 的面积，则

$$\triangle BEC+\triangle CE'A=\frac{1}{4}S. \qquad (1)$$

如果这一点証明了，再对 $\triangle BEC$（与 $\triangle CE'A$）續行此法，經过n次后，总面积将等于

$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{4^2}S+\cdots+\frac{1}{4^n}S=S\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}.$$

当 $n\to\infty$ 时，抛物形的面积将等于 $\frac{4}{3}S$，也就是由矢量 AB 与 CD 所做出的平行四边

形面积的 $\frac{2}{3}$ 倍.

我們現在来証明(1)式,实际上,祇需証明

$$\triangle BEC = \frac{1}{8}\triangle BAC,$$

由于这是有公底 BC 的三角形,所以如果我們能够証明 AB 所对应的直径 CD 是 BC 所对应的直径 EF 的长的 4 倍即足.

在 E 点作切綫交 CD 于 T,从 E 与 F 各作平行于 AB 的直綫交 CD 于 K, H. 因为 F 是 BC 的中点,所以 H 也是 CD 的中点,抛物綫的直径是平行的,所以 $EF = KH$. 因为 E 点的切綫平行于 BC,所以 $TC = EF$. 再由抛物綫的性質,$TC = CK$,所以得到

$$EF = CK = KH = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{4}CD.$$

定理巳經証明.

(这儿用了抛物綫的两个性質. 如果未曾学过,可以当作練习題).

§7. 旁压力的計算

决定长方形容器壁上的压力.

假定有一个盛滿了水的长方形容器,我們要求出在前壁上所承受的压力 P.

对底面說来問題很簡单,底上任一块地方的压力就等于在这一块上垂直水柱的重量,也就是等于这块地方的面积乘上水柱的高度 h.

对一个小水滴来說,它四面八方所承受的压力应当是一样的,不然它就不会成为稳定的情况.

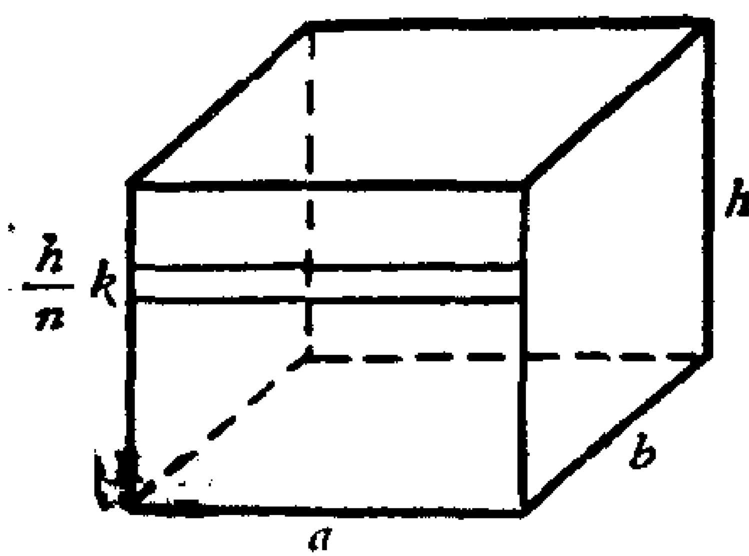


图 94

我們把前壁分为 n 个同样寬度的水平长条,每一条的寬度是 $\frac{h}{n}$. 我們現在考虑从上往下数的第 k 条,如果这一条是依水平面摆着,它上面所承受的压力应当是

$$P_k = \left(\text{在这一块上垂直水柱的高度} = k\frac{h}{n}\right) \times \left(\text{面积} = a \times \frac{h}{n}\right) = \frac{ah^2}{n^2}\cdot k.$$

当 n 充分大时,这就可以看成为在这条上的旁压力. 总起来旁压力等于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} P_k = ah^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = ah^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}ah^2.$$

§8. 数 e

我們現在用极限来定义一个数 e. 命

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

先証明 x_n 是单調增加的:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\frac{1}{n^3}+\cdots+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdots k}\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{1\cdot2\cdots n}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

若改 n 为 $n+1$,則因

$$1-\frac{s}{n}\leqslant1-\frac{s}{n+1},$$

并且多了一項 $\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$, 所以 $x_{n+1}>x_n$.

又因

$$x_n\leqslant1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

所以 x_n 囿于上. 因之,貫 x_n 必有一有限的极限,用 e 表它,即

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

不論在分析学上或在应用方面,这个实数 e 都有极端重要性. 容易看到,它落在 2 与 3 之間. 事实上,它的前 15 位小数是

$$e=2.71828\ 18284\ 59045\cdots.$$

由于 e 的一些性質(以后再說),使得选它作为对数系統的底能有特殊的方便. 以 e 为底的对数称为自然对数,以往用 10 为底的对数称为常用对数. 以 e 为底的对数,我們就以 log 来表它,而在其他情况則需表明底是什么. 例如,今后用 $\log_{10}$ 来表常用对数. 在理論的研究中,总是用自然对数.

以 10 为底的常用对数与自然对数的关系式是:

$$\log_{10}x=\log x\cdot M,$$

此处

$$M=\log_{10}e=\frac{1}{\log 10}=0.434294.$$

这公式是从

$$x=e^{\log x}$$

两边求以 10 为底的对数而得.

現在来介紹 e 的近似計算法. 当 $k<n$ 时,

$$x_n>2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

命 $n\to\infty$，

$$e \geqslant 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}=y_k.$$

于是由

$$x_n < y_n \leqslant e$$

得

$$e=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

在計算 e 的近似值时，用 y_n 比較方便，由于

$$\begin{aligned}
y_{n+m}-y_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}= \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right\} < \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\} < \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1},
\end{aligned}$$

命 $m\to\infty$，乃得

$$0 < e-y_n < \frac{1}{n!n},$$

此处用到 $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$. 故得

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n}, \quad 0<\theta<1.$$

用这公式就可对 e 进行近似計算，例如希望准确至 $\frac{1}{10^7}$，取 $n=10$，

$$\frac{\theta}{n!n}=\frac{\theta}{10!10} < 0.00000003.$$

其他各項在第八位小数上四舍五入，则最大誤差在絕对值上不超过 $\frac{1}{2\cdot 10^8}$. 現在分别将各項的近似值写下：

$$\begin{aligned}
& 2.000\,000\,00 \\
1/2! &= 0.500\,000\,00 \\
1/3! &= 0.166\,666\,67- \\
1/4! &= 0.041\,666\,67- \\
1/5! &= 0.008\,333\,33+ \\
1/6! &= 0.001\,388\,89- \\
1/7! &= 0.000\,198\,41+ \\
1/8! &= 0.000\,024\,80+ \\
1/9! &= 0.000\,002\,76- \\
1/10! &= 0.000\,000\,28- \\
\hline
& 2.718\,281\,81-
\end{aligned}$$

可知 e 的近似值的总校正数必在 $-\frac{3}{10^8}$ 及 $\frac{5}{10^8}$ 之间，由此得出 e 位于

$$2.718\,281\,78 \quad \text{及} \quad 2.718\,281\,86$$

之间.

在此容易得出 e 是无理数. 倘若不然，若 $e=\frac{m}{n}$，则

$$e=\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n} \quad (0<\theta<1).$$

等式双方乘以 $n!$，则得出 $\frac{\theta}{n}$ 为一整数. 此不可能，所以 e 是无理数.

§9. 连续趋限

假定 $f(x)$ 是一函数，它在 $x=a$ 附近定义，也就是有一 $d>0$ 存在，使 $f(x)$ 在 $0<|x-a|<d$ 中定义.

如果对任一 $\varepsilon>0$，我们能求出 $\delta>0$，使在 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称为：当 $x\to a$ 时，$f(x)\to A$. A 称为 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的极限，记之为

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$

我们可以定义右极限，即对任一 $\varepsilon>0$，能求出 $\delta>0$，使当 $0<x-a<\delta$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

记之为

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x) \quad \text{或} \quad A=f(a+0),$$

同法定义左极限，

$$\lim_{x\to a-0}f(x) \quad \text{或} \quad f(a-0).$$

我们可以类似地定义上极限与下极限.

例 1. 函数 $f(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$，在 0 点的极限是不存在的，但是，$f(0+0)=$ $=-\frac{1}{2}$，$f(0-0)=\frac{1}{2}$.

对任一 $E>0$，如果有 $\delta>0$ 存在，使当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)|>E$，则称为：当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 趋向无穷.

例 2. 当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}$ 趋向无穷，但

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty, \quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

例 3. 当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\to+\infty$.

例 4. 当 $x\to\pm 0$ 时，$\operatorname{ctg} x\to\pm\infty$.

又若对任一 $\varepsilon>0$，有正数 K 存在，使当 $x>K$ 时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

甲

乙

則定义为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

同法可以定义

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

的情况等等.

連續趋限可以归結为貫的趋限法.

命 $x_1, x_2\cdots, x_n, \cdots$ 是任何一个趋向于 a 的貫,定义

$$f(x_n) = y_n.$$

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, 則有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = A;$$

反之,如果对任何一个趋向于 a 的貫 x_n, 都有此性質,則不难証明

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

事实上,倘若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在,或存在而不等于 A, 則由极限的定义,必存在 ε, 使对无論怎样小的 δ,在 $0<|x-a|<\delta$ 中,都必有点 x,使

$$|f(x) - A| > \varepsilon.$$

于是我們命 δ_n 为一趋向于 0 的貫,而命 x_n 为落在 $0<|x-a|<\delta_n$ 中且使

$$|f(x_n) - A| > \varepsilon \tag{1}$$

成立的点,則 x_n 为一趋向于 a 的貫. 由(1)可知, 当 $n\to\infty$ 时, $f(x_n)$ 不能趋于 A, 但这与假設矛盾. 所以必須有

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

相当的 Cauchy 判定条件是

定理 1. 当 $x\to a$ 时,函数 $f(x)$有有限极限的必要且充分条件是: 給了任一 $\varepsilon>0$, 必存在 $\delta>0$,使适合于

$$0<|x-a|<\delta, \quad 0<|x'-a|<\delta$$

的 x 与 x' 常有不等式

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

証明的方法与貫趋极限的証明完全相仿,讀者自証之. 幷試叙述 $a=\infty$ 时的相仿定理.

又易証:如果下式右边两項都存在,則有

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x).$$

又如果 $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$,則

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x).$$

習題. 在球面三角的諸公式中,取 $\alpha = \frac{a}{R}$, $\beta = \frac{b}{R}$, $\gamma = \frac{c}{R}$, 命 $R\to\infty$,則得平面三角所有的公式.

§ 10. 几个重要极限

$1°$. $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

前已証明了

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

因此对于任何一个趋向无穷的整数貫 $\{n_k\}$,

$$e=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}.$$

今設 x 依任何趋向于 $+\infty$ 的序列 $\{x_k\}$ 而递变，并且可以当作一切 $x_k>1$. 命 $n_k=[x_k]$,于是

$$n_k\leqslant x_k<n_k+1,$$

及 $n_k\to\infty$. 由

$$\frac{1}{n_k+1}<\frac{1}{x_k}\leqslant\frac{1}{n_k},$$

可得

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

由

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}=e$$

及

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\to 1,\quad\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}\to 1,$$

得到

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

所以得 $1°$.

再研究 $x_k\to-\infty$,命 $x_k=-y_k$,則 $y_k\to+\infty$. 显然

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k}=\left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k}=\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right),$$

所以

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

把 x 换成 $\frac{1}{\alpha}$, 則得

$$e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

例 1. $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}=e^x$.

$2°$. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

由(5.1)式可知，在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 的假定下，有

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

因此

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x.$$

因而得出

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

由

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$

可知，

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\to\frac{1}{2}.$$

例 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

由

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2},$$

及 $\cos x\to 1$ 可得結果.

例 4.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sec x-\operatorname{tg}x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{1}{2}.$$

换变数 $a=\frac{\pi}{2}-x$，則当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时 $a\to 0$. 所以

$$\sec x-\operatorname{tg}x=\csc a-\operatorname{ctg}a=\frac{1-\cos a}{\sin a}=\frac{1-\cos a}{a^2}\frac{a}{\sin a}\cdot a.$$

故得所求.

§11. 一 些 例 子

1°. 研究当 $x\to\infty$ 时，$\sin x$ 的情况.

对任意一个絕对值小于 1 的数 α，一定有一个 $x_0\left(|x_0|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，使 $\sin x_0=\alpha$. 从而在点 $x_0+2\pi n(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 上也有

$$\sin(x_0+2\pi n)=\alpha,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin(x_0+2\pi n)=\alpha.$$

所以 $\sin x$ 沒有极限.

2°. 我們研究函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时的情况.

取递減于 0 的 x 的数值:

$$\frac{2}{\pi},\ \frac{1}{\pi},\ \frac{2}{3\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{2}{5\pi},\ \cdots,\ \frac{2}{(2n-1)\pi},\ \frac{1}{n\pi},\ \frac{2}{(2n+1)\pi},\ \cdots,$$

与它們对应的递增至 ∞ 的 $\frac{1}{x}$ 的数值是

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ \cdots,\ \frac{(2n-1)\pi}{2},\ n\pi,\ \frac{(2n+1)}{2}\pi,\ \cdots.$$

在上述各相邻的区間內,函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的值由 1 減至 0 ,再由 0 減至 -1,然后又由 -1 增至 0 ,再由 0 增至 1 . 如此反复不已. 由于 $\sin x$ 是奇函数,所以关于原点,图形是对称的.

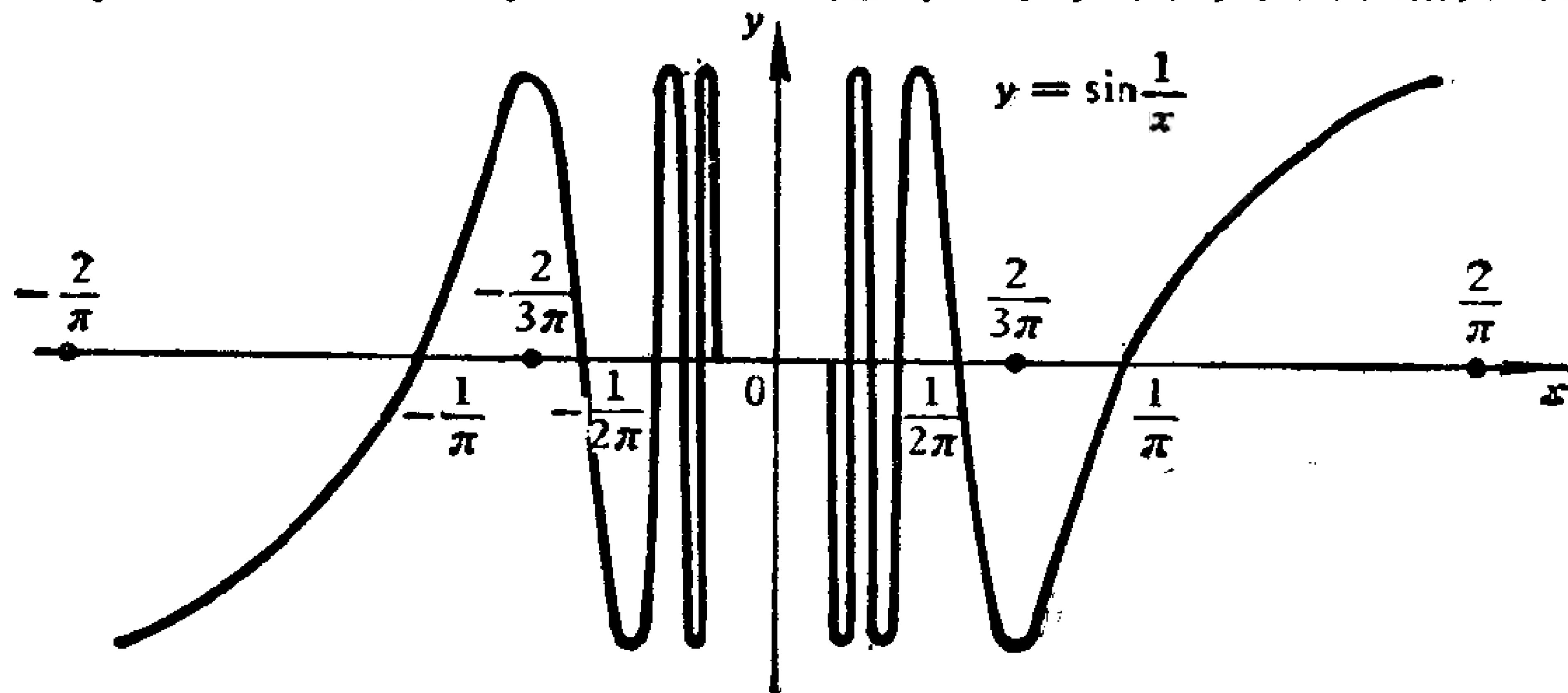


图 95

3°. 我們再来考虑函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 时的情况.

由

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|\quad(x\neq 0),$$

得

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

但当 $x\to 0$ 时,函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 仍发生无数次的振动, 不过振幅逐渐減少而趋于零. 故极限仍存在,如图 96 所示.

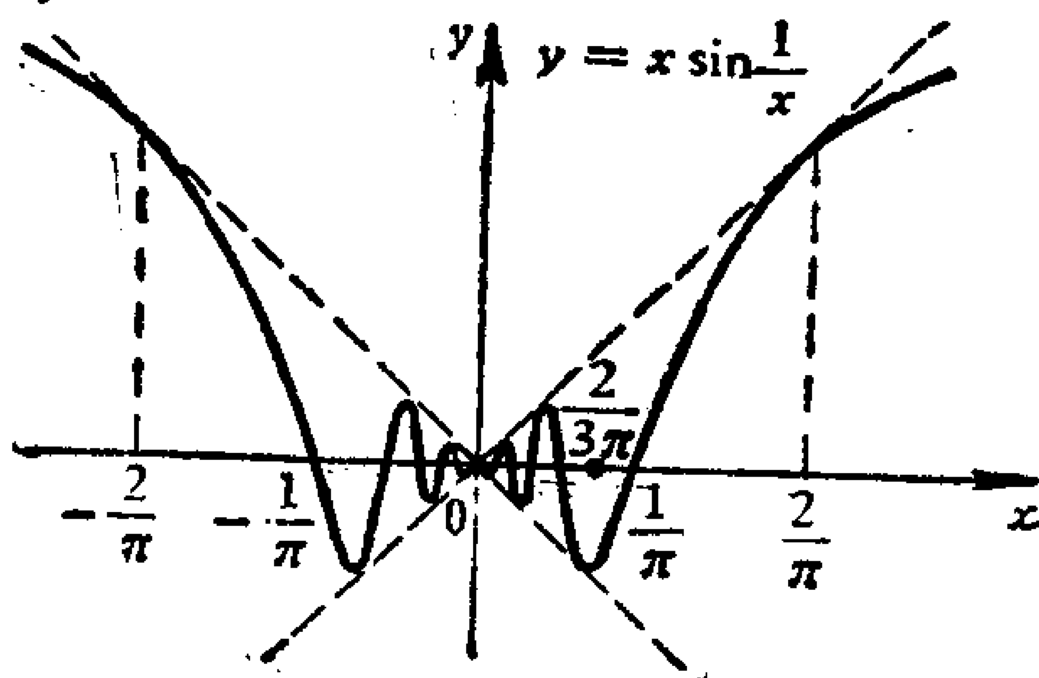


图 96

4°. 对任意有理数 r 常有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r.$$

證. 先研究 $r=n$ 是自然数的情况:由二項式定理得到

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x+\cdots+x^{n-1}\to n \quad (\text{当 } x\to 0 \text{ 时}).$$

再研究 $r=\frac{1}{m}$ (m 是自然数)的情况. 命

$$\sqrt[m]{1+x}-1=y,$$

則 $x=(1+y)^m-1$. 我們有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^m-1}=\frac{1}{m}.$$

对于一般情形 $r=\frac{n}{m}$, 仍用以上的变换,当 $y\to 0$ 时,有

$$\frac{(1+x)^{n/m}-1}{x}=\frac{(1+y)^n-1}{(1+y)^m-1}=\frac{(1+y)^n-1}{y}\frac{y}{(1+y)^m-1}\to\frac{n}{m}.$$

§12. 无穷大之阶

当 $x\to\infty$ 时,如果 $y=f(x)$ 也趋向于 ∞, 則 y 称为一个无穷大. 如果

$$0<\varliminf_{x\to\infty}\frac{z}{y}\leqslant\varlimsup_{x\to\infty}\frac{z}{y}<\infty,$$

則称 z 与 y 有相同的阶,用 $z\asymp y$ 表之. 如果

$$\lim_{x\to\infty}\frac{z}{y}=\infty,$$

則称 z 的阶大于 y 的阶,用 $y\prec z$ 表示. 显然有:如果 $y\prec z$, $z\prec w$,則 $y\prec w$. 又有

$$\cdots\prec x^{\frac{1}{3}}\prec x^{\frac{1}{2}}\prec x\prec x^2\prec x^3\prec x^4\prec\cdots.$$

又对任意二实数 $\alpha<\beta$,常有

$$x^\alpha\prec x^\beta.$$

例1. 命

$$p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k,\quad a_0>0,$$
$$q(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\cdots+b_{l-1}x+b_l,\quad b_0>0.$$

我們可以証明: 按照 $k>l$, $k=l$ 及 $k<l$,分別有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\infty,\quad\frac{a_0}{b_0},\quad 0.$$

再研究,当 $a>1$ 时,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x}=\infty.$$

命 $n=[x]$，則

$$\frac{a^x}{x}\geqslant\frac{a^n}{n+1}\geqslant\frac{(a-1)^2n^2}{4(n+1)}\to\infty.$$

此处用了:若 $a=1+\lambda$, 当 $n>2$ 时,

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2>\frac{(a-1)^2}{4}n^2.$$

对任一 $\alpha>0$,我們命 $a^{\frac{1}{\alpha}}=b$,則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{\alpha}x}}{x}\right)^\alpha=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b^x}{x}\right)^\alpha=\infty.$$

所以对任一 $\alpha>0$,常有

$$x^\alpha\prec a^x.$$

又命 $x=\log_a y$,則得

$$\log_a y\prec y^{\frac{1}{\alpha}},$$

卽可得出一系列的无穷大之阶

$$x^\alpha\prec e^x\prec e^{e^x}\prec e^{e^{e^x}}\prec\cdots$$

及

$$x^\alpha\succ\log x\succ\log\log x\succ\log\log\log x\succ\cdots.$$

§13. 符号 ~, O 与 o

现在研究 $x\to a$ 的情况. $g(x)$ 是一正值函数. 如果

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

我們用符号 $f(x)\sim g(x)$ 来表示. 如果

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|f(x)|}{g(x)}<\infty,$$

則用

$$f(x)=O(g(x))$$

来表示. 又若

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

我們就用

$$f(x)=o(g(x))$$

来表示.

例 1. 当 $x\to\infty$ 时, $\sin x=O(1)$.

例 2. 当 $x\to\infty$ 时, $x^k=o(e^x)$.

例 3. 当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x=x+o(x)\quad 或\quad \sin x\sim x.$$

这就是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的改写.

例 4. 当 $x\to 0$ 时,

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\ 或\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$$

例 5. 当 $x\to 0$ 时,

$$\operatorname{tg}x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3 \text{ 或 } \operatorname{tg}x=\sin x+\frac{1}{2}x^3+o(x^3).$$

例 6. 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\sim-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

这些例子也建議我們精密更精密的过程. 更清楚些,还是举一个例.

例 7. 当 $x\to 0$ 时,我們首先知道(m 自然数)

$$\sqrt[m]{1+x}\sim 1.$$

那也就是 $\sqrt[m]{1+x}-1\to 0$. 其次便进一步研究, $\sqrt[m]{1+x}-1$ 如何趋于 0. 我們前已証明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{m},$$

也就是得到更精密一步的結果:

$$\sqrt[m]{1+x}=1+\frac{1}{m}x+g(x), \quad \text{而} \quad g(x)=o(x).$$

换变数 $\sqrt[m]{1+x}-1=y$, 則

$$\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{1}{m}x}{x^2}=\frac{y-\frac{1}{m}((1+y)^m-1)}{((1+y)^m-1)^2}=\frac{-\frac{m-1}{2}y^2+\cdots}{m^2y^2+\cdots}=$$

$$=\frac{-\frac{m-1}{2}+\cdots}{m^2+\cdots}\to-\frac{m-1}{2m^2}.$$

所以又得到更精密的公式

$$\sqrt[m]{1+x}=1+\frac{1}{m}x-\frac{m-1}{2m^2}x^2+o(x^2);$$

换言之,

$$\sqrt[m]{1+x} \text{ 与 } 1,\ 1+\frac{1}{m}x,\ 1+\frac{1}{m}x-\frac{m-1}{2m^2}x^2$$

所差的无穷小的阶一个高于一个. 当然我們还能求出更精密的表示式来,这表示式称为原函数的主要部分. 在应用的时候,原函数与它主要部分的誤差往往可以略去不計.

例 8. 用 l 米长的直尺量直綫长度时, 因为沒有把尺准确地沿着直綫放好, 因此量得的結果往往比眞实的长度大一些. 假如尺的两端距直綫的距离都是 λ 米,今估計其誤差.

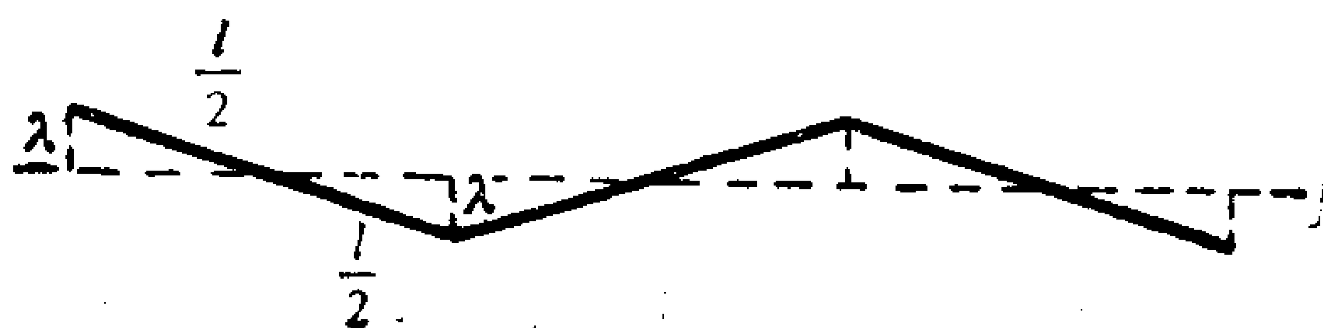


图 97

尺在直綫上的投影是

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\lambda^2}=l\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{l^2}}.$$

由于 λ 比 l 小得多，由例 7 投影长度可以换为

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)=l-\frac{2\lambda^2}{l}.$$

因此絕对誤差是 $\frac{2\lambda^2}{l}$，相对誤差是 $\frac{2\lambda^2}{l^2}$.

例 9. 求套在一对滑輪上的皮帶的长度. 滑輪的半径各为 R 及 r，中心的距离为 d，则

$$\frac{l}{2}=\overset{\frown}{AC}+Cc+\overset{\frown}{ca}.$$

由于 $\overset{\frown}{AC}=R\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\overset{\frown}{ca}=r\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 及

$$Cc=Do=\sqrt{d^2-(R-r)^2},$$

乃得

$$l=\pi(R+r)+2\alpha(R-r)+2\sqrt{d^2-(R-r)^2}.$$

若 $R-r$ 相对于 d 来說很小，则有

$$\alpha\doteq\sin\alpha=\frac{R-r}{d}$$

及

$$\sqrt{d^2-(R-r)^2}=d\left(1-\left(\frac{R-r}{d}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\doteq d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{R-r}{d}\right)^2\right],$$

故得

$$l\doteq\pi(R+r)+2d+\frac{(R-r)^2}{d}.$$

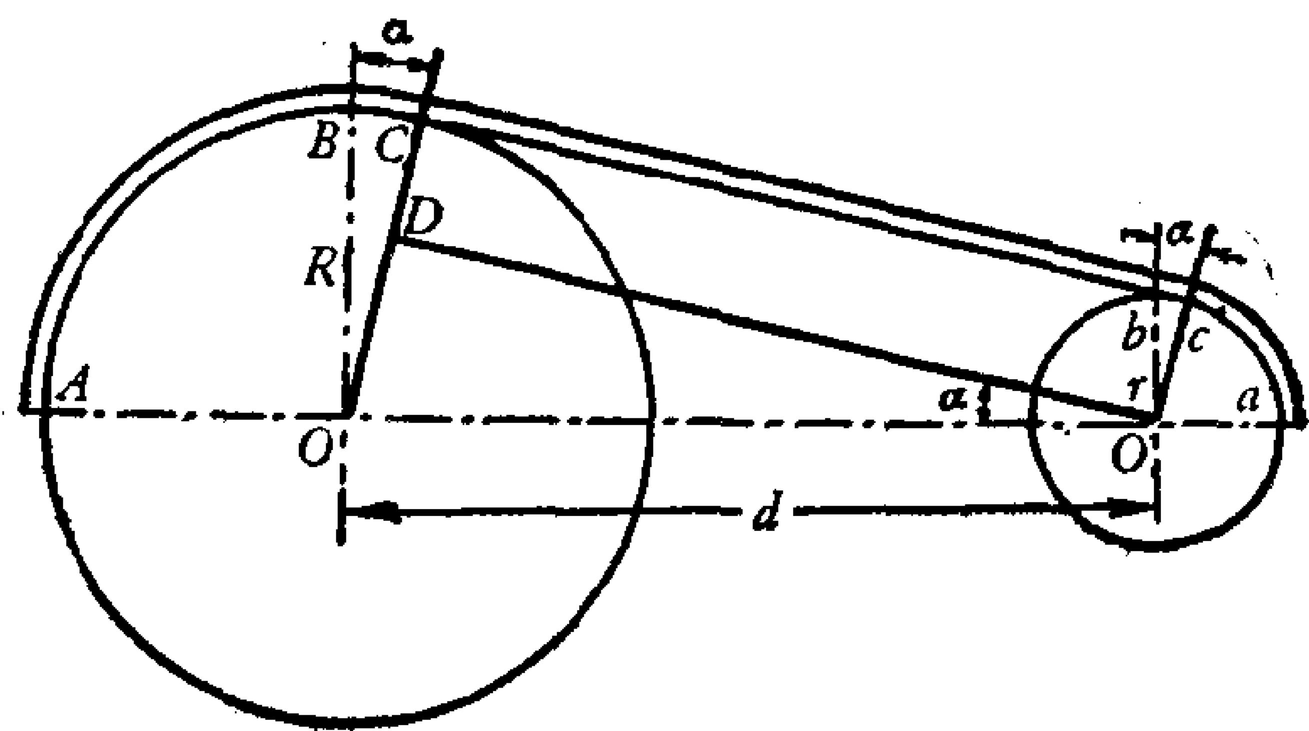


图 98

例 10. 求圓弧 ABC 內的矢 $f=DB$ 与其半弧 AB_1B 的矢 $f_1=D_1B_1$ 的比值. 若圓的半径为 r, $\angle AOB=\varphi$，则 $\angle AOB_1=\varphi/2$. 故

$$\frac{f}{f_1}=\frac{r(1-\cos\varphi)}{r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

当 $\varphi \to 0$,則由 §10 例 2 得到

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{f}{f_1}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}=4,$$

故当 φ 很微小时; $\frac{f}{f_1}$ 的值可以用 4 代之.

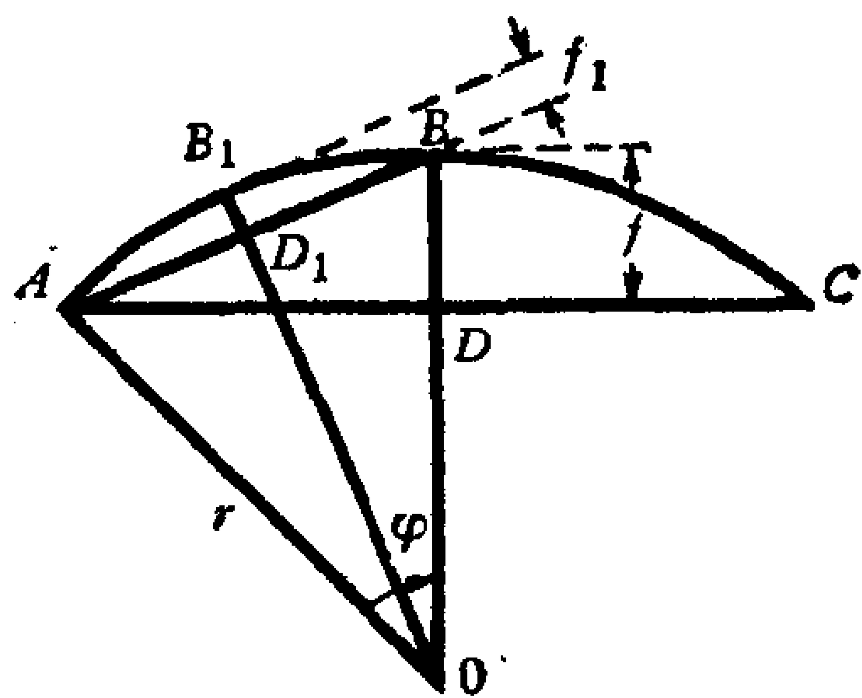


图 99

§14. 連續函数

定义. 命 $f(x)$ 是一函数，它在某一点 x_0 附近定义. 如果 $f(x_0-0)=f(x_0)=$ $=f(x_0+0)$,則称此函数在 $x=x_0$ 連續. 如果有 $f(x_0)=f(x_0+0)$,則称为右連續. 如果 $f(x_0)=f(x_0-0)$,則称为左連續.

使函数不連續的点称为函数的間断点.

例 1. $[x]$ 是一个函数,它在整数点上間断,而在其他点上連續.

如果函数 $f(x)$ 在一区間的每一点上都連續,則称 $f(x)$ 在这区間上連續.

請讀者細看第三章的函数的图形,看出那些函数在什么样的点上連續或間断.

定理 1. 若二函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 x_0 点上連續,則

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

都在那点上連續,但对商我們必須假定 $g(x_0)\neq 0$.

这可以直接从极限性質推出. 現在討論一些常用的連續性質.

定理 2. 如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处連續, 且 $f(x_0)=y_0$, 又 $\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 处連續,則 $\varphi(f(x))$ 在 $x=x_0$ 处也連續.

証. 給了任意 $\varepsilon>0$. 因为 $\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 連續,所以必有 σ,使当 $|y-y_0|<\sigma$ 时, $|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$; 另一方面, 因为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 連續, 所以必有 δ, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-y_0|<\sigma$,从而

$$|\varphi(f(x))-\varphi(f(x_0))|=|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon.$$

所以 $\varphi(f(x))$ 在 $x=x_0$ 連續.

1°. 有理函数.

$f(x)=x$ 显然是 $(-\infty,+\infty)$ 內的連續函数. 根据定理 1,

$$\overbrace{a\cdot x\cdot x\cdots x}^{m\text{次}}=ax^m$$

也連續;而

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$$

是連續函数的和所以也連續. 所以多項式(或称有理整函数)在 $(-\infty,\infty)$ 內是連續的.

两多項式的商(称为有理函数)

$$\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^l+b_1x^{l-1}+\cdots+b_{l-1}x+b_l}$$

除了在使分母为 0 的一些点上外,也是連續的.

2°. 指数函数.

假定 $a>1$. 如果我們能够証明

$$\lim_{x\to 0}a^x=1,$$

則得

$$\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{x\to x_0}a^{x_0+(x-x_0)}=a^{x_0}\lim_{y\to 0}a^y=a^{x_0}.$$

換言之, a^x 是一个連續函数.

由 § 1 例 3, 我們已經証明了

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1.$$

命 $\left[\frac{1}{x}\right]=n$, 則 $\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}$, 所以得到 $a^{\frac{1}{n+1}}<a^x\leqslant a^{\frac{1}{n}}$. 当 x 充分小时, 显然 $a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$, 而 $a^{\frac{1}{n+1}}>1-\varepsilon$, 所以 $|a^x-1|<\varepsilon$.

卽得所証.

关于 e^x 的图形見图 100.

3°. 对数函数.

$$y=\log x$$

是指数函数的反函数,在 $(0,\infty)$ 之間这函数是連續的.

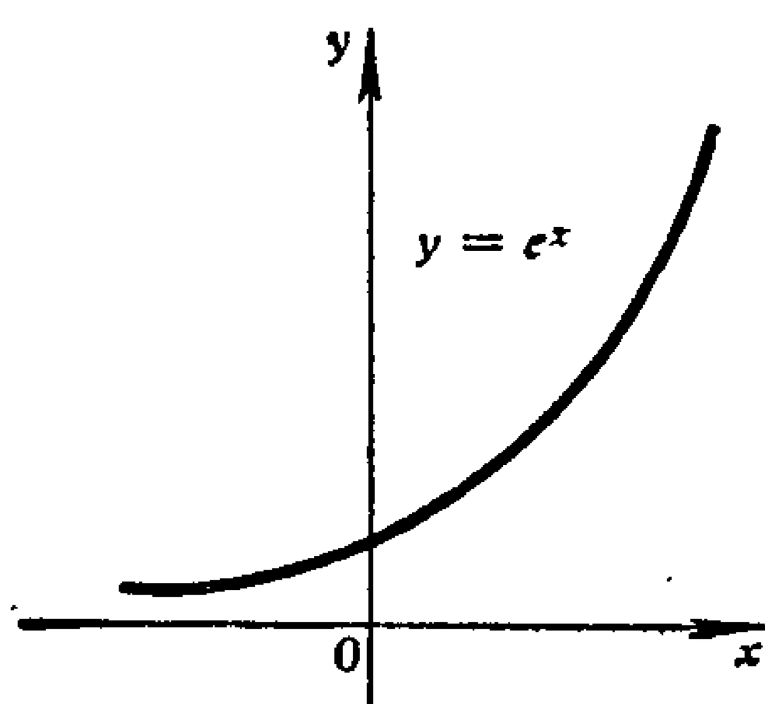


图 100

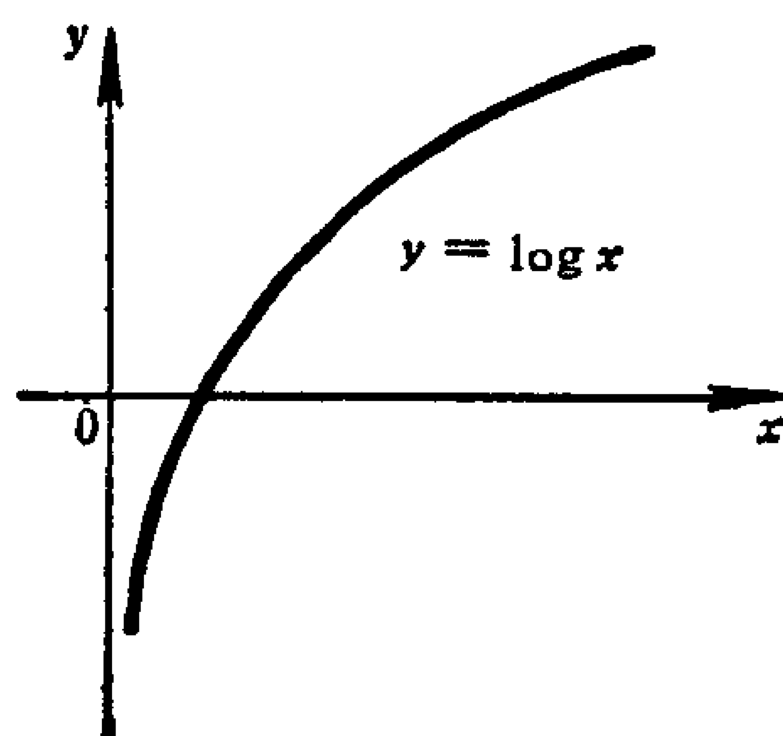


图 101

4°. 三角函数.

先証 $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. 由

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{1}{2}(x - x_0)\cos\frac{1}{2}(x + x_0)$$

可知

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2\left|\sin\frac{1}{2}(x - x_0)\right| \leqslant |x - x_0|,$$

此处用了 $|\sin x| \leqslant |x|$ 及 $|\cos x| \leqslant 1$. 因此 $\sin x$ 連續.

由于 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos x$ 也連續. 由

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

可知,除去使 $\cos x = 0$ 的諸点外, $\operatorname{tg} x$, $\sec x$ 都是連續的. 除去使 $\sin x = 0$ 的諸点外, $\operatorname{ctg} x$, $\csc x$ 都連續.

5°. 反三角函数.

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x$$

在 $[-1, +1]$ 之間連續;又

$$y = \operatorname{arc\,tg} x, \quad y = \operatorname{arc\,ctg} x$$

在 $(-\infty, \infty)$ 之間連續;而

$$y = \operatorname{arc\,sec} x, \quad y = \operatorname{arc\,csc} x$$

在 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ 間連續.

讀者不难研究 e^{e^x}, $\log\log x$, $\log\sin x$, $\log\operatorname{tg} x$ 等的連續性問題.

§15. 間 断 种 种

已經說过右連續和左連續，当然也就有右間断和左間断. 我們举些例子来識别間断性.

1）我們定义

$$y = \begin{cases} 0 & \text{若 } x \neq 0, \\ 1 & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

对此函数, $f(+0)$ 与 $f(-0)$ 都存在且都 $=0$. 但在 $x = 0$ 这一点上的值 $=1$,所以在 $x = 0$ 上不連續.

2）阶梯函数. 把区間 $[a, b]$ 分为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

定义

$$f(x) = y_\nu, \quad (\text{若 } x_{\nu-1} \leqslant x < x_\nu),$$

便得一阶梯函数. 显然

$$f(x_\nu - 0) = y_\nu, \quad f(x_\nu + 0) = y_{\nu+1},$$

$y_{\nu+1} - y_\nu$ 称为飞跃幅度,这种函数在应用中經常出現(图 102).

3）$y = f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$. 对于 $|x| > 1$,因为 $x^{2n} \to \infty$,所以 $f(x) = 1$; 又对

于 $|x|<1$，因为 $x^{2n}\to 0$，所以 $f(x)=-1$. 因此可知它在 $x=\pm 1$ 处各有一間断点（图 103）.

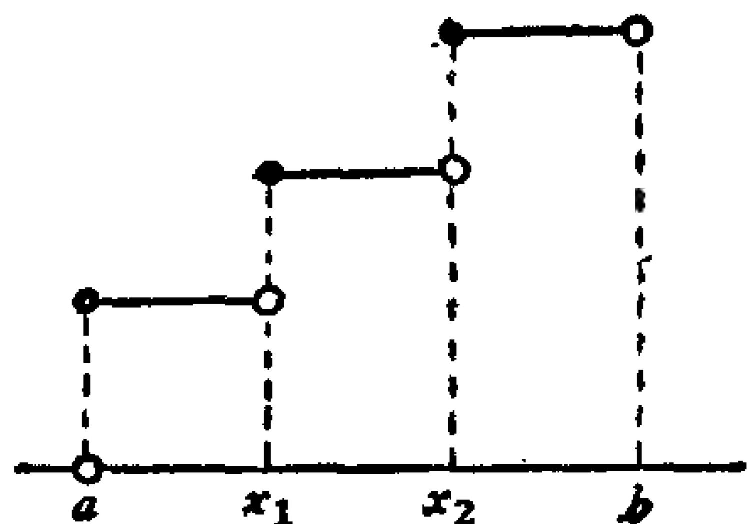


图 102

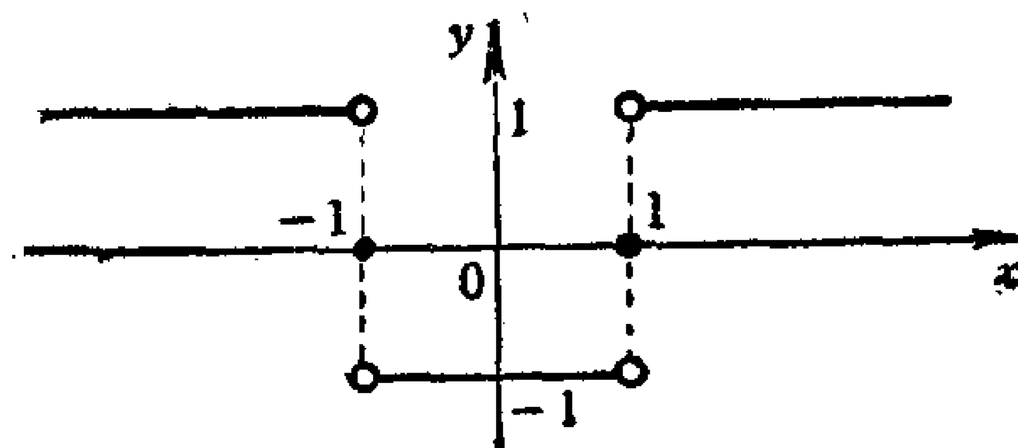


图 103

4) $f(x)=\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 不趋于极限，所以它在 $x=0$ 上不連續.

5) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$. 我們有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 故若定义 $f(0)=0$，这函数就为連續.

6) $\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 是有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$

这函数无处不間断.

7) 在 $(0,1)$ 之間我們定义 $f(x)$ 如下：如果 x 是有理数 $\frac{p}{q}$（既約分数），定义 $f(x)=\frac{1}{q}$；对无理数 x，則定义 $f(x)=0$. 可以証明，在任一有理点上，$f(x)$ 是間断的，而在任一无理点上，$f(x)$ 为連續.

証. 設 x_0 是区間中的任一点. 任意給出 $\varepsilon>0$，因为不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的正整数只有有限多个，故只有有限多个 $\frac{p}{q}$ 使 $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$. 取 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，使它不包含任何这种 $\frac{p}{q}$（可能要除去 x_0 本身），則有

$$|f(x)|<\varepsilon,\quad (0<|x-x_0|<\delta).$$

因此

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=0.$$

若 x_0 是无理数，則 $f(x_0)=0$. 故函数在无理点处連續. 又若 x_0 为有理数，則 $f(x_0)\neq 0$. 故任何有理点都是 $f(x)$ 的間断点.

§ 16. 連續函数的一些基本性質

定理 1. 假定函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a,b]$ 上連續，并且在 a,b 两点所取的値异号，則在 a,b 間必有一点 c，使

$$f(c)=0\quad (a<c<b).$$

也就是一条連續曲綫，从 x 軸的一边通到 x 軸的另一边时，它必与 x 軸相交.

証（Bolzano 法）．把 a, b 分为两等分，如果 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则定理已明．不然，在 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ 中必有一区間使 $f(x)$ 在其两端取异号，命之为 $[a_1, b_1]$，逐步进行得出 $[a_2, b_2]$，$[a_3, b_3]$，…一系列的、一个包有下一个的区間，而 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$．因为 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots$，$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \geqslant \cdots$，而 $b_n-a_n \to 0\ (n\to\infty)$，所以

$$\lim a_n = \lim b_n = c.$$

由于

$$f(c)=\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0, \quad f(c)=\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0,$$

所以 $f(c)=0$.

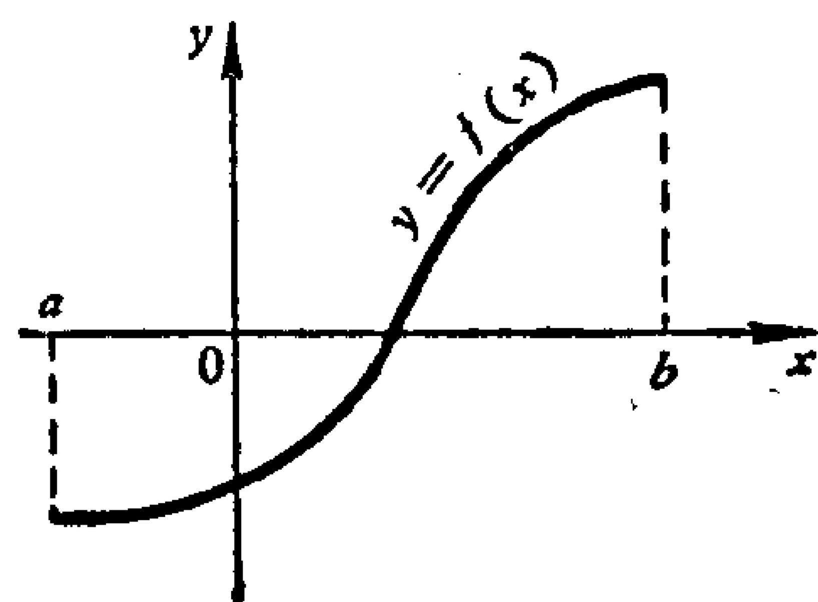


图 104

例 1. 解方程 $2^x=4x$.

这方程显然有一根 $x=4$，我們再找一根就困难了．但命 $f(x)=2^x-4x$，由 $f(0)= =1\geqslant 0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$ 可知，在 0 与 $\frac{1}{2}$ 之間有一根.

定理 2. 同上的假定．如果 $f(a)=A$，$f(b)=B$，则对 A, B 之間的任一数 C，一定有 $x=c$ 使 $f(c)=C$.

这定理就是上面定理的推論，研究 $f(x)-C$ 卽得所求.

定理 3（Weierstrass）．若函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 中連續，它必有界．換言之，一定存在二常数 m 与 M 使

$$m \leqslant f(x) \leqslant M. \tag{1}$$

証．用反証法．如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界，卽对任一自然数 n，在 $[a, b]$ 中一定有一 x_n，使

$$|f(x_n)| \geqslant n. \tag{2}$$

由 Bolzano 定理，在貫 $\{x_n\}$ 中可以选出一个子貫 $\{x_{n_k}\}$，使

$$x_{n_k} \to x_0, \quad (k\to\infty).$$

显然 $a\leqslant x_0 \leqslant b$．由于函数的連續性

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$$

这是不可能的，因为它和性質(2)相矛盾.

使(1)式成立的最小的 M，称为上确界；使(1)式成立的最大的 m，称为下确界.

定理 4（Weierstrass）．同上定理的假定，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 中一定取得到上确界与下确界.

換言之，在 $[a, b]$ 中必存在 $x=x_0$ 与 $x=x_1$，使 $f(x_0)$ 与 $f(x_1)$ 各为 $f(x)$ 的一切数值中的最大的和最小的.

証．命 M 是上确界．由定理 3 已知 M 为有限．我們也用反証法，假定恆有 $f(x)<M$，卽 $f(x)$ 不能达到 M．作函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)},$$

这是一个分母永不为 0 的函数，所以是連續的. 由定理 3 可知，它为有界，也即 $\varphi(x)\leqslant\mu$，$(\mu>0)$，因此得出

$$f(x)\leqslant M-\frac{1}{\mu}.$$

于是有一小于 M 的数 $M-\frac{1}{\mu}$ 成为 $f(x)$ 的上界. 这和上确界的定义矛盾，所以必有一 x_0，使

$$f(x_0)=M.$$

同法必有一 x_1，使 $f(x_1)=m$.

§ 17. Heine-Borel 定理

我們研究閉区間 $[a, b]$. 假定我們有一組开区間 σ，它們遮盖了閉区間 $[a, b]$. 也就是說，对 $[a, b]$ 中的任何一点，都有那組中的一个开区間 σ 包着这点. Heine-Borel 定理的結論是：

定理 1. 在这样的組中我們可以找出有限个开区間，使它們能够遮盖閉区間 $[a, b]$.

證. 我們用 Bolzano 的方法. 用反証法，也就是假定区間不能为这組內的有限个开区間所遮盖. 我們把 $[a, b]$ 分为两半，其中一定有一半不能为該組內的有限个 σ 所遮盖，命之为 $[a_1, b_1]$，再把 $[a_1, b_1]$ 分为两半，并用 $[a_2, b_2]$ 表示不能为有限个 σ 所遮盖的一半.

繼續进行，我們得出一个无穷序列

$$[a, b], [a_1, b_1], \cdots [a_n, b_n], \cdots.$$

每一个前面的包有后面的一个，而且长度趋于 0，它們都不能用有限个 σ 所遮盖，我們有

$$a\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots,$$
$$b\geqslant b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant\cdots,$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c.$$

这点 c 象 $[a, b]$ 中的任一点一样，一定被包括在某一 σ 內，令之为 $\sigma_0=(\alpha, \beta)$，則 $\alpha<c<\beta$. 当 n 充分大时，$[a_n, b_n]$ 也被包括在 (α, β) 之中，这与 $[a_n, b_n]$ 的性質矛盾.

若将开区間組 σ 改为閉区間組定理成立否？ 把閉区間 $[a, b]$ 改为开区間怎样？

这条定理在高等数学中十分有用，我們现在用它来处理連續函数的变差問題.

定义. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內的变差是指 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中最大値与最小値的差.

定理 2. 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 中的連續函数，我們能把 $[a, b]$ 分为有限部分：$[a, x_1]$，$[x_1, x_2]$，$\cdots$，$[x_n, b]$，使在每一部分中，函数 $f(x)$ 的变差都小于任一予給的正数 ε.

證. 我們扩大 $f(x)$ 的定义：当 $x<a$ 时，定义 $f(x)=f(a)$；又当 $x>b$ 时，定义

$f(x) = f(b)$. 命 ξ 为任一适合 $a \leqslant \xi \leqslant b$ 的点. 由 $f(x)$ 的連續性,我們可以找到 $\delta > 0$,使在

$$\sigma = (\xi - \delta, \xi + \delta)$$

中的任二点 x_1, x_2 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (这 δ 可能依賴于 ξ). 这样我們得出一个开区間組 Σ, 它遮盖了整个 $[a, b]$, 由 Heine-Borel 定理,其中可以取出有限个 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, 使它們遮盖 $[a, b]$.

这些区間的任二相邻者一定有重迭的部分,在重迭部分中取分点,从而得出适合定理要求的一組閉的分区間.

定理 3. 給与任一 $\varepsilon > 0$, 我們可以找到 $\delta > 0$, 使对任一长度不超过 δ 的閉区間, $f(x)$ 的变差常 $< \varepsilon$; 也就是: 对 $[a, b]$ 中任意二个适合 $|x_1 - x_2| < \delta$ 的数 x_1, x_2, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 这种性質,我們将称为一致連續性.

証. 取 $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$. 由定理 2, 可知存在一批分区間,在其中 $f(x)$ 的变差 $< \varepsilon_1$. 命 δ 为这些区間的最小长度, 长度 $< \delta$ 的任意一个分区間一定包在以上这些区間之一或相邻两个区間之內,因此在长度 $< \delta$ 的分区間內, $f(x)$ 的变差 $< 2\varepsilon_1 < \varepsilon$.

这定理在定积分理論中有基本重要性.

第五章　微　分

§1. 微商概念

我們現在先研究一个点作直綫运动的情况. 从一定点O算起,經过时間t,这点离O点的距离等于s. 如此s就是t的函数



图 105

$$s = f(t).$$

在一个一定的时刻t,有一个确定的对应的距离s. 若給t一个改变量Δt,在新时刻$t+\Delta t$时,距离是$s+\Delta s$. 比

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

就是在这一段时間內的平均速度.

在等速运动中,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$就是常数. 一般講来,平均速度就是假想一个作等速运动的点在时間区間Δt內經过距离Δs所应有的速度. 当$\Delta t \to 0$,这个比$\frac{\Delta s}{\Delta t}$的极限,給出在給定时刻$t$的速度

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

例如,对等加速运动,我們有

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$$

v_0是始速. 如此我們有

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} g(t+\Delta t)^2 + v_0(t+\Delta t) - \frac{1}{2} gt^2 - v_0 t \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + v_0 + \frac{1}{2} g \Delta t \right) = gt + v_0.$$

和距离一样,速度也是t的函数,这个函数叫做$s(t)$对t的微商函数. 我們說**速度是距离对时間的微商**(速度的量綱是LT^{-1}),微商有时也称为导数.

在热力学中三态变化有以下的情况:我們对一固体加热,假定它的初温是t_0. 在沒有达到融点之前,加热时物体的温度上升. 在达到融点而未全部变成液体状态时,加热时物体的温度不变,直到全变为液体以后,又开始上升. 由液体状态变为气体状态也有类似情况. 命Q表示物体所吸收的热量,它当然是温度t的函数.

在图 106 中以横坐标表温度t,縱坐标表吸收的热量Q. 固体轉化为液体的温度为

t_1，液体轉化为气体的温度为 t_2. 显然函数 Q 在 t_1 与 t_2 有二飞跃. 于是

$$\lim_{t\to t_1+0} Q - \lim_{t\to t_1-0} Q = BC$$

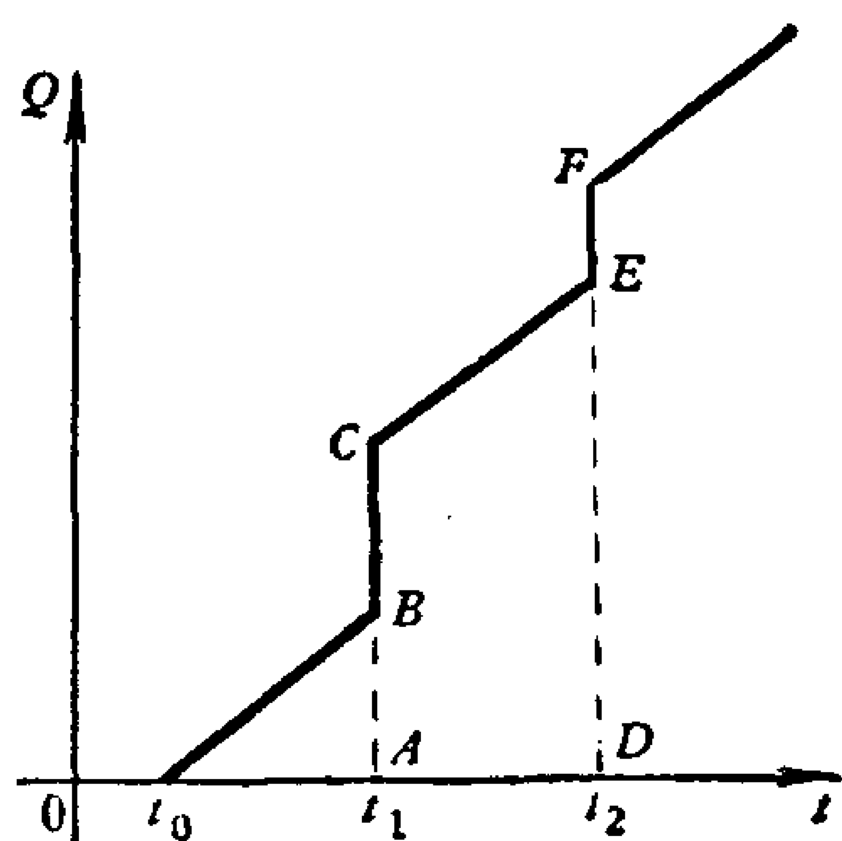


图 106

表示物体的融解热，而

$$\lim_{t\to t_2+0} Q - \lim_{t\to t_2-0} Q = EF$$

表示物体的汽化热.

在其他各点函数 Q 是 t 的連續函数. 命 Δt^0 及 ΔQ 各是温度与吸收热量的改变量，經过精确的測量証明 ΔQ 与 Δt^0 不是正比例的关系. 換言之，$\frac{\Delta Q}{\Delta t^0}$ 不是常数. 当 $\Delta t^0 \to 0$，这比的极限就是在温度 t^0 的这物体的比热. 比热就是物体所吸收的热量对温度的微商.

这些例子建議我們下面的微商的概念：

給定一个函数 $y = f(x)$，对应于自变量的改变量 Δx，函数的改变量是 Δy. 則当 $\Delta x \to 0$ 时，比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限(如果存在的話)叫做这函数的**微商**. 微商記成为 y' 或 $f'(x)$：

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

求微商的运算称为微分法，有时还記成为 f'_x 或 f_x.

当然，如果极限 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 并不存在，微商也就不存在. 如果 $f(x+\Delta x) - f(x)$ 不趋于 0，則微商显然不存在，所以对不連續函数我們是不能定义微商的. 但是并不是所有的連續函数都可以定义微商的.

和左极限及右极限相仿，我們可以定义左微商及右微商. 左微商的定义是

$$f'(x-0) = \lim_{\substack{h\to 0\\(h<0)}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

而右微商的定义是

$$f'(x+0) = \lim_{\substack{h\to 0\\(h>0)}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

§2. 微商的几何意义

我們考虑函数 $y = f(x)$ 所画出的曲綫. 联两点 (x, y) 与 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 的直綫是曲綫的割綫，这割綫的斜率是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，这割綫的极限位置就是通过点 (x, y) 的切綫. 所以

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

就是曲綫 $y = f(x)$ 在 (x, y) 这一点的切綫的斜率. 切綫与 x 軸的夹角是 α，則

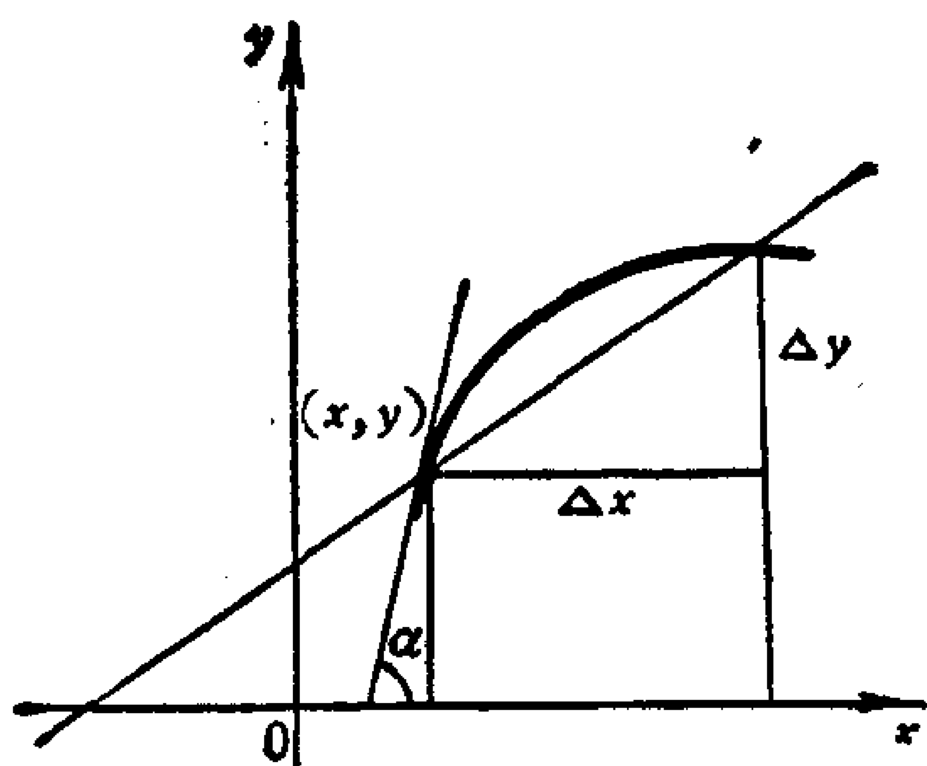


图 107

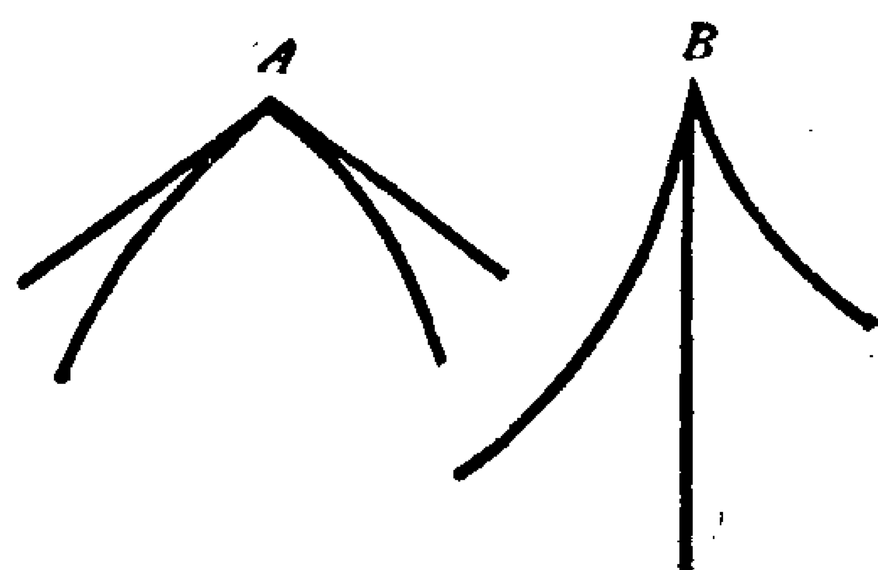


图 108

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

因此在曲綫上一点 (x_0, y_0) 的切綫方程是

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

如图 108 的 A 点，左微商与右微商是不同的，又如在 B 点的微商变为 ∞. 还有人举例說明有这样的連續函数存在，在任一点它都沒有微商.

再叙述另一个几何意义. 在 (x, y) 平面上画曲綫 $y = f(x)$. 假定它在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上是連續的，并且是单調上升的. 从 $x = a$ 到 $x = x$ 的长条內，曲綫以下，x 軸以上的面积，我們用 $A(x)$ 表它. 当 x 有一增量 Δx 时，面积增加了 $A(x + \Delta x) - A(x)$. 这一增加的面积显然在两长方形之間(如图 109 所示)，所以

$$f(x)\Delta x \leqslant A(x + \Delta x) - A(x) \leqslant f(x + \Delta x)\Delta x.$$

图 109

除以 Δx, 且命 $\Delta x \to 0$, 則得

$$f(x) \leqslant \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leqslant f(x),$$

卽得

$$A'(x) = f(x).$$

所以該面积的微商就等于定义曲綫的函数 $f(x)$.

更广泛地講来，在任何两个量之間，一个量的无穷小变化所应当得到的另一量的变化，都可以用微商来描繪. 特别經常用的是随时間 t 而变化的量 $Q(t)$. 微商 $Q'(t)$ 就是表达了这一量在一瞬間的变化率.

例如，速度 $v(t)$ 也是依时間而变化的. 瞬时的变化速率

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

就是加速度(加速度的量綱是 LT^{-2}).

又如 $Q(t)$ 表示从 0 到 t 秒时所流过导綫的横截面的电量(庫伦)，則

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t)$$

就是在所給时刻的电流强度，也就是电流强度是流过的电量对時間的微商.

§3. 函数的和、差、积、商的微商

首先我們知道

$$(u(x)\pm v(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\pm v(x+h)-(u(x)\pm v(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'(x)\pm v'(x).$$

所以如果 $u(x)$ 与 $v(x)$ 都有微商，則 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的和（或差）的微商就是 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的微商的和(或差).

又由

$$(u(x)v(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))v(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x)(v(x+h)-v(x))}{h}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

可知如果 $u(x)$ 与 $v(x)$ 都有微商，則 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的积的微商就是 $u(x)$ 乘 $v(x)$ 的微商加上 $v(x)$ 乘 $u(x)$ 的微商.

再用一次可以推导出

$$(u(x)v(x)w(x))' = u'(x)v(x)w(x)+u(x)(v(x)w(x))'$$

$$=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x).$$

以 $u(x)v(x)w(x)$ 除之,可見

$$\frac{(u(x)v(x)w(x))'}{u(x)v(x)w(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}+\frac{v'(x)}{v(x)}+\frac{w'(x)}{w(x)}.$$

讀者試由此推出 n 个函数相乘积微商的公式.

再研究

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{v(x+h)}-\frac{1}{v(x)}\right)$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x)v(x+h)}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=-\frac{v'(x)}{v^2(x)},$$

根据乘积的微商公式立得

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)}{v(x)}+u(x)\left(\frac{1}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v(x)^2}.$$

就是分式的微商等于分子的微商乘以分母減去分母的微商乘以分子，再以分母的平方除之.

§4. 初等函数的微商

1°. $y=c$（常数).

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0.$$

所以常数的微商是0.

由上面的乘积公式立得

$$(cu(x))' = cu'(x),$$

即一函数乘一常数的微商等于这函数的微商乘此常数。

2°. $y = x^n$, n是自然数。

現在用归納法来証明

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

易知

$$x' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = 1.$$

如果已知$(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$, 則由乘法公式

$$(x^n)' = (x^{n-1}\cdot x)' = x^{n-1}\cdot x' + (x^{n-1})'x = x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

再由除法公式,可知

$$(x^{-n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

并可推得

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

3°. $y = \log x \quad (x > 0)$.

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log(1+h/x)^{x/h} = \frac{1}{x}$$

此处用了以下的結果:給了$1 > \alpha > 0$, 必定有整数n, 滿足$\frac{1}{n+1} < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$; 故

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < (1+\alpha)^{1/\alpha} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

因此

$$\lim_{\alpha\to 0}\log(1+\alpha)^{1/\alpha} = \log e = 1.$$

又

$$(\log_a x)' = (\log x/\log a)' = \frac{1}{x\log a}.$$

4°. $y = \sin x$.

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos x$$

$\left(因为当\frac{h}{2}\to 0, 則\frac{2}{h}\sin\frac{h}{2}\to 1\right)$, 即得

$$(\sin x)' = \cos x.$$

5°. $y=\cos x$.

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=-\sin x,$$

即

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

6°. $y=\operatorname{tg} x$.

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

7°. $y=\operatorname{ctg} x$.

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\csc^2 x.$$

8°. $y=\sec x$.

$$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\sec x.$$

9°. $y=\csc x$.

$$y'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x\csc x.$$

§5. 复合函数的微商

假定 $y=f(x)$ 是区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的連續函数，这函数的数値在区間 $c\leqslant y\leqslant d$ 之中．再設 $z=F(y)$ 是一个在区間 $c\leqslant y\leqslant d$ 中的連續函数，則得复合函数

$$z=F(y)=F(f(x)).$$

現在有

$$z'=\lim_{h\to 0}\frac{F(f(x+h))-F(f(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(f(x+h))-F(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right).$$

命 $y=f(x)$ 及 $y+k=f(x+h)$，則得当 $h\to 0$ 有 $k\to 0$．得出

$$z'=\lim_{k\to 0}\frac{F(y+k)-F(y)}{k}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=F'(y)f'(x).$$

所以二复合函数的微商等于它对中間变量的微商与中間变量对于自变量的微商的乘积．

例 1．用

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\csc x=\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

从 $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\sec x$ 的微商公式推出 $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, $\csc x$ 的微商．

例 2.

$$(\log\sin x)' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \operatorname{ctg} x,$$

$$(\log\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = -\operatorname{tg} x.$$

求反函数的微商法則：假定 $y = f(x)$ 在区間 (a, b) 上連續且上升(当 x 增加 y 也增加)，而 $A = f(a)$，$B = f(b)$，則在区間 (A, B) 有一个唯一的反函数 $x = \varphi(y)$ 存在，不难証明在 (A, B) 上这函数也是連續的．即当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta y \to 0$，且反之亦然．

定理 1. 若 $f(x)$ 在 x_0 点有不等于 0 的微商，則反函数 $\varphi(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 点有微商

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

用 Δx 与 Δy 表 x, y 的对应的改变量，即

$$\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0), \qquad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

我們可以写成为

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

趋于极限便得所証．

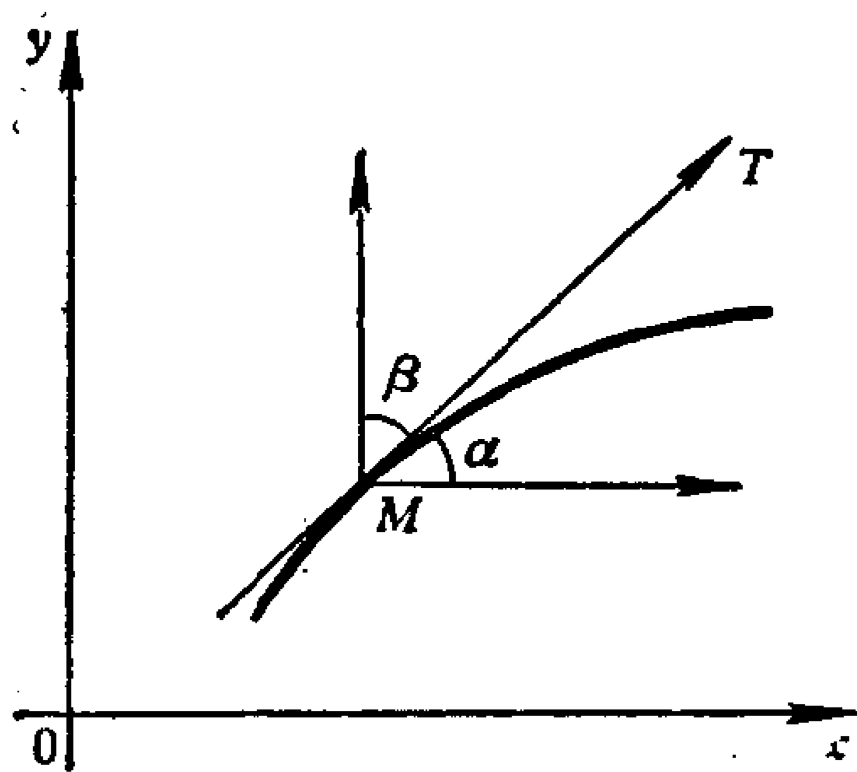


图 110

这定理的几何意义十分明显．函数

$$x = \varphi(y) \text{ 与 } y = f(x)$$

在平面上的图形是一样的，所不同的仅是考虑函数 $x = \varphi(y)$ 时，把 y 軸当作自变量．而考虑 $y = f(x)$ 时，把 x 当作自变量．

作切綫 MT (如图 110 所示)

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \ \alpha \text{ 是从 } x \text{ 軸轉往 } MT \text{ 的夹角},$$

$$\varphi'(y) = \operatorname{tg}\beta, \ \beta \text{ 是从 } y \text{ 軸轉往 } MT \text{ 的夹角}.$$

显然有

$$\beta + \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

所以

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \text{即 } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

1°. $y = x^{\frac{1}{n}}$ ($x \geqslant 0$, n 自然数)是 $x = y^n$ 的反函数，所以

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

又 $y = x^{\frac{p}{q}} = z^p$, $z = x^{\frac{1}{q}}$，即 y 是函数 z 的函数，所以

$$y' = (y(z))'z' = pz^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

2°. $y = a^x$ ($a > 0$) 的反函数是

$$x = \varphi(y) = \log_a y.$$

前已証明

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y}\frac{1}{\log a},$$

所以

$$(a^x)' = y \log a = a^x \log a.$$

特别当 $a = e$ 时，

$$(e^x)' = e^x.$$

3°. 对任一实数 α，考虑函数

$$y = x^\alpha \qquad (x > 0).$$

这函数可以写作

$$y = e^{\alpha \log x}.$$

用复合函数的微商法则有

$$y' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

現在研究反三角函数.

4°. $y = \arcsin x$.

这函数是多值函数. 我們仅考虑 $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ 中的一段. 这一函数看为 $x = \sin y$ 的反函数，所以

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这个根应取正号，因为 $\cos y$ 在区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是正的. 同法可得

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这里所考虑的是 $(0, \pi)$ 之間的一段.

另一方面，由 $x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$，所以知道

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

微分此式的两边也可以得到以上的公式.

5°. $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

現在取 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 間的一段，它是 $x = \operatorname{tg} y$ 的反函数，所以

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

同法

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6°. 讀者自証

$$(\operatorname{arc}\sec x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

及

$$(\operatorname{arc}\csc x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

7°. 考虑函数

$$y = u^v,$$

其中 u, v 都是 x 的函数。

将此函数写为

$$y = e^{v\log u}.$$

由复合函数的微商法则得到

$$y' = e^{v\log u}(v\log u)'.$$

再用乘积微商法则，得

$$y' = e^{v\log u}\left(v'\log u + \frac{v}{u}u'\right) = u^v\left(v'\log u + \frac{v}{u}u'\right),$$

$$= u^v v'\log u + vu^{v-1}u'.$$

§6. 双 曲 函 数

双曲函数是

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad (双曲正弦),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad (双曲余弦),$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad (双曲正切),$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x},\ x \neq 0 \qquad (双曲余切).$$

易知

$$\frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2},$$

即

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x\cdot\operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{sh} y.$$

同样有下面的恆等式

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh} y.$$

将 $y = x$ 代入，得

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

因此这些函数显得与三角函数非常相似，它們的图形如下：

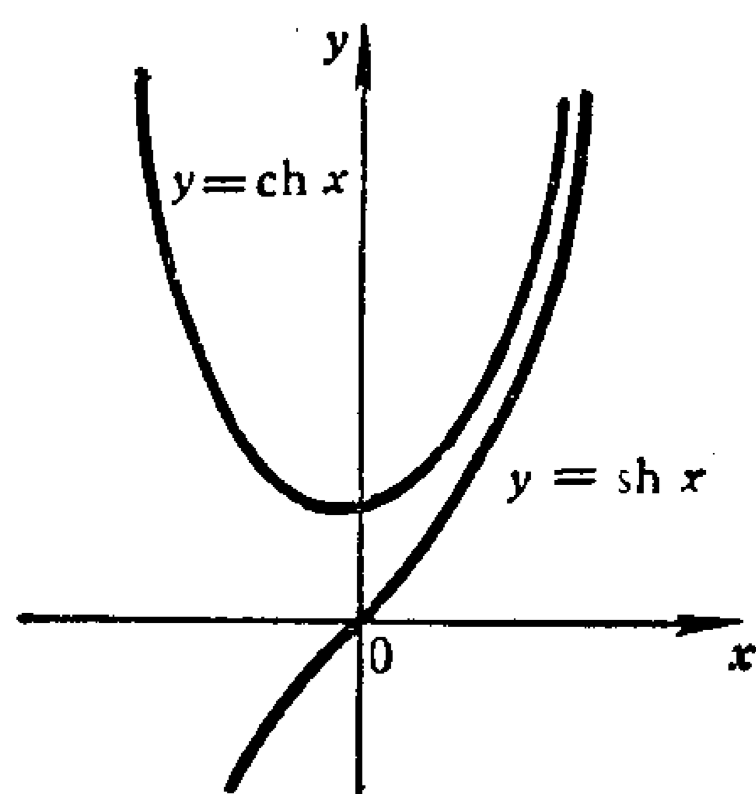


图 111

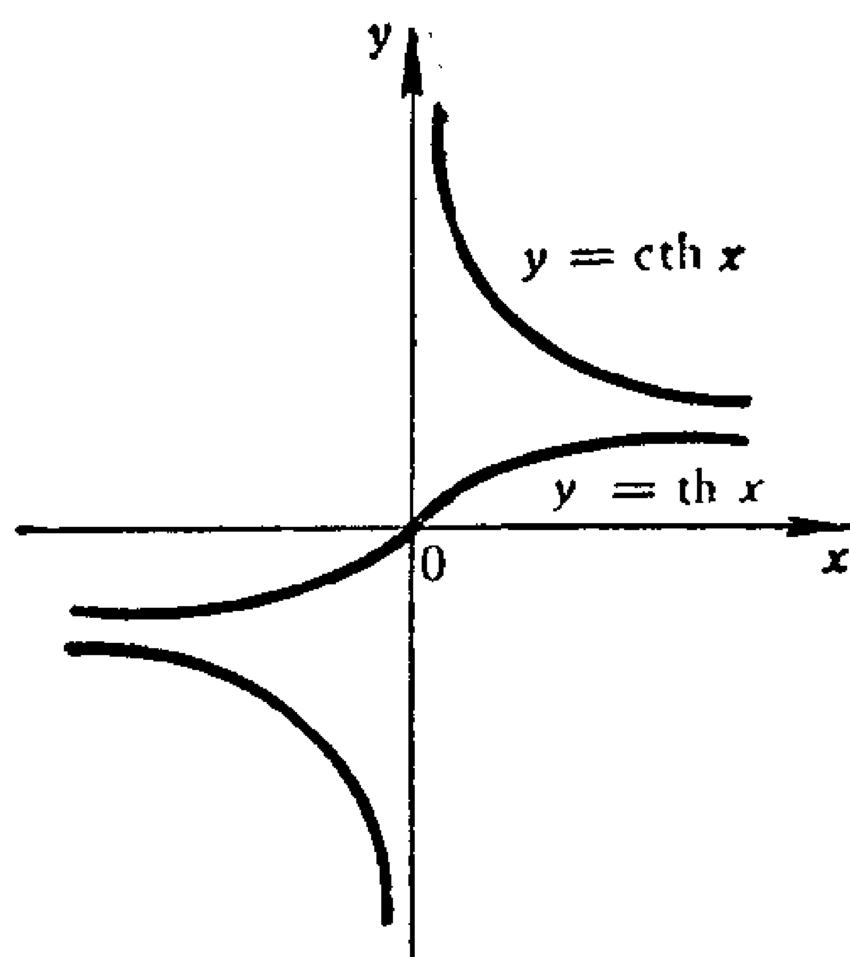


图 112

双曲函数的微商是

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot (\operatorname{sh} x)' - \operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{\operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch} x)' - \operatorname{ch} x \cdot (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

現在我們来求双曲函数的反函数.

命 $y = \operatorname{ch} x (-\infty < x < \infty)$，則

$$e^{2x} - 2y \cdot e^x + 1 = 0.$$

故得

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \qquad (y \geqslant 1),$$

$$x = \operatorname{arc\,ch} y = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1}).$$

因此反双曲余弦函数是一个双值函数，它对应于两个单值的支，各对应于 x 从 0 变至 $+\infty$ 以及从 $-\infty$ 变至 0。

同样求出

$$\operatorname{arc\,sh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

$$\operatorname{arc\,th} y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{1 - y} \qquad (|y| < 1),$$

$$\operatorname{arc\,cth} y = \frac{1}{2} \log \frac{y + 1}{y - 1} \qquad (|y| > 1).$$

它們的微商是

$$(\operatorname{arc\,ch} y)' = \frac{(y \pm \sqrt{y^2 - 1})'}{y \pm \sqrt{y^2 - 1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}},$$

$$(\text{arc sh } y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$(\text{arc th } y)' = \frac{1}{1-y^2}, \qquad (|y|<1)$$

$$(\text{arc cth} y)' = \frac{1}{1-y^2}. \qquad (|y|>1)$$

§7. 微商的公式表

1. $(c)' = 0,$
2. $(cu)' = cu',$
3. $(u_1 + \cdots + u_n)' = u_1' + \cdots + u_n',$
4. $(u_1 \cdot \cdots \cdot u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'u_3\cdots u_n + \cdots + u_1u_2\cdots u_n',$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},$
6. $(x^a)' = ax^{a-1},$
7. $(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\log a},$
8. $(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \log a,$
9. $(\sin x)' = \cos x,$
10. $(\cos x)' = -\sin x,$
11. $(\text{tg } x)' = \sec^2 x,$
12. $(\text{ctg } x)' = -\csc^2 x,$
13. $(\sec x)' = \text{tg } x \sec x,$
14. $(\csc x)' = -\text{ctg } x \csc x,$
15. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
16. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
17. $(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1+x^2},$
18. $(\text{arc ctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2},$
19. $(\text{arc sec } x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$
20. $(\text{arc csc } x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$
21. $(\text{sh } x)' = \text{ch } x,$

22. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$,

23. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,

24. $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$,

25. $(\operatorname{sh}^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

26. $(\operatorname{ch}^{-1} x)' = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}}$,

27. $(\operatorname{th}^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $\quad (|x|<1)$

28. $(\operatorname{cth}^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, $\quad (|x|>1)$

29. $y'_x = y'_u u'_x$（y 通过 u 依赖于 x），

30. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

§8. 例　题

例 1.

$$y = f(x)e^x.$$

$$y' = f'(x)e^x + f(x)e^x = (f(x) + f'(x))e^x.$$

特別如

$$((x^2 - 2x + 2)e^x)' = (x^2 - 2x + 2 + 2x - 2)e^x = x^2e^x,$$

$$((x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x)' = x^3e^x.$$

一般可証

$$((x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots)e^x)' = x^ne^x.$$

例 2.

$$y = \frac{ax+b}{x^2+1}.$$

$$y' = \frac{(ax+b)'(x^2+1) - (ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{a(x^2+1) - 2(ax+b)x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}.$$

例 3.

$$y = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}.$$

$$y' = \frac{(x\sin x + \cos x)'(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(x\cos x - \sin x)'}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + x\cos x - \sin x)(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(\cos x - x\sin x - \cos x)}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

例 4.

$$y = e^{-x^2}.$$

$$y' = e^{-x^2}(-x^2)' = -2xe^{-x^2}.$$

例 5.

$$y = (x^2 + x + 1)^n.$$

$$y' = n(x^2 + x + 1)^{n-1}(2x + 1).$$

例 6.

$$y = 2^{\sin x}.$$

$$y' = 2^{\sin x} \cdot \log 2 \cdot (\sin x)' = \log 2 \cdot \cos x \cdot 2^{\sin x}.$$

例 7.

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$y' = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{1 + x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

例 8.

$$y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}.$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)' = \frac{1}{4}\sec^{\frac{3}{2}}\frac{x}{2}\csc^{\frac{1}{2}}\frac{x}{2}.$$

例 9.

$$y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}.$$

$$y' = e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\sin^2 \frac{1}{x}\right)' = 2e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= -2\frac{1}{x^2}e^{\sin^2 \frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

例 10.

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}(x + \sqrt{x^2 + 1})'$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

例 11. 假定 $b-ac>0$,

$$y=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\log\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}},$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}}\cdot\frac{2\sqrt{b-ac}}{(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac})^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{ax+b}}$$

$$=\frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}.$$

例 12.

$$y=\frac{2}{\sqrt{ac-b}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}},$$

$$y'=\frac{2}{\sqrt{ac-b}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{ax+b}{ac-b}}\left(\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}\right)'=\frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}.$$

例 13. 假定 $|b|<a, |x|<\frac{\pi}{2}$, 求

$$y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}$$

的微商。

$$y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)'=\frac{1}{a+b\sin x}.$$

例 14. 假定 $|a|<|b|$, 設

$$y=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cos x}{a+b\sin x},$$

則

$$y'=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot\frac{a+b\sin x}{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cos x}\cdot\left(\frac{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cos x}{a+b\sin x}\right)'$$

$$=\frac{1}{a+b\sin x}.$$

例 15.

$$y=x^{\sin x}.$$

$$y'=(e^{\log x\sin x})'=e^{\log x\sin x}(\log x\sin x)'=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\log x\cos x\right).$$

例 16. 証明偶函数的微商是奇函数，奇函数的微商是偶函数。

由于 $(f(-x))'=-f'(-x)$, 明所欲証。

例 17. 求 $y=\log(|x|)$ 的微商。

当 $x>0$ 时，$y'=\frac{1}{x}$；当 $x<0$ 时，

$$y'=(\log(-x))'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x},$$

前式仍能适用.

例 18. 曲綫

$$y=ax^m \qquad (m>0)$$

在某点 (x, y) 的切綫的斜率是

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=max^{m-1}.$$

切綫在 x 軸上的投影

$$TP=\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{ax^m}{max^{m-1}}=\frac{x}{m}.$$

如此得一个在 M 点作切綫的簡易方法如下：M 点在 x 軸上的投影点命之为 P，作 OP 的 $\frac{1}{m}$ 长 TP，联上 TM 即为原曲綫的切綫(見图 113).

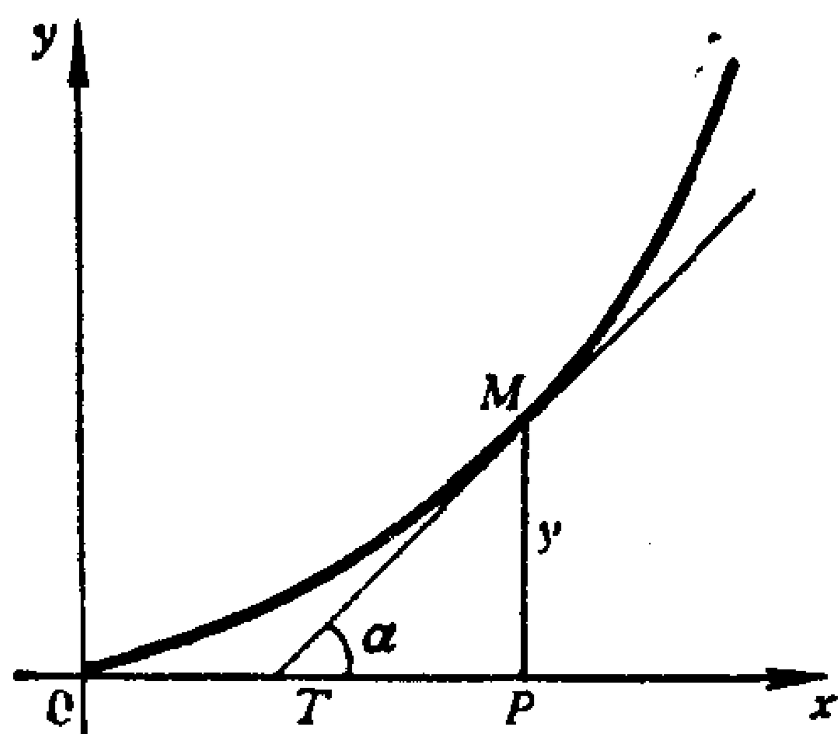


图 113

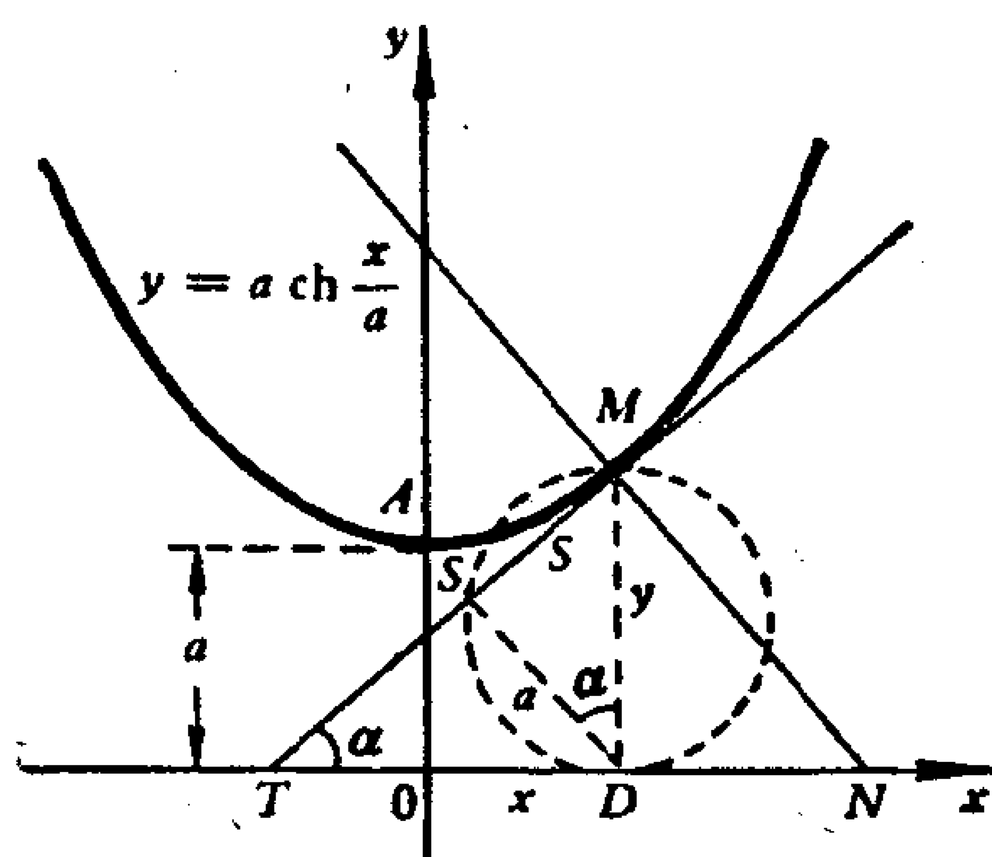


图 114

例 19. 悬鏈綫的方程是

$$y=a\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a} \qquad (a>0).$$

我們知道

$$\operatorname{tg}\alpha=y'=\operatorname{sh}\frac{x}{a},$$

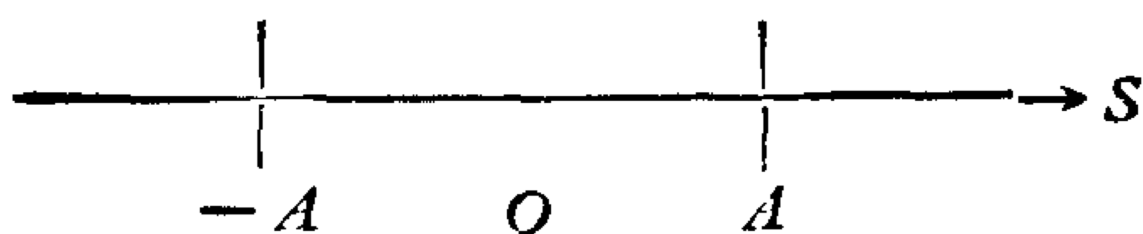
所以

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}}=\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}=\frac{a}{y}.$$

于是 $y\cdot\cos\alpha=a$. 若从縱标 $y=DM$ 的 D 作切綫 MT 的垂綫 DS，則綫段 DS 就等于 a. 由此再推得在所討論的曲綫上作切綫的簡易方法：把縱标 DM 当作直径作一半圓，以 D 为中心，a 为半径截取交点 S. 直綫 MS 就是切綫(图 114).

例 20. 簡諧振动. 一質点沿一軸在某一中心附近依下列規律的运动：

$$s = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$



称为简諧振动.

由于 $|\sin x| \leqslant 1$，所以这一质点在 $-A$ 与 A 之間摆动. A 称为振幅，起始点是

$$A \sin \alpha.$$

而 α 称为初相，这一运动經过时間 $\frac{2\pi}{\omega}$ 后回到原处，ω 称为频率.

求路程 s 对时間的微商，則得运动速度

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

当 $s = 0$ 时，卽經过中心，$v = \pm A\omega$ 速度达到最高点. 又当质点在最远处时 $(s = \pm A)$，速度为 0.

求 v 对 t 的微商:

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha),$$

这就是这一质点的运动的加速度. 显然有

$$a = -\omega^2 \cdot s.$$

引进动点的质量 m，依 Newton 定律，若简諧振动由力 F 的作用而产生，則这个力 F 可以表示为

$$F = ma = -m\omega^2 s.$$

由此可以看出，它是永远指向中心的(因为有与 s 相反的符号)，并且与点离中心的距离成比例.

例 21. 阻尼运动.

阻尼运动的規律是

$$s = Ae^{-kt} \sin \omega t \qquad (A, k, \omega > 0).$$

这一运动也是一个在中心附近所作的振动. 但是有因子 e^{-kt}. 当 $t \to \infty$，$e^{-kt} \to 0$，所以这一振动的振幅愈变愈小，逐渐地和中心点相重合，也就是

$$\lim_{t \to \infty} s = 0.$$

这一运动的速度和加速度各为

$$v = s'_t = Ae^{-kt}(\omega \cos \omega t - k \sin \omega t)$$

$$\begin{aligned} a = v'_t &= -Ae^{-kt}(\omega^2 \sin \omega t + 2\omega k \cdot \cos \omega t - k^2 \cdot \sin \omega t) \\ &= -Ae^{-kt}[(\omega^2 + k^2) \sin \omega t + 2k(\omega \cos \omega t - k \sin \omega t)] \\ &= -(\omega^2 + k^2)s - 2kv. \end{aligned}$$

假如这振动是由于力 F 的作用所发生的，則

$$F = -(\omega^2 + k^2)ms - 2kmv.$$

我們可以看出，它是由两种力合成的: (i) 与质点离中心的距离成正比的且指向中心的力(与简諧振动同样的力)及 (ii) 与速度成正比且与速度方向相反的阻力.

§9. 微　分

在以上几节中，我們已知 Δx 本身是一个自变量，与 x 无关. 我們把它叫做自变量的微分，用 Δx 或者 dx 表它. 注意，这个記号并不是 d 与 x 的乘积，dx 作为一个符号采用，这表示自变量的改变量，它与 x 无关.

一个函数的微商与自变量的微分的乘积，称为这个函数的微分. 用 dy 或 $df(x)$ 来記它，也就是

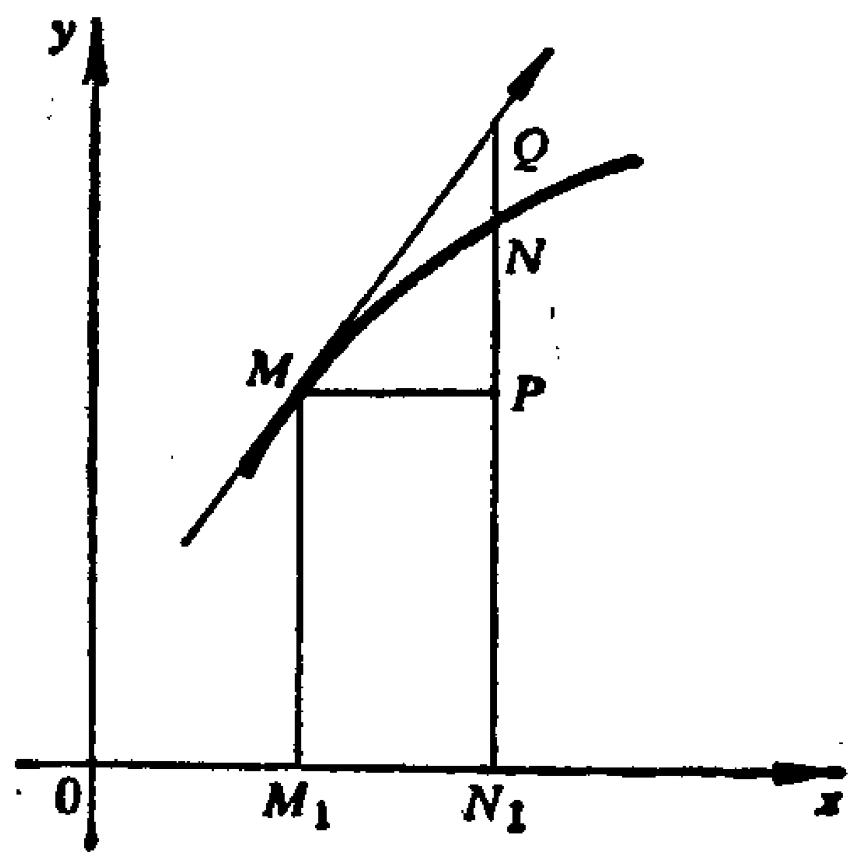


图 115

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

所以微商就是微分的商：

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

函数的微分是和它的改变量不一样的. 在曲綫上取一点 $M(x, y)$ 与另一点 N. 做切綫 MQ，作出 M 与 N 点的縱坐标及平行于 x 軸的直綫 MP. 現在

$$\overline{MP} = \overline{M_1N_1} = \Delta x \text{（或 } dx\text{）},$$

$$\overline{PN} = \Delta y \quad (y \text{ 的改变量}).$$

但是

$$dy = f'(x)dx = \overline{MP}\,\mathrm{tg}(\angle PMQ) = \overline{PQ}.$$

显然 $\overline{PQ}$ 并不是 $\overline{PN}$，也就是 dy 并不是 Δy.

虽然如此，但是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon, \qquad (\Delta x \to 0)$$

此处的 ε 是一个无穷小. 这一点不难証明，因为由定义就知道

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

所以

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

或者

$$\Delta y - dy = o(\Delta x).$$

这一公式說明了微分的一个重要特性：函数的微分和函数的改变量之差是自变量改变量 Δx 的高級无穷小. 微分的另一重要特性是：dy 是 dx 的綫性函数. 这两个特性完全决定了微分本身，换句話說，如果有一个量，同时具备上述两性質，那末这个量就是函数的微分.

根据这两个性質，很容易想到，用微分代替函数改变量来进行近似計算是很方便的.

我們可以立刻推出微分的一些基本性質：

1°. 常量的微分等于 0，即 $dc = (c)'dx = 0 \cdot dx = 0$.

2°. $d(u(x) + v(x)) = du(x) + dv(x)$.

3°. $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$，特别有 $d(cu(x)) = cdu(x)$.

4°. $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{1}{v(x)^2}[v(x)du(x) - u(x)dv(x)]$.

5°. 复合函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，則

$$dy = y'_x dx = f'(u)u'_x dx = f'(u)du.$$

这个式子告訴我們，不論 u 是中間变量或是自变量，函数 $y = f(u)$ 的微分永远可以写为 $dy = f'(u)du$，这就是所謂一阶微分形式的不变性. 以后我們将看到，对高阶微分就不复有此性质了.

不难推得常用的公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

例.

$$y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 10.$$

在 $x = 2$ 与 $\Delta x = 0.01$ 时

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.240801.$$

另一方面，

$$dy = f'(x)dx = (3 \times 2^2 + 4 \times 2 + 4)0.01 = 0.2400.$$

dy 与 Δy 相同到三位小数.

§ 10. 誤差的估計

当实际測量或不精确地計算时（如四舍五入法），任何一个量 x 可能有誤差 Δx. Δx 称为絕对誤差，而

$$\frac{\Delta x}{x}$$

称为相对誤差. 設 $y = f(x)$，由确定 x 时的誤差 Δx，y 所产生的誤差为 Δy. 当 Δx 的值很小时，我們可以取微分 dy 作 Δy 的近似值. 因而要測的量 y 的相对誤差就差不多是

$$\left|\frac{dy}{y}\right|.$$

例 1.

$$\left|\frac{d(uv)}{uv}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|,$$

$$\left|\frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{\frac{v}{u}}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|.$$

这就是第一章所涉及的积、商的誤差估計公式.

例 2. 求半径发生誤差时，圓面积的誤差.

$$Q = \pi r^2 \qquad dQ = 2\pi r dr$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = 2\frac{dr}{r}.$$

面积的相对誤差大約等于半径的相对誤差的两倍.

例 3. 求对数的誤差. 当 x 有一誤差时,求 x 的常用对数 $y = \log_{10} x$ 的誤差,此处

$$y' = \frac{M}{x} \qquad (M \doteq 0.4343).$$

所以

$$dy = 0.4343\frac{dx}{x},$$

即 x 的对数 y 的絕对誤差,单純地依賴于 x 本身的相对誤差而确定.

用这公式可以估計我們常用的 25 厘米(= 250 毫米)的对数尺的准确度. 在放置瞄准器或計数时可能发生誤差,例如可能誤差在左右各十分之一毫米之間,則对数上对应的誤差:

$$dy = \frac{0.1}{250} = 0.0004.$$

依我們的公式

$$\frac{dx}{x} = \frac{0.0004}{0.4343} = 0.00092\cdots \doteq 0.001.$$

計数的相对准确度在算尺的任何部分是相同的.

例 4. 在依三角函数的对数表而求角 φ 时,我們发生了这样的一个問題,用正弦表或正切表那一种更为有利.

$$y_1 = \log_{10}\sin\varphi \text{ 及 } y_2 = \log_{10}\operatorname{tg}\varphi,$$

假定 y_1, y_2 的絕对誤差 dy_1, dy_2 是相等的, 如果用 $d_1\varphi$ 与 $d_2\varphi$ 表示角 φ 的对应的誤差, 則

$$dy_1 = \frac{M}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot d_1\varphi = \frac{M}{\operatorname{tg}\varphi}d_1\varphi,$$

$$dy_2 = \frac{M}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\sec^2\varphi d_2\varphi,$$

即得

$$d_2\varphi \doteq d_1\varphi\cdot\cos^2\varphi < d_1\varphi.$$

由此可見,对数值有同等的誤差时,正切对数表所給的角比正弦对数表所給出的角有較小的誤差,也就是說用前者更为有利.

例 5. 利用正切电流計确定电流強度时,用公式

$$i = k\operatorname{tg}\varphi.$$

假定讀角度的誤差是 $d\varphi$, 則

$$di = \frac{kd\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\frac{di}{i}=\frac{kd\varphi}{k\cos^2\varphi\operatorname{tg}\varphi}=\frac{2}{\sin 2\varphi}d\varphi.$$

由此看出，当 φ 接近 $45°$ 时，确定 i 时的相对誤差較小。

漸近式。命 $\Delta x=x-x_0$，則由

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

可知

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\to f'(x_0).$$

所以我們不妨把 $(x-x_0)f'(x_0)$ 看做为 $f(x)-f(x_0)$ 的漸近式。我們用

$$f(x)-f(x_0)\doteq(x-x_0)f'(x_0)$$

表它，也就是

$$f(x)\doteq f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0).$$

特别，如 $x_0=0$，則

$$f(x)\doteq f(0)+xf'(0).$$

例如，

$$(1+x)^\lambda\doteq 1+\lambda x,$$

特别，

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}\doteq 1+\frac{1}{2}x.$$

$$e^x\doteq 1+x,\qquad \log(1+x)\doteq x,\qquad \sin x\doteq x,\qquad \operatorname{tg}x\doteq x.$$

例 6. 悬鏈綫.

設有两端悬挂着的有重量的鏈条（图 116），鏈长为 s，跨度为 l，垂度为 f，則經常用近似公式

$$s\doteq l+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l}$$

（实质上应当是 $s=2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}$ 而 k 由 $f=2k\operatorname{sh}\frac{l}{4k}$ 确定）。

把 f 当做自变数，

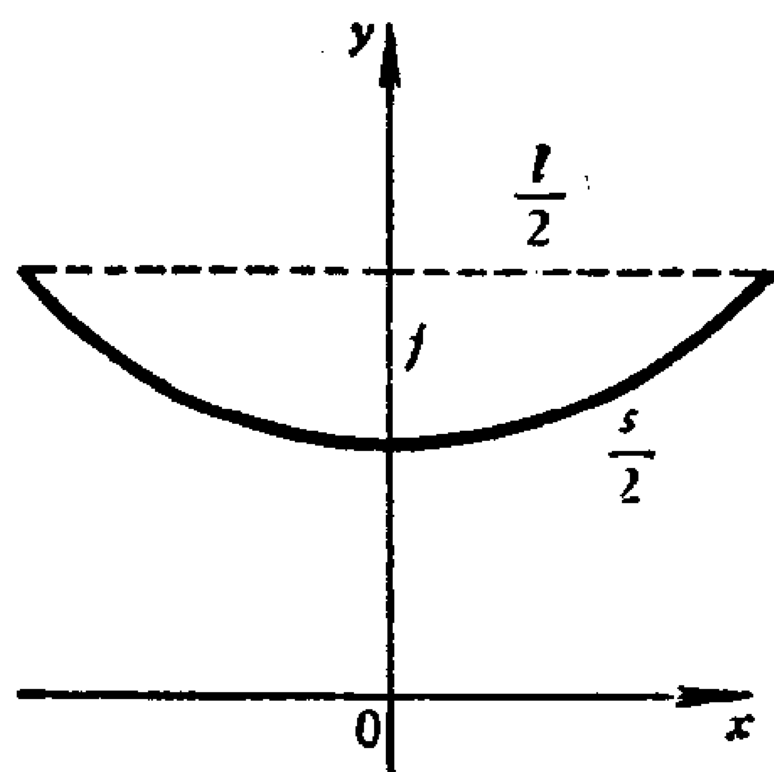


图 116

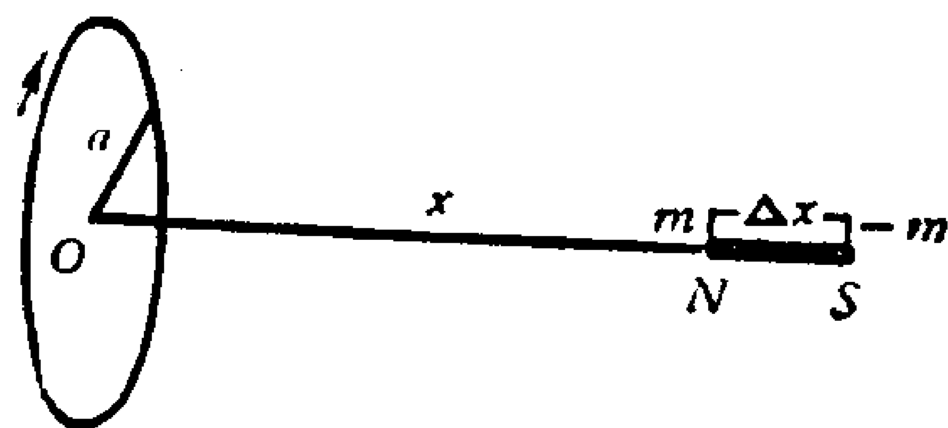


图 117

$$ds \doteq \frac{16}{3}\frac{f}{l}df, \qquad df \doteq \frac{3l}{16f}ds.$$

例如、我們估計到由于溫度所引起的长度的变动,便可以預見垂度 f 所产生的变动.

例 7. 已知圓形电流作用于位在其軸上且与圓中心 O 距离为 x 的单位磁极的力是

$$\frac{k}{(a^2+x^2)^{3/2}},$$

此处 k 是常数, a 为半径. 求沿軸,在 x 处放置一块长度为 Δx 的磁鉄 NS 所受圓形电流作用的力(图 117). 算作在 N 极集中着正磁量 m,而在 S 极集中着与它相等的負磁量 $-m$

电流作用于磁鉄的力 F 可以表示为

$$F \doteq \frac{km}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{km}{(a^2+(x+\Delta x)^2)^{3/2}} = -km\cdot\Delta\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\right]$$

$$\doteq -km\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\right]\Delta x = \frac{3kmx\Delta x}{(a^2+x^2)^{5/2}}.$$

§11. 高 阶 微 商

在开始的时候,我們就已經說明过速度是距离对时間的微商,而加速度又是速度对时間的微商. 所以加速度是由距离对时間連續求二次微商而得来的,这称为二阶微商,即

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt}.$$

我們写成为 $a = \frac{d^2s}{dt^2} = s''$.

一般講来,我們用归納法来定义高阶微商. $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶微商 $y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x)$ 的微商(如果存在)称为 n 阶微商,以 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ 来表它. 在 $x=x_0$ 这一点的微商值以

$$f^{(n)}(x)\big|_{x=x_0}$$

表示.

例如,

$$y = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$$

則

$$y' = 4ax^3+3bx^2+2cx+d,$$
$$y'' = 12ax^2+6bx+2c,$$
$$y''' = 24ax+6b,$$
$$y^{\text{IV}} = 24a.$$

以后的各級微商都等于 0.

又如

$$y = \log(x+\sqrt{x^2+1}),$$

則

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad y'' = -\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad y''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}, \text{等等.}$$

高阶微商当然也都有一阶微商所出现的各式各样的现象，如左微商，右微商等.

显然有

$$(cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)},\ (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

再举一例子.

1）命 u 为任何实数，$y = x^u$，我們依次有

$$y' = ux^{u-1},\ y'' = u(u-1)x^{u-2},\ \cdots,$$

一般有

$$y^{(n)} = u(u-1)\cdots(u-n+1)x^{u-n}.$$

我們用归納法証此公式.

$$\begin{aligned}(y^{(n)})' &= u(u-1)\cdots(u-n+1)(x^{u-n})' \\ &= u(u-1)\cdots(u-n+1)(u-n)x^{u-n-1} = y^{(n+1)},\end{aligned}$$

特例. $u = -1$，則

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}};$$

$u = -\frac{1}{2}$，則

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-n} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

2）命 $y = \log x$，由

$$y' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

可知，

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3）命 $y = a^x$，則

$$y^{(n)} = a^x \cdot (\log a)^n,$$

特別有

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

4）命 $y = \sin x$，則

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi),$$

一般有

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

我們用归納法証明此式.

$$(y^{(n)})' = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

同法可得

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

5）命 $y = \frac{1}{x^2 - a^2}$，由于

$$y = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

立即得到

$$\left(\frac{1}{x^2 - a^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left\{\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right\}.$$

6）命 $y = e^{ax}\sin bx$，則

$$y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx.$$

引入輔助角 φ，

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

則

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\{\sin bx\cos\varphi + \cos bx\sin\varphi\} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+\varphi), \end{aligned}$$

一般地，由归納法可以建立

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+n\varphi).$$

7）命 $y = \operatorname{arc\,tg} x$，則 $x = \operatorname{tg} y$，

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \\ y'' &= \left[-\sin y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) + \cos y\cdot\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]y' = \\ &= \cos^2 y\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right). \\ y''' &= \left[-2\sin y\cdot\cos y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos^2 y\cos 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y' \\ &= 2\cos^3 y\cdot\cos\left(3y+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^3 y\cdot\sin 3\left(y+\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

一般地，由归納法可以建立

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

当 $x > 0$ 时，引入角 z：

$$z = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - y,$$

則上式成为

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (n-1)!\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 y)^{n/2}}\sin n(\pi - z) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+x^2)^{n/2}}\sin nz \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+x^2)^{n/2}}\sin\left(n\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

8）命 $y_n = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$，則

$$y_1' = (e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}},$$

$$y_2'' = (xe^{\frac{1}{x}})'' = \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}.$$

一般地

$$y_n^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

我們用归納法来証明此式：

$$y_{n+1}^{(n+1)} = \left[\frac{d}{dx}(x^n e^{\frac{1}{x}})\right]^{(n)} = \left[nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}} - x^{n-2}e^{\frac{1}{x}}\right]^{(n)}$$

$$= n(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} - (x^{n-2}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}$$

$$= n\cdot(-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} - \left[(-1)^{(n-1)}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\right]' = (-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}}.$$

9）微商还有下面的应用．一个多項式 $f(x)$ 如果可以被 $(g(x))^l$ 所除尽，則 $f'(x)$ 一定能为 $(g(x))^{l-1}$ 所除尽．特別有，如果 $f(x) = 0$ 有 $x = \alpha$ 为其 l 重根，則 $f'(x) = 0$ 有 $x = \alpha$ 为其 $l-1$ 重根．

証．由假定显然可見

$$f(x) = (g(x))^l k(x).$$

求微分可知

$$f'(x) = l(g(x))^{l-1}g'(x)k(x) + (g(x))^l k'(x) = (g(x))^{l-1}(lg'(x)k(x) + g(x)k'(x)).$$

另一方面，如果 $f'(x) = 0$ 有一个 $l-1$ 重根 $x = \alpha$，这并不能說明 $f(x)$ 有 $x = \alpha$ 做根．但是能够說 $f(x) - f(\alpha)$ 以 $x = \alpha$ 为其 l 重根．这一証明是不难的，从略．

§12. Leibnitz 公式

定理． 如果 u, v 都是 x 的函数，各自有 n 級为止的各級导数，則

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}v^{(i)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdots i}u^{(n-i)}v^{(i)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

我們用了如下的符号：

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \left(\text{有时也記为} \binom{n}{i} = C_n^i\right).$$

証．我們已經知道这一公式当 $n = 1$ 时是正确的，現在行归納法．

$$(uv)^{(n+1)}=((uv)^{(n)})'=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}v^{(i)}\right)'=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(u^{(n-i)}v^{(i)})'$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(u^{(n-i+1)}v^{(i)}+u^{(n-i)}v^{(i+1)})=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i+1)}v^{(i)}+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^{(n-i)}v^{(i+1)}=u^{(n+1)}v+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]u^{(n-i+1)}v^{(i)}+uv^{(n+1)},$$

因为

$$\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}=\binom{n+1}{i}.$$

即得所求。

Leibnitz 公式与二項式定理 $(u+v)^n$ 有相同的結构. 实質上，多个因子的连乘积 $y=uv\cdots t$ 的 n 級微商也有一个与 $(u+v+\cdots+t)^n$ 的展式相类似的公式.

現在举一些例子.

1) 命 $v=x^2$, $u=\cos ax$, 則

$$v'=2x,\ v''=2,\ v^{(3)}=v^{(4)}=\cdots=0,\ u^{(k)}=a^k\cos\left(ax+\frac{k\pi}{2}\right).$$

故

$$(x^2\cos ax)^{(50)}=x^2\cdot a^{50}\cdot\cos\left(ax+50\frac{\pi}{2}\right)+50\cdot 2x\cdot a^{49}\cdot\cos\left(ax+49\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 2\cdot a^{48}\cdot\cos\left(ax+48\cdot\frac{\pi}{2}\right)=a^{48}\{(2450-a^2x^2)\cos ax-100ax\cdot\sin ax\}.$$

2) 命 $u=e^{ax}$, $v=\sin bx$, 則

$$(uv)^{(n)}=e^{ax}\left\{\sin bx\cdot\left(a^n-\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\cdots\right)+\right.$$

$$\left.+\cos bx\left(na^{n-1}b-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots\right)\right\}.$$

3) 命 $y=\arcsin x$, 求 $y^{(n+1)}$.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

命 $u=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, $v=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, 由(11.1)得出

$$y^{(n+1)}=(uv)^{(n)}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n)}\frac{1}{\sqrt{1-x}}+n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(2)}+\cdots$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{(2n)!}{n!(1+x)^n}-n\frac{(2n-2)!\,2!}{(n-1)!1!(1+x)^{n-1}(1-x)}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-4)!\,4!}{(n-2)!2!(1+x)^{n-2}(1-x)^2}-\cdots\right\}.$$

4) 命 $y_a^{(n)}$ 表示当 $x=a$ 时 $y^{(n)}$ 的数值，求 $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$ 的各級微商在 $x=0$ 时的数值.

由于 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, 所以

$$(1+x^2)y'=1.$$

等式两端取 n 級微商，得

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0.$$

因此

$$y_0^{(n+1)}=-n(n-1)y_0^{(n-1)}.$$

由于

$$y_0'=1,\ y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ y_0''=0,$$

得

$$y_0^{(2m)}=0 \qquad (m=1,2,\cdots),$$
$$y_0^{(2m+1)}=(-1)^m(2m)! \quad (m=0,1,2,\cdots).$$

5) 命 $X_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$. 这多項式称为 n 次 Legendre 多項式. 現在来求 $X_n(1)$ 与 $X_n(-1)$.

命 $u=(x+1)^n$, $v=(x-1)^n$, 則

$$X_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\{(x+1)^n[(x-1)^n]^{(n)}+C_n^1[(x+1)^n]'[(x-1)^n]^{(n-1)}+\cdots$$
$$+[(x+1)^n]^{(n)}(x-1)^n\}.$$

因此立即得到

$$X_n(1)=1,\ X_n(-1)=(-1)^n.$$

还可以証明 $X_n(x)$ 满足关系式

$$(x^2-1)X_n''+2x\cdot X_n'-n(n+1)X_n=0.$$

命 $y=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}(x^2-1)^n$, 則

$$y'=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot 2nx(x^2-1)^{n-1},$$

$$(x^2-1)\cdot y'=2nx\cdot y.$$

两边取 $(n+1)$ 阶微商，即明所欲証.

§13. 高 阶 微 分

高阶微分也是用归納法来定义的. 一阶微分的微分謂之二阶微分

$$d^2y=d(dy).$$

而

$$d^ny=d(d^{n-1}y).$$

命 $y=f(x)$, 則

$$dy=f'(x)dx.$$

而

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx^2$$

及

$$d^3y = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3.$$

易見一般有

$$d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n,$$

或可以写成为

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

而 Leibnitz 的公式就变为

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d^{n-i}ud^iv$$

(此处 $d^0u = u$, $d^0v = v$).

但需注意,对于复合函数

$$y = f(x), \qquad x = \varphi(t).$$

有与一阶微商不同的情况,現在有

$$dy = y'_x \cdot dx,$$

其中 dx 并不是一个自变量, $dx = x'_t dt$ 是一个与 t 有关的函数. 所以

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d(y'_x)dx + y'_x d(dx) \\ &= (y'_x)'_x dx^2 + y'_x d^2x = y''_{x^2}dx^2 + y'_x d^2x. \end{aligned}$$

当 x 是自变量时, $d^2x = 0$, 所以得出 $d^2y = y''_{x^2}dx^2$. 在这一情况时,第二項不見了.

例如, $y = x^2$. 把 x 当作自变数时

$$dy = 2xdx, \qquad d^2y = 2dx^2.$$

但是如果命 $x = t^2$, 即 $y = t^4$, 則

$$dy = 4t^3dt, \qquad d^2y = 12t^2dt^2.$$

如果把 $x = t^2$, $dx = 2tdt$ 代入,且把 x 当作自变量所得出的式子为

$$d^2y = 2(2tdt)^2 = 8t^2dt^2,$$

而不是 $12t^2dt^2$. 算錯了的原因是,我們没有注意到 x 并非自变数, 而是自变数 t 的函数. 应当代入的公式是

$$d^2y = y''_{x^2}dx^2 + y'_x d^2x = 2dx^2 + 2xd^2x = 2(2tdt)^2 + 2 \cdot t^2 2dt^2 = 12t^2dt^2.$$

参变数表示法的高阶微商. 命

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

我們可以把所有的微分都看成为对 t 的微分,如此則

$$y'_x = \frac{dy}{dx},$$

$$y''_{x^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{dxd^2y - d^2xdy}{dx^2}}{dx},$$

即

$$y''_{x^2}=\frac{dxd^2y-d^2xdy}{dx^3}.$$

又

$$y'''_{x^3}=\left(\frac{dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy}{dx^3}\right)'_x=\frac{d\left(\dfrac{dx\cdot d^2y-d^2x\cdot dy}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$=\frac{\dfrac{dx^3(dxd^3y-d^3xdy)-3dx^2d^2x(dxd^2y-d^2xdy)}{dx^6}}{dx},$$

即

$$y'''_{x^3}=\frac{dx(dxd^3y-d^3xdy)-3d^2x(dxd^2y-d^2xdy)}{dx^5}$$

等等.

由于

$$dy=y'_tdt,\qquad dx=x'_tdt,$$

可知

$$y'_x=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y''_{x^2}=\frac{x'_ty''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{x'_t(x'_ty'''_{t^3}-x'''_{t^3}y'_t)-3x''_{t^2}(x'_ty''_{t^2}-x''_{t^2}y'_t)}{(x'_t)^5}.$$

等等.

例 1. 椭圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

有参变数表示法

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

我們有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\theta,$$

而

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b}{a}\frac{d}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{dx}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3\theta}.$$

例 2. 曲綫

$$x^3+y^3-3axy=0$$

有参变数表示法

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3},\qquad -\infty<t<\infty$$

因而

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)'\Big/\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)'=t(2-t^3)/(1-2t^3).$$

在 $t=t_0$ 的切綫方程是

$$y-\frac{3at_0^2}{1+t_0^3}=\frac{t_0(2-t_0^3)}{1-2t_0^3}\left(x-\frac{3at_0}{1+t_0^3}\right),$$

$$y=\frac{t_0(2-t_0^3)}{1-2t_0^3}x-\frac{3at_0^2}{1-2t_0^3}.$$

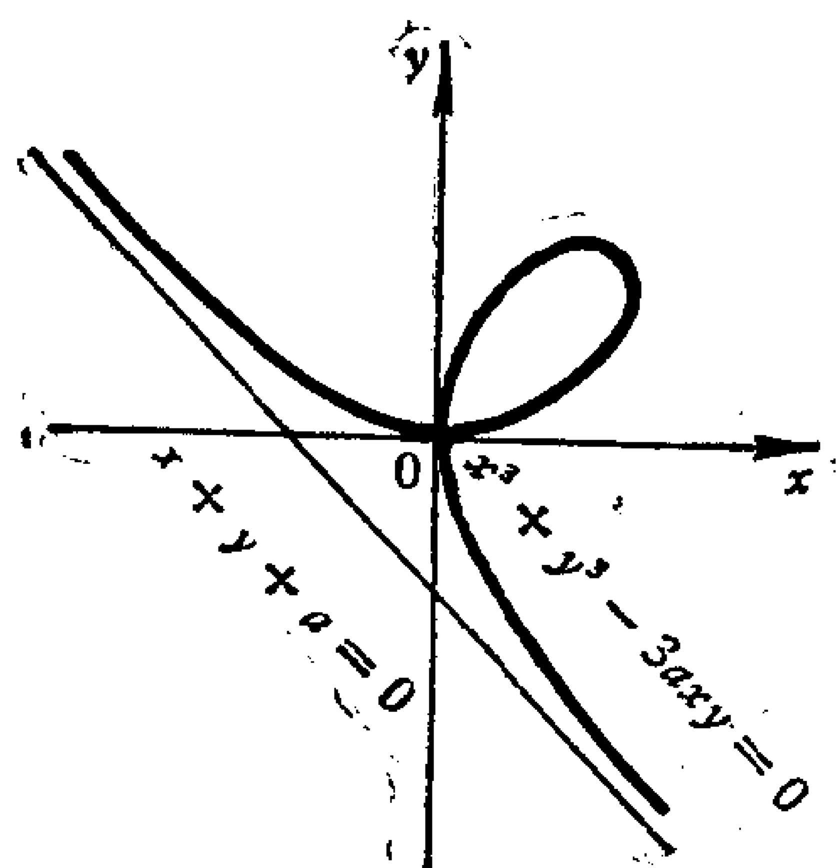


图 118

当 $t_0=1$ 时，即在 $\left(\frac{3}{2}a,\frac{3}{2}a\right)$，切綫的方程是

$$x+y=3a.$$

最有趣的是在 $t_0=0$ 时(即在(0,0))，切綫的方程是

$$y=0.$$

又改一下写法，

$$\frac{1-2t_0^3}{t_0(2-t_0^3)}y=x-\frac{3at_0}{2-t_0^3}.$$

当 $t_0\to\infty$ 时，則得另一在原点的切綫方程

$$x=0.$$

这一現象，在图形上看得很清楚(图 118)。

§14. 函数的差分

用 h 表自变量的改变量，所对应的函数的改变量是

$$\Delta y=f(x+h)-f(x).$$

它叫做函数 $f(x)$ 的一阶差分. 差分也是 x 的函数. 还可以再求差分. 我們用 Δ^2y 表示 Δy 的差分，也就是

$$\Delta^2y=\Delta(\Delta y)=(f(x+2h)-f(x+h))-(f(x+h)-f(x))$$
$$=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x).$$

同法定义三阶差分

$$\Delta^3y=\Delta(\Delta^2y)=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x).$$

可用归納法定义任何阶差分，并可証明

$$\Delta^ny=\Delta(\Delta^{n-1}y)=f(x+nh)-nf(x+\overline{n-1}h)+\frac{n(n-1)}{2}f(x+\overline{n-2}h)-$$

$$-\cdots+(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}f(x+\overline{n-k}h)+\cdots+(-1)^nf(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x+\overline{n-k}h).$$

当 h 很小时，Δy 与 dy 也相差很小. 高阶差分也可以用来作为同阶微分的近似值；反

之亦然. 例如,如果我們知道了一函数在等距离之点所取的数值的表格后,由于沒有函数表达式,我們并不能求出各阶微商. 但是我們可以計算 $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ 作为微商的近似值,用以代替 $\frac{d^n y}{dx^n}$.

例如以在 (2, 3) 上 $y = x^3$ 的 $\Delta x = h = 0.1$ 的差分表为例.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$dy = 3x^2dx$	$d^2y = 6xdx^2$	$d^3y = 6dx^3$	$d^4y = 0$
2	8.000	1.261	0.126	0.006	0	1.200	0.120	0.006	0
2.1	9.261	1.387	0.132	0.006	0	1.323	0.126	0.006	0
2.2	10.648	1.519	0.138	0.006	0	1.452	0.132	0.006	0
2.3	12.167	1.657	0.144	0.006	0	1.587	0.138	0.006	0
2.4	13.824	1.801	0.150	0.006	0	1.728	0.144	0.006	0
2.5	15.625	1.951	0.156	0.006	0	1.875	0.150	0.006	0
2.6	17.576	2.107	0.162	0.006	0	2.028	0.156	0.006	0
2.7	19.683	2.269	0.168	0.006	—	2.187	0.162	0.006	—
2.8	21.952	2.437	0.174	—	—	2.352	0.168	—	—
2.9	24.389	2.611	—	—	—	2.523	—	—	—
3	27.000	—	—	—	—	—	—	—	—

現在来比較二級微商 y'' 当 $x = 2$ 时的近似值与正确値.

$$y_2'' = 12,$$

$$\frac{\Delta^2 y}{h^2} = \frac{0.126}{0.01} = 12.6.$$

附記. 我們也可以用 $x - h, x - 2h, \cdots, x - nh$ 等点的函数値的高阶差分来代替高阶微分,也可以用"对称"的函数值(比較第三章插入法的 Newton, Bessel, Stirling 公式),特別常用的是

$$\frac{d^2y}{dx^2} \doteq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

第六章　微商的应用

§1. 曲綫的上升与下降

假定 $f(x)$ 是在一区間 (a, b) 上定义了的函数，在其中的一点 $x=x_0$ 附近 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$，如果当 x 增大时，$f(x)$ 也增大，这函数 $f(x)$ 称为增函数，所表示的曲綫称为在 $x=x_0$ 附近上升．显然，当 $h>0$ 时

$$f(x_0-h)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+h),$$

卽得

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{-h}\leqslant 0\leqslant \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

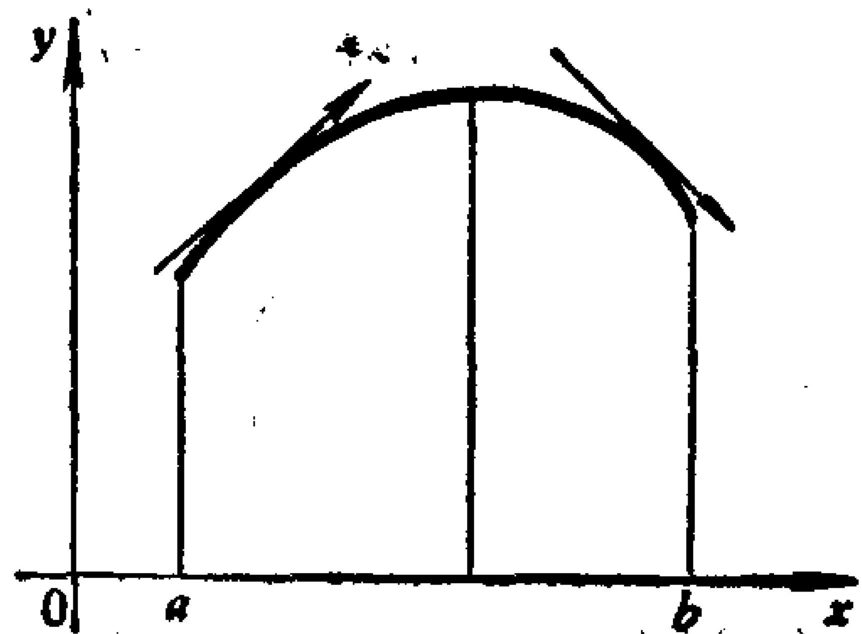


图 119

命 $h\to 0$，如果微商存在，则得

$$f'(x_0)\geqslant 0.$$

反之，如果

$$f'(x_0)\geqslant 0,$$

则当 h 充分小时，有

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{-h}\leqslant 0\leqslant \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

也就是說，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近上升．

同法，我們定义降函数，就是当 x 增加时 $f(x)$ 减小的函数．在 $x=x_0$ 附近下降的条件是 $f'(x_0)\leqslant 0$.

还可以更确切些，如果 $f'(x_0)>0$，则由定义可知当 h 充分小时

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0,$$

卽得 $f(x_0+h)>f(x_0)$．換言之，这是一个严格上升的函数．我們立刻可以推得

定理 1. 使 $f'(x)>0$ 的区間是 $f(x)$ 上升的区間，而使 $f'(x)<0$ 的区間是 $f(x)$ 下降的区間．

例 1. 当 $x>0$ 时，我們考虑函数

$$f(x)=x-\sin x.$$

它的微商是

$$f'(x)=1-\cos x>0,$$

所以 $f(x)$ 是一增函数．而 $f(0)=0$，所以

$$f(x)>0,\qquad 卽\qquad x>\sin x.$$

例 2. 当 $x>0$ 时,

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}.$$

命

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

它的微商

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\right).$$

由例 1 可知 $f'(x)>0$, 又 $f(0)=0$, 所以得到所求証的不等式.

習題. 証明: 当 $x>0$ 时,

$$\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

例 3. 当 $x>0$ 时,

$$x > \log(1+x) \qquad 或 \qquad e^x > 1+x.$$

命

$$f(x) = x - \log(1+x).$$

求微商

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0.$$

在 $(0,\infty)$ 中, $f(x)$ 是上升的且 $f(0)=0$, 因得所欲証.

例 4. Kepler 方程是用来确定行星在它的軌道上的位置,这方程是

$$x = q\sin x + \alpha, \qquad 0<q<1$$

此处 α 与 q 是已知数, x 是未知数.

命 k 是一这样的一个整数,使

$$k\pi \leqslant \alpha < (k+1)\pi.$$

命 $f(x) = x - q\sin x - \alpha$, 显然

$$f(k\pi) = k\pi - \alpha \leqslant 0,$$

而

$$f((k+1)\pi) = (k+1)\pi - \alpha > 0.$$

又已知 $f'(x) = 1 - q\cos x > 0$, 換言之, $f(x)$ 是一增函数. 故仅有一根在 $k\pi$ 与 $(k+1)\pi$ 之間.

要解 Kapler 方程可用下法. 先取任一 x_0 (例如就是 $k\pi$),我們作

$$x_1 = q\sin x_0 + \alpha, \quad x_2 = q\sin x_1 + \alpha, \cdots$$
$$x_n = q\sin x_{n-1} + \alpha.$$

如是則

$$|x_2 - x_1| = q|\sin x_1 - \sin x_0| = 2q\left|\sin\frac{x_1 - x_0}{2}\cos\frac{x_1 + x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2q\frac{|x_1 - x_0|}{2} = q|x_1 - x_0|$$

(此处用了 $|\sin x| \leqslant |x|$, $|\cos x| \leqslant 1$). 同法得

$$|x_3 - x_2| \leqslant q|x_2 - x_1| \leqslant q^2|x_1 - x_0|.$$

續行可得

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^n|x_1 - x_0|.$$

如果 $m > n$,

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leqslant |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant \\ &\leqslant (q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n)|x_1 - x_0| \leqslant \\ &\leqslant q^n\frac{1}{1-q}|x_1 - x_0| \to 0\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$. 所以满足 Cauchy 判别条件,因而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

是存在的. 命 $n \to \infty$, 則由

$$x_{n+1} = q\sin x_n + \alpha$$

可知

$$\xi = q\sin\xi + \alpha.$$

卽得出 Kapler 方程的唯一解.

例 5. 在 $[a, b]$ 中, 如果 $f(x)$ 的微商是連續的且 >0 (或 <0), 則 $f(x)$ 的反函数一定存在,而且它的微商也是 >0 (或 <0).

換言之,单調上升的函数的反函数也是单調上升的.

§2. 极大与极小

一个函数 $f(x)$, 如果在 $x = x_0$ 以前是上升的, 而在 $x = x_0$ 以后是下降的, 則在 $x = x_0$ 这一点一定有一个极大值. 所謂极大值乃指这点的附近的值都不大于这一值. 用微商来表达这一性质: 如果 $f'(x)$ (假定它是連續的) 通过 $x = x_0$ 由正变負, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 有一极大值. 所以在取极大值处有 $f'(x_0) = 0$.

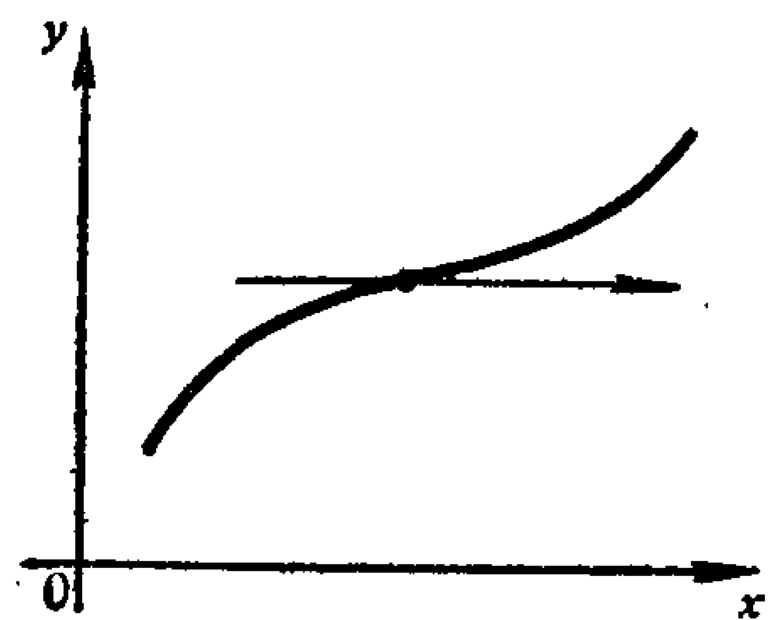


图 120

同法, $f(x)$ 由降而升必取一极小值, 也就是 $f'(x)$ 由負而正, 必取一零. 在 $f(x)$ 取极小值的一点 x_0, 我們有 $f'(x_0) = 0$.

所以我們得出了一个求 $f(x)$ 的极大极小的方法:

1) 求 $f(x)$ 的微商 $f'(x)$,

2) 求 $f'(x) = 0$ 的解,

3) 在上式的解 $x = x_0$ 的附近看 $f'(x)$ 的变化．由正到負得极大值，由負到正得极小值．

虽然 $f'(x_0) = 0$，但 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 附近并不变号，則旣非极大也非极小．这种点是可能存在的，如图 120．

例 1．求函数

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)^3$$

的极大与极小．

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)^3 + 3(x-1)^2(x-2)^2 = (x-1)(x-2)^2(5x-7)$$

使 $f'(x) = 0$ 的点有三个：

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{7}{5}, \qquad x_3 = 2.$$

当 $x < 1$，則 $f'(x) > 0$；而当 $1 < x < \frac{7}{5}$，則 $f'(x) < 0$；又在 $\frac{7}{5} < x < 2$ 中，則 $f'(x) > 0$；当 $x > 2$，仍然是 $f'(x) > 0$．所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 时，由上升到下降而有一极大值 $f(1) = 0$，在 $x = \frac{7}{5}$ 附近由下降而上升，所以有一极小值 $f\left(\frac{7}{5}\right) = -\frac{108}{3125}$．而比 $\frac{7}{5}$ 大时，$f(x)$ 不断上升，$f(2) = 0$ 并非极值．

值得注意的是，极大值并不一定是函数的最大值．求最大值的办法如次：在閉区間 $[a, b]$ 中連續的函数 $f(x)$ 一定在其中取最大值．我們寻找最大值的办法是求出 $f(x)$ 的諸极大值，并且算出 $f(a)$ 与 $f(b)$．在这些值中最大的一个便是最大值．同法来考虑最小值．

例 2．求上例中的函数在 $[0, 3]$ 中的最大值与最小值．

$$f(0) = -8, \qquad f(3) = 4.$$

$f(x)$ 的最大值是 4，最小值是 -8．但在 $[1,2]$ 之間的最大值是 0，最小值是 $-\frac{108}{3125}$．

例 3．求証周长为 $2l$ 的矩形中以正方形的面积最大．

命一边的长为 x，另一边长为 $l - x$．則面积为

$$f(x) = x(l-x).$$

由 $f'(x) = l - x - x = l - 2x = 0$，即 $x = \frac{l}{2}$．这时候 $f'(x)$ 由正变負．在 $x = \frac{l}{2}$ 之左，$f(x)$ 是一个增函数，而在 $x = \frac{l}{2}$ 之右是一个降函数．所以在 $x = \frac{l}{2}$ 时取极大值，也就是最大值：

$$f(x) = \frac{l^2}{4}.$$

另一种不用微积分的証法如下：湊方得

$$x(l-x) = \frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \leqslant \frac{l^2}{4}.$$

当 $x=\frac{l}{2}$ 时，此式之值最大。

例 4. 从半径为 R 的圓上割去一个扇形，把剩下的部分围成一个圓錐. 試求割去扇形的角度多么大时，所作的圓錐的体积最大.

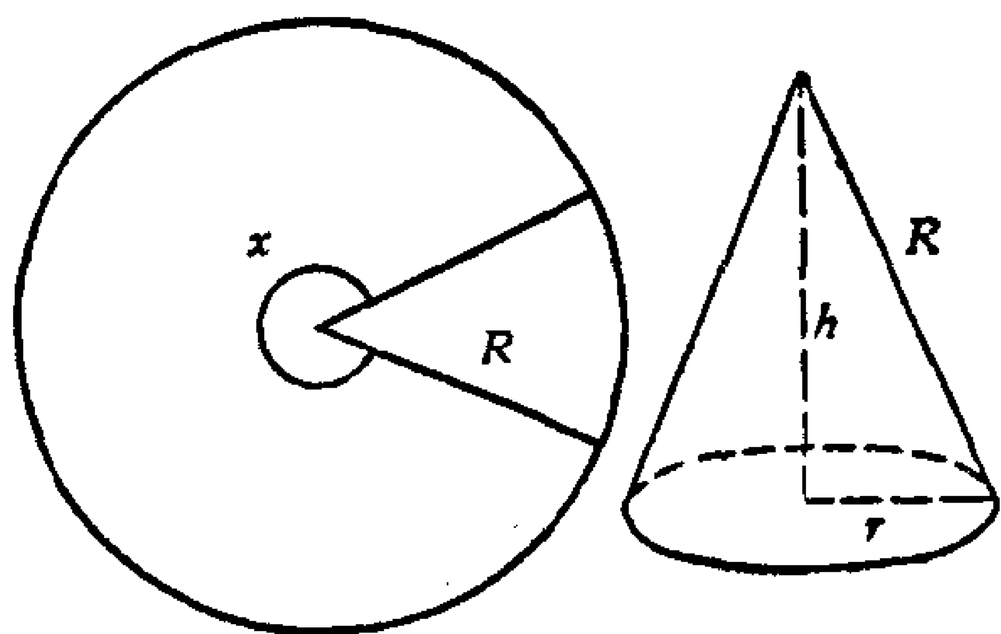


图 121

命 x 表示剪剩下来的角度 $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$，当 $x=0$ 或 $x=2\pi$ 时，这錐体的体积都等于 0，所以最大值是存在的，且在 $(0,2\pi)$ 的內点取到极大值. 所做成的圓錐的斜高是 R，而底周的长是 Rx，所以半径是 $r=\frac{Rx}{2\pi}$. 圓錐的高是

$$\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2},$$

圓錐的底面积

$$\pi r^2=\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2=\frac{R^2x^2}{4\pi},$$

所以圓錐的体积等于

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{R^2x^2}{4\pi}\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}.$$

現在要求 $x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$ 的最大值，也就是要求

$$f(x)=x^4(4\pi^2-x^2)$$

的极大值.

$$f'(x)=16\pi^2x^3-6x^5,$$

$f'(x)=0$ 有三根：

$$x_1=0,\qquad x_2=-2\pi\sqrt{\frac{2}{3}},\qquad x_3=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$x_1=0$ 是极小值，$x_2=-2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ 是不能容許的值，所以 $x_3=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ 給出极大值：

$$f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2^6}{3^2}\pi^4\left(4\pi^2-\frac{8}{3}\pi^2\right)=\frac{2^8}{3^3}\pi^6.$$

因此圓錐的最大体积是

$$\frac{R^3}{24\pi^2}\left(\frac{2^4\pi^3}{3^{3/2}}\right)=\frac{2\pi R^3}{3^{5/2}}.$$

上节中所講的求 $f(x)$ 的极大极小值的法則，有时候会发生这样的困难，难于判断 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 是由正变負还是由負变正. 如果我們进一步考慮 $f''(x)$ 的性质，有时可以帮助我們作出較为簡易的判断. 例如，如果 $f''(x_0)>0$，則 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 附近是增函数，所以只可能由負变正，也就是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 取极小值. 又如果 $f''(x_0)<0$，則 $f(x)$ 取极大值. 当然要假定 $f''(x)$ 是存在的.

例 5. 以 1 为直径作圆. 求从圆上一点到直径的两端距离之和的最大、最小值.

命 θ 表该点与直径的一端的联綫与直径所成的角,二距离之和为

$$f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

由于两点之間直綫为最短，所以最小值不必証明就知道是当 $\theta=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时取得,其值是 1.

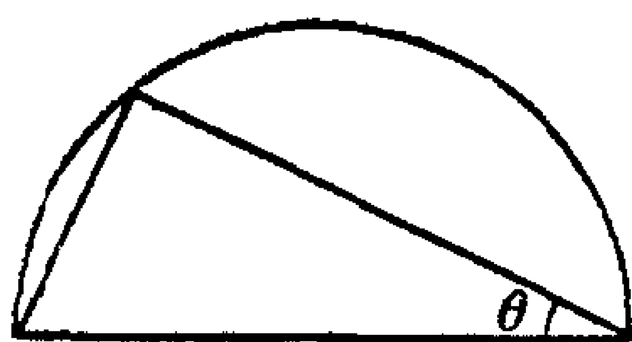


图 122

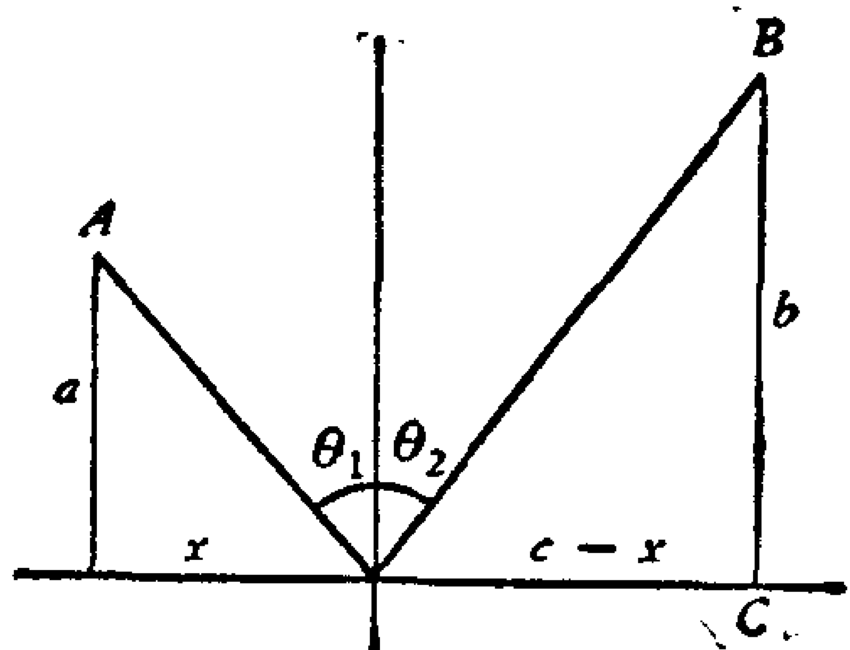


图 123

而

$$f'(\theta)=\cos\theta-\sin\theta,\ f''(\theta)=-\sin\theta-\cos\theta.$$

由 $f'(\theta)=0$ 可知 $\mathrm{tg}\,\theta=1$, 即 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 又由

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<0,$$

所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ 是极大值,也是最大值.

例 6. (光学上的射入角等于射出角). A 点发光射到鏡面 C 上再到 B 点,求什么路程所取的时間最短.

所求的距离是

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2},\qquad 0\leqslant x\leqslant c.$$

求微分

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

$$f''(x)=\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}+\frac{b^2}{(b^2+(c-x)^2)^{3/2}}>0,$$

所以 $f'(x)=0$ 的值是极小值. 由

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

命 θ_1 是射入角, θ_2 是射出角,則得 $\sin\theta_1=\sin\theta_2$, 即得 $\theta_1=\theta_2$.

同样方法可以解释光綫的屈折率. 光綫在第一种介質中的速率是 v_1, 在第二种介質中的速率是 v_2(图 124),求証从 A 到 B 的最快途径适合于

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

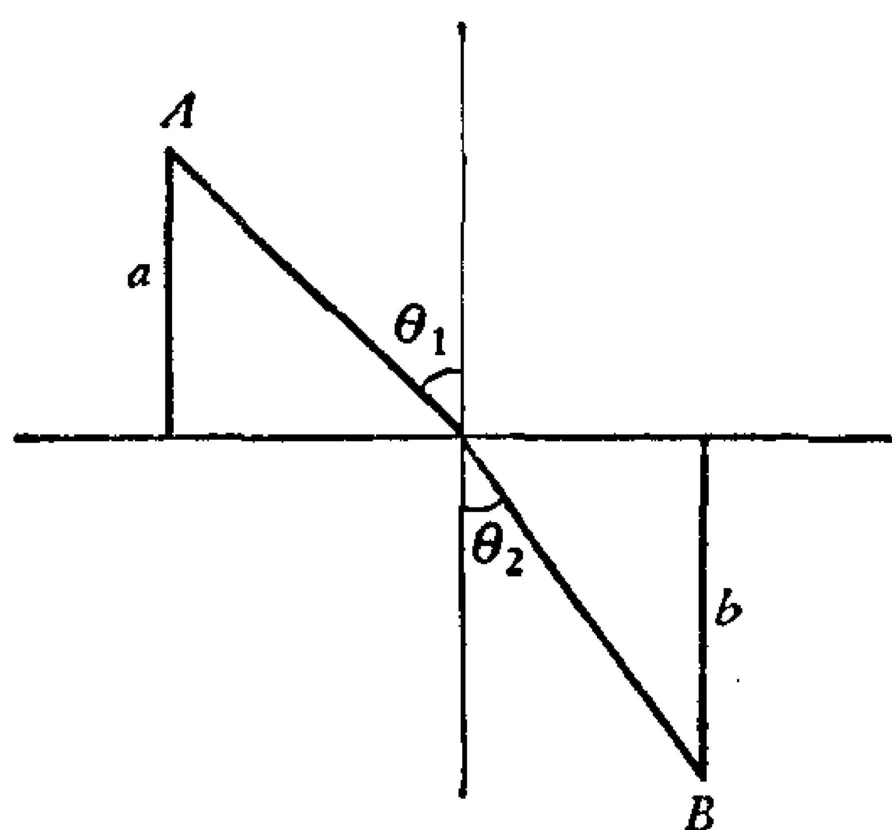


图 124

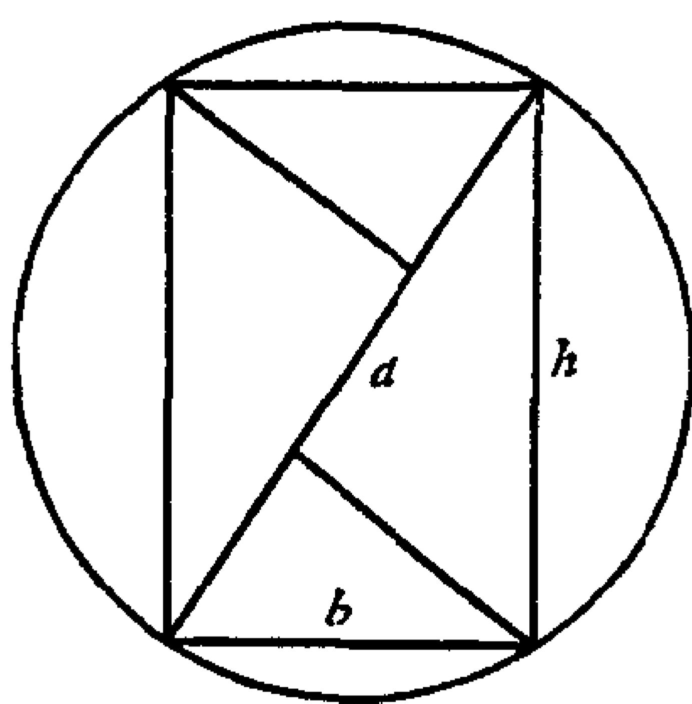


图 125

例 7. 已知一木料有直径 d 的圆截面，如何把它砍成为最坚固的矩形截面的横樑。由材料力学証明，有矩形截面的横樑的強度与乘积 bh^2 成比例，此处 b 是矩形截面的底长，h 是它的高(图 125)。

因为 $h^2+b^2=d^2$，所以我們要求的是

$$f(b)=b(d^2-b^2), \qquad 0\leqslant b\leqslant d$$

的最大値。由

$$f'(b)=d^2-3b^2, \qquad f''(b)=-6b,$$

可知，在 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ 处是极大値，也就是最大値。

在 $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ 时，$h=d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，所以 $d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$。具体做法是把直径三等分，在各点立垂綫卽得(有时用 $h:b=7:5$ 来表 $\sqrt{2}\doteq 1.4\cdots$)。

例 8. 一电灯可以沿垂綫 OB 而上下，求它对水平面 OA 必須有怎样的距离，才使水平面上的一点 A 有最大的照度。

照度与 $\sin\varphi$ 成正比，与距离 $r=AB$ 的平方成反比，卽

$$J=c\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

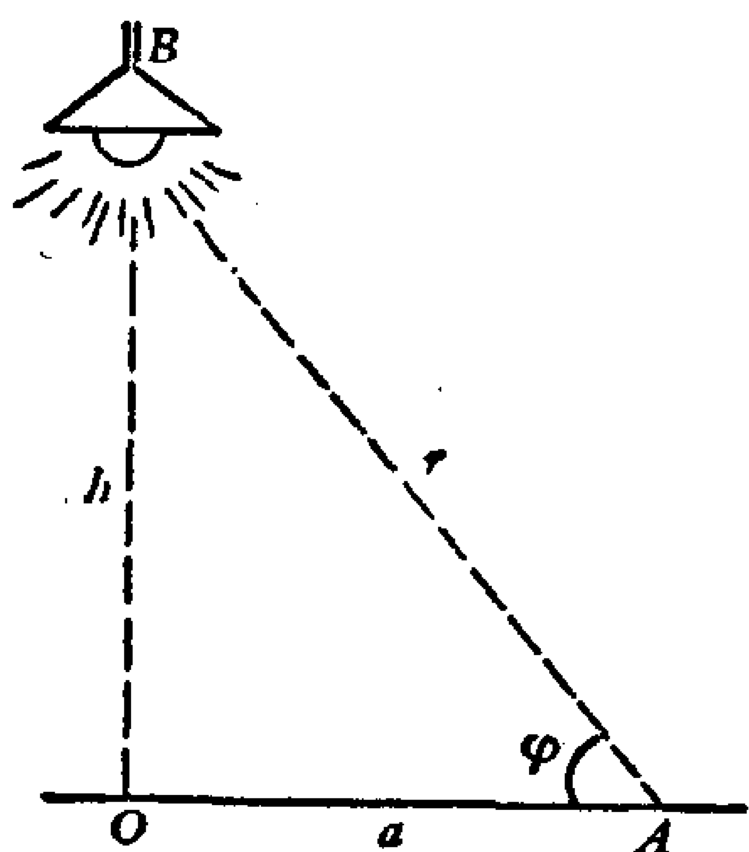


图 126

此处 c 是一常数，依賴于灯光的強度。

取 $h=OB$ 作为自变量，命 $OA=a$ 则

$$\sin\varphi=\frac{h}{r}, \qquad r=\sqrt{h^2+a^2},$$

而

$$J=c\frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}}, \qquad \frac{dJ}{dh}=c\frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}}.$$

在 $h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 时，J 由正变負，所以 $h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 就是适当的距离。

例 9. 在鉄路干綫 AB 上的一点 A 处要把貨物运往与鉄路綫相距为 $CB=l$ 的一点 C，鉄路运費的单位价格是 α(吨，公里)，馬車运費是 β，問在鉄路上怎样的一点 M 作公路

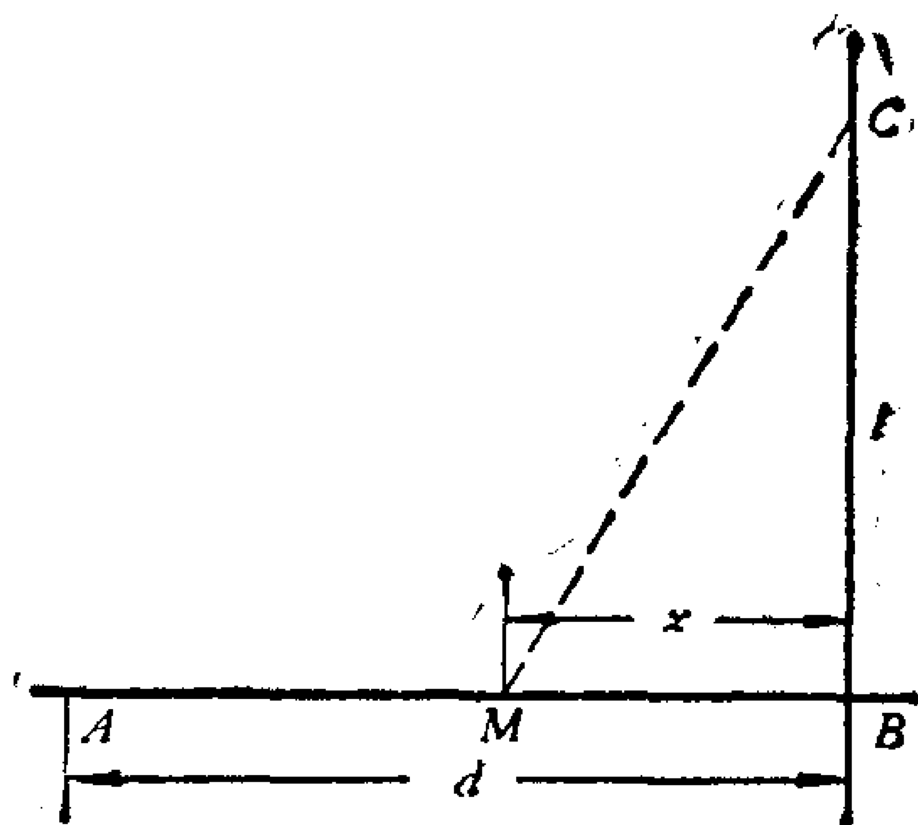


图 127

MC 使由 A 到 C 的貨运价格最廉。

依图 127 每吨貨的运費是

$$y=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{x^2+l^2},\qquad (0\leqslant x<d).$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\beta x}{\sqrt{x^2+l^2}}-\alpha=\beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}-k\right),\qquad k=\frac{\alpha}{\beta}.$$

若 $k\geqslant 1(\alpha\geqslant\beta)$，这式子永远为負，即 y 为降函数，也就是从 A 点作公路，不用鉄路运輸最便宜.

当 $k<1$ 时，解

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}=k$$

得出

$$x=\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}.$$

当 $\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}\geqslant d$，則 $y'=0$ 的解在变动区間之外了，所以仍然不用鉄路，而直接由 A 修公路.

当 $\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}<d$ 时，有一点 $x=\frac{kl}{\sqrt{1-k^2}}$ 使运費最小.

例 10. 由于仪器不精确，在实驗中对同一量做了 n 次观測各得数据

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n.$$

量 x 与这 n 个值的差的平方和最小，叫做“最可能的”值．求 x.

換言之，求使

$$f(x)=(x-\alpha_1)^2+(x-\alpha_2)^2+\cdots+(x-\alpha_n)^2$$

最小的 x．求微商

$$f'(x)=2(x-\alpha_1)+2(x-\alpha_2)+\cdots+2(x-\alpha_n)$$

$$f''(x)=2n>0.$$

所以由 $f'(x)=0$ 可知

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

这就是算术平均值.

習題. 思索一些不用微积分的方法来处理这些例題.

总結一下,我們已有三个方法:

1) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 这一点由增而降,則得一极大值;由降而增,則得一极小值.

2) 如果 $f(x)$ 的微商存在,且在 $x = x_0$ 这一点 $f'(x)$ 由正变負,則 $f(x_0)$ 为极大值; 由負变正,則 $f(x_0)$ 为极小值.

3) 如果有二阶微商存在, 且 $f'(x_0) = 0$. 若 $f''(x_0) < 0$, 則 $f(x_0)$ 是极大值; 若 $f''(x_0) > 0$, 則 $f(x_0)$ 是极小值.

这三个方法一个比一个方便,但一个比一个加強了局限性.

例如, $f''(x_0) = 0$, 則 3) 法不能用, 但我們仍能用前法. 如果 $f''(x)$ 不存在,那就更不必說了.

又如 $f'(x)$ 不存在, 我們不能用 2) 法, 但 1) 法仍然可用. 例如, $y = f(x) = |x|$, 微商在 $x = 0$ 时不存在,但是由 1) 可知 $x = 0$ 时 y 有一极小值.

§ 3. Fermat 定理

在 § 2 研究 $f(x)$ 的极大极小值时, 我們假定了 $f'(x)$ 在它的零点附近是連續的. 如果 $f'(x)$ 并不連續,我們还是有

定理 1 (Fermat). 若 $f(x)$ 在 (a, b) 內定义且在这区間內有一內点 c 使 $f(x)$ 取极大(或极小)值. 如果在这一点存在着有限微商 $f'(c)$, 則一定有 $f'(c) = 0$.

証. 假定 $f(c)$ 是极大值并且 $f'(c) > 0$, 則当 $h > 0$ 且充分小时

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0,$$

也就是 $f(c+h)$ 比 $f(c)$ 更大. 这和极大的假定相違背. 如果 $f'(c) < 0$, 我們得到当 h 是充分小的正数时

$$\frac{f(c) - f(c-h)}{-h} > 0,$$

也就是 $f(c-h)$ 比 $f(c)$ 大. 所以不能在 c 点取极大值. 同法証明极小值的情况.

附記. 1. 如果在端点取极大值,我們并不能得出同样的結果.

2. 若 c 是內点, 而 $f'(c)$ 是无穷. 讀者自証: 如果 $f(c)$ 是极大值, 則 $f'(c-0) = +\infty$ 而 $f'(c+0) = -\infty$.

3. 定理 1 的几何意义是,在 $x = c$ 作一切綫与 x 軸平行.

在 Fermat 时代还未发明微积分,但是在处理极大与极小的方法中却包含了这一主要原則.

作为定理 1 的应用，我們有

定理 2 (Darboux). 如果 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上有有限微商，則 $f'(x)$ 至少有一次取介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之間的每一个值.

如果 $f'(x)$ 是連續的，这个定理可由函数的連續性立刻推出.

証. 我們不妨假定 $f'(a) > f'(b)$. 命 C 为 $f'(a)$, $f'(b)$ 之間的数, $f'(a)>C>f'(b)$。作函数

$$F(x) = f(x) - Cx,$$

这函数有 $F'(a) > 0 > F'(b)$.



图 128

$F(x)$ 是閉区間 $[a, b]$ 上的連續函数，所以 $F(x)$ 一定在 $[a, b]$ 上一点 c 取最大値. 这点既不能是 a, 也不能是 b, 因为由 $F'(a) > 0$ 及 $F'(b) < 0$, 知 $F(x)$ 在 a 的右边是上升的，而在 b 的左边是下降的. 所以 c 点一定是內点. 由 Fermat 定理可知

$$F'(c) = 0, \quad 即 f'(c) = C.$$

附記. 在定理 1 中假定了在 $x = c$ 有有限微商 $f'(c)$. 如果微商不存在或变为无穷，在 c 点也可能取极值. 見图 128.

如果 $f'(c-0) > 0$, $f'(c+0) < 0$, 則 $f(x)$ 在 $x = c$ 点取极大値.

§4. 中 值 公 式

定理 1 (Lagrange). 假定 1) $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 內定义而且是連續的, 2) 在开区間 (a, b) 上有有限微商 $f'(x)$ 存在. 則在 a, b 之間必能求得一点 $c(a < c < b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

这公式称为中値公式，定理称为中値定理. 这一定理很重要.

命

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

則本定理与下面的定理等价.

定理 2 (Rolle). 假定 1) $F(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上定义而且是連續的, 2) 在开区間 (a, b) 上有有限微商 $F'(x)$ 存在, 3) $F(a) = F(b)$, 則一定有一点 $c(a < c < b)$ 使

$$F'(c) = 0.$$

証. $F(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 中是連續的，所以在这区間上一定能达到最大値 M 与最小値 m.

1) $M = m$, 則 $F(x) = M$ 是常数，因得 $F'(x) = 0$. 不必証明.

2) $M > m$. 由于 $F(a) = F(b)$, 所以数値 M, m 中一定有一个在內点 c 处为 $F(x)$ 所取. 在这点 $F'(c) = 0$.

我們証明了定理 2，因而也証明了定理 1.

中值公式也可以改写为：取 $a = x$, $b = x + h$，則

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

也就是

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h). \tag{A}$$

Lagrange 公式的缺点在于我們并不确知数值 θ，但是这并不限制这公式在分析学中的广泛应用. 定理 2 的推广是：

定理 3 (Cauchy). 假定 1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 內連續，2) 在开区間 (a, b) 內有有限微商 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 存在，3) 在 (a, b) 內 $g'(x) \neq 0$. 則在 a, b 之間必有一点 $c(a < c < b)$ 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

証. 首先我們証明 $g(a) \neq g(b)$. 如果 $g(a) = g(b)$，則由 Rolle 定理，有一点使 $g'(x) = 0$. 此与 3) 相违背.

作函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)],$$

它滿足 Rolle 定理的一切条件. 因此有一 c 使

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c).$$

即得定理.

命 $g(x) = x$，即得 Lagrange 定理. 事实上，我們亦不难由 Lagrange 定理直接推出 Cauchy 定理.

例 1. 当 $x > 0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 是增函数，

当 $x > 1$ 时，$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$ 是減函数.

証. 由 Lagrange 公式可知

$$\log(x+1) - \log x = \frac{1}{\xi}, \qquad x < \xi < x+1,$$

也就得

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}.$$

由

$$\frac{d}{dx}(x\{\log(x+1) - \log x\}) = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1} > 0$$

及

$$\frac{d}{dx}((x+1)\{\log(x+1) - \log x\}) = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x} < 0,$$

可得出所要証明的結果.

Lagrange 公式可以用来更有把握地估計誤差(指比用微分估計誤差法更有把握).

例 2. 命

$$f(x)=\log_{10}x.$$

它的微商是

$$f'(x)=\frac{1}{x}\frac{1}{\log 10}=\frac{M}{x}\qquad (M=0.43429\cdots).$$

由 Lagrange 公式得

$$\log_{10}(a+h)-\log_{10}a=h\frac{M}{a+\theta h},\qquad 0<\theta<1.$$

已經用微分代替的近似公式是

$$\log_{10}(a+h)-\log_{10}a\doteq h\frac{M}{a}.$$

这一近似公式的誤差是

$$h\frac{M}{a}-h\frac{M}{a+\theta h}=\frac{\theta h^2 M}{a(a+\theta h)}.$$

例如取 $a=100$, $h=1$, 則由近似公式所得的結果是

$$\log_{10}101=\log_{10}100+\frac{M}{100}=2.00434\cdots.$$

这数值的誤差

$$\frac{\theta M}{100(100+\theta)}\leqslant\frac{M}{100(100+\theta)}<\frac{M}{100\times 100},\quad (0<\theta<1).$$

故誤差 $<0.00004\cdots$.

Rolle 定理也是一条用处很多的定理,我們举几个例子如下:

定理 4. 假定 $F(x)$ 在閉区間 $[a,b]$ 上連續,且在开区間 (a,b) 上有有限微商 $F'(x)$ 存在. 如果 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 r 个不同的根,則 $F'(x)$ 至少有 $r-1$ 个不同的根.

証. 命 $F(x)$ 的根依次地排列成为

$$x_1<x_2<\cdots<x_r.$$

由 $F(x_1)=0$, $F(x_2)=0$, 可知在 x_1 与 x_2 之間 $F'(x)$ 有一根. 因而得出 $F'(x)$ 至少有 $r-1$ 个不同根.

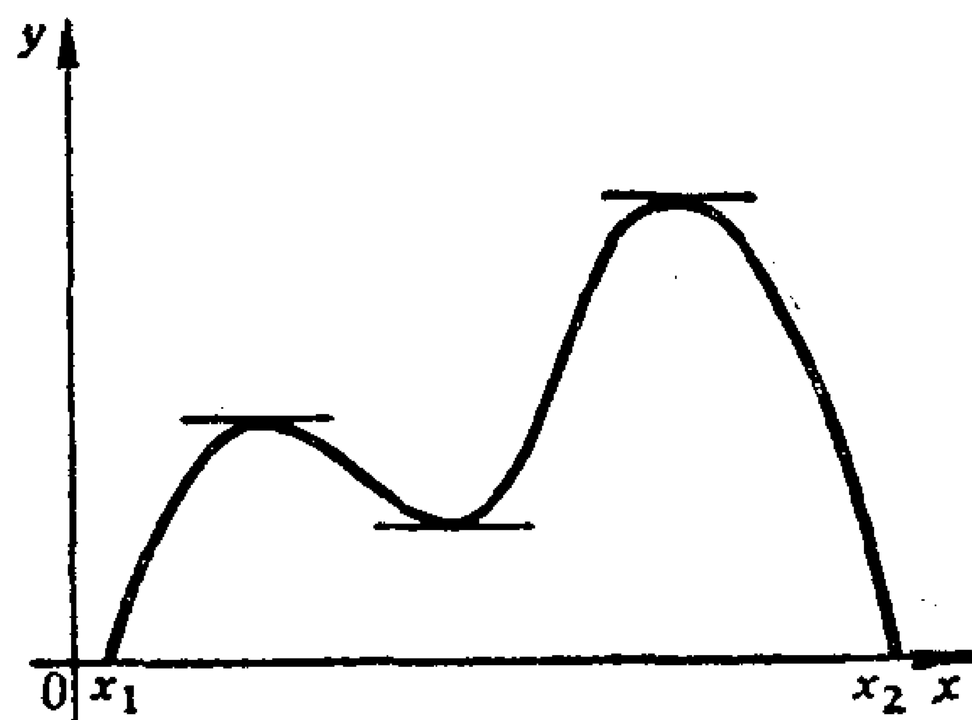


图 129

附记. 有时可能多过 $r-1$ 个, 如图 129 在 x_1, x_2 間 $F'(x)$ 就有 3 个根.

特别 $F(x)$ 是多項式,我們有

定理 5. 一个有 n 个实根的 n 次多項式 $P(x)$ 的微商 $P'(x)$ 有 $n-1$ 个实根, 重根我們照重数計算.

証. 把 $P(x)$ 的不同的根写成为

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_r.$$

x_ν 的重数是 n_ν，則 $n_1 + \cdots + n_r = n$. $P'(x)$ 在 $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \cdots, (x_{r-1}, x_r)$ 中各有一根，共 $r-1$ 个根，又 $P'(x)$ 以 x_ν 为其 $n_\nu - 1$ 重根，因此 $P'(x)$ 共有

$$r - 1 + \sum_{\nu=1}^{r}(n_\nu - 1) = \sum_{\nu=1}^{r} n_\nu - 1 = n - 1$$

个根.

最后，我們还可用 Rolle 定理来求出 Lagrange 插入公式的誤差.

我們曾經講过 Lagrange 插入公式，即我們可以做一个 $(n-1)$ 次多項式 $P(x)$ 在区間 $[a, b]$ 中的 n 个給定点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取 n 个給定值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$；即可以做出多項式 $P(x)$ 使

$$P(x_k) = y_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

做的方法是先做多項式

$$l_k(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)},$$

它是 $l_k(x_1) = \cdots = l_k(x_{k-1}) = l_k(x_{k+1}) = \cdots = l_k(x_n) = 0$ 而 $l_k(x_k) = 1$，一般的 Lagrange 插入公式就是

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x) y_k.$$

引进

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

則得 $\omega'(x_k) = (x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)$. 所以

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)/(x - x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

如果 $f(x)$ 是閉区間 $[a, b]$ 上的有 n 阶有限微商的函数，則

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x) f(x_k).$$

与 $f(x)$ 的誤差如何？即在一个异于 $x_1, \cdots, x_n$ 的点 x，求 $f(x) - P(x)$ 的估值. 命

$$K = \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)}.$$

考虑函数

$$\varphi(z) = f(z) - P(z) - K\omega(z).$$

由于 $P(z)$ 是低于 n 次的多項式，所以 $P^{(n)}(z) = 0$. 因此这函数的 n 阶微商等于

$$\varphi^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - Kn!.$$

显然有

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \cdots = \varphi(x_n) = 0,$$

也就是 $\varphi(z)$ 在 $[a, b]$ 中有 $(n+1)$ 个根 $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$，而且是互异的. 由 Rolle 定理知道，$\varphi'(z)$ 在这 $n+1$ 点所分的 n 个区間內各有一根，即有 n 个互异的根. $\varphi''(z)$

有 $(n-1)$ 个根，等等．于是 $\varphi^{(n)}(z)$ 必有一根在 $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 諸数的最大者与最小者之間，命 ξ 为此根，則

$$f^{(n)}(\xi) = Kn!.$$

因而得出带余項的 Lagrange 插入公式

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega(x), \qquad a < \xi < b.$$

§5. 凸性、凹性与扭轉点

我們还是研究曲綫 $y = f(x)$．以往已經說过 $f'(x)$ 的几何性質，现在我們来說明 $f''(x)$ 的几何性質．

当 x 增加时，切綫和 x 軸所成的角度 α 也在变．如果角度随 x 增加而减少，則曲綫向上凸．也就是 $f'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha$ 是一减函数时，曲綫向上凸．如果 $f''(x)$ 存在而且 < 0，則 $f'(x)$ 是减函数，曲綫向上凸．当 $f''(x)$ 存在而且 > 0，則曲綫向下凸．如果 $f''(x_0) = 0$ 并在 $x = x_0$ 附近变号，則这一点称为扭轉点．

极大出現在向上凸的点，极小出現向下凸的点．

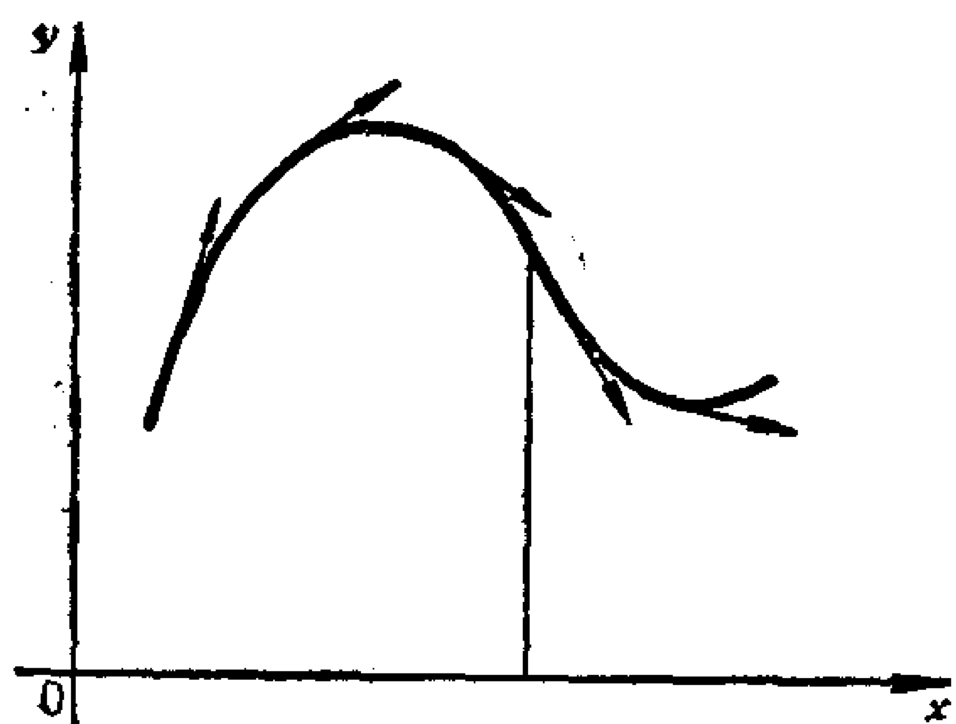


图 130

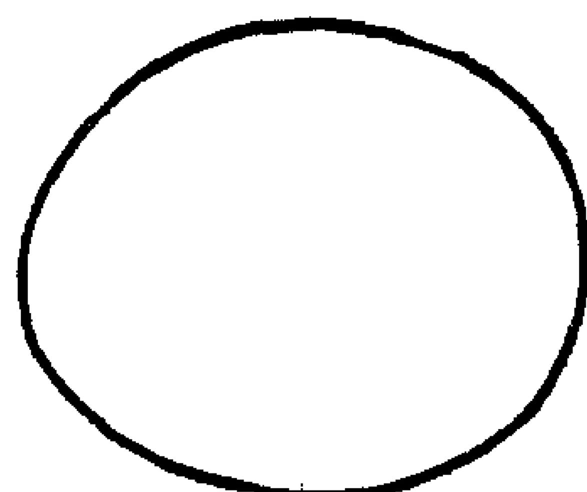


图 131

有些书上把向上凸称为凸，向下凸称为凹．实質上，凸与凹是随我們的立足点而变化的，卵形一般称为凸形，其中有些部分向上凸，而有些部分向下凸．

凸的概念在高等数学中常出現，基础在于凸函数．

定义． 在区間 (a, b) 上定义一个函数 $\varphi(x)$．如果对 (a, b) 中的任意二点 x_1, x_2 常有

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)), \tag{1}$$

則 $\varphi(x)$ 称为凸函数．

它的几何意义是：在这曲綫上任取两点作一联綫，則这联綫的中点，一定不比曲綫上的对应点低．

关于凸函数还有另一定义．这联綫上的所有点都不低于曲綫上的对应点，解析的說法是：对 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 有

$$\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2).$$

因为过$(x_1, \varphi(x_1))$, $(x_2, \varphi(x_2))$二点的联綫上的点是

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2)),$$

所对应的曲綫上的点是

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)).$$

x_1　$\frac{x_1+x_2}{2}$　x_2

图 132

定理 1. 如果$\varphi(x)$是連續函数,則两个定义是等价的.

証. 在后面的定义中取$\alpha = \frac{1}{2}$,卽得前者. 所以我們現在主要是从前者来推后者. 把(1)用两次可知

$$4\varphi\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \leqslant 2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\varphi(x_4).$$

由归納法,我們不难証明

$$2^l\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^l}}{2^l}\right) \leqslant \varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_{2^l}).$$

我們現在来証明,对任一自然数n,

$$n\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n). \qquad (2)$$

我們用反向归納法,就是如果n对,我們来証明$n-1$也对. 因为这結果对$n=2^l$的情况都正确,因而对任一n也都正确了. 我們取$x_n = \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$,則由(2)可知

$$n\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right) = n\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n}\right) \leqslant \varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n) =$$
$$= \varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_{n-1}) + \varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right).$$

移項卽得(2)对$n-1$也是对的.

在(2)式中取

$$x_1 = \cdots = x_p = x, \qquad x_{p+1} = \cdots = x_n = y,$$

則得

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y),$$

此处$\alpha = \frac{p}{n}$. 也就是对任一有理数α这式子是对的,用趋极限法,可知对任一实数$\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$,这也是对的.

定理 2. 如果$\varphi''(x)$在(a, b)中存在,則$\varphi(x)$是凸函数的必要且充分条件是$\varphi''(x) \geqslant 0$.

証. 1)必要性. 在(1)中取$\frac{1}{2}(x_1+x_2) = t$, $\frac{1}{2}(x_1-x_2) = h$,并設$x_1 > x_2$,因得$h > 0$,且

$$2\varphi(t) \leqslant \varphi(t+h) + \varphi(t-h),$$

也就是

$$\varphi(t+h)+\varphi(t-h)-2\varphi(t)\geqslant 0. \tag{3}$$

我們現在假定 $\varphi''(t)<0$. 由

$$\varphi''(t)=\lim_{u\to 0}\frac{\varphi'(t+u)-\varphi'(t-u)}{2u}$$

可知,有 $\delta>0$, $h>0$ 使

$$\varphi'(t+u)-\varphi'(t-u)<-\delta u,\quad 0<u\leqslant h.$$

从

$$\frac{d}{du}(\varphi(t+u)+\varphi(t-u)-2\varphi(t))=\varphi'(t+u)-\varphi'(t-u)$$

可知, $\varphi(t+u)+\varphi(t-u)-2\varphi(t)$ 是一个 u 的减函数, 但当 $u=0$ 时这函数等于 0, 因此

$$\varphi(t+u)+\varphi(t-u)-2\varphi(t)<0.$$

这和(3)式矛盾.

2) 充分性. 把中值公式運用两次,

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

及

$$\varphi'(x+\theta h)=\varphi'(x)+\theta h\varphi''(x+\theta'\theta h),\quad 0<\theta'<1.$$

因而得出

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\theta h^2\varphi''(x+\theta'\theta h).$$

如果 $\varphi''\geqslant 0$, 則得

$$\varphi(x+h)\geqslant\varphi(x)+h\varphi'(x).$$

取 $x+h=x_1$, $x=X$ 及 $x+h=x_2$, $x=X(X=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)$, 各得

$$\varphi(x_1)-\varphi(X)\geqslant(x_1-X)\varphi'(X),$$
$$\varphi(x_2)-\varphi(X)\geqslant(x_2-X)\varphi'(X).$$

各乘以 α 与 $(1-\alpha)$ 相加得出

$$\alpha\varphi(x_1)+(1-\alpha)\varphi(x_2)-\varphi(X)\geqslant(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2-X)\varphi'(X)=0.$$

在定理 1 証明的过程中我們也获得了一个重要不等式:

定理 3. 对任一連續凸函数 $\varphi(x)$ 常有

$$\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}{n}.$$

特別是当 $\sigma\geqslant 1$, $x>0$, x^σ 是凸函数(由 $(x^\sigma)''=\sigma(\sigma-1)x^{\sigma-2}\geqslant 0$ 可知),所以有

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^\sigma\leqslant\frac{1}{n}(x_1^\sigma+\cdots+x_n^\sigma).$$

命 $\sigma=\alpha/\beta(\alpha\geqslant\beta)$ 并取 $x_1=|y_1|^\beta,\cdots,x_n=|y_n|^\beta$, 則得

$$\left(\frac{|y_1|^\beta+\cdots+|y_n|^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\frac{|y_1|^\alpha+\cdots+|y_n|^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

由此立刻得到

定理 4. 命

$$M_\gamma(y)=\left(\frac{|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

代表 n 个数 $y_1,\cdots,y_n$的 γ 方次平均值，則 $M_\gamma(y)$ 是 γ 的增函数（$\gamma\geqslant 0$）。

其中特別是 $M_1(y)\leqslant M_2(y)$

$$\frac{|y_1|+\cdots+|y_n|}{n}\leqslant\left(\frac{|y_1|^2+\cdots+|y_n|^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这是算术平均不大于平方平均。

現在我們来考虑两个情况。

定理 5.

$$\lim_{\gamma\to\infty}M_\gamma(y)=\max(|y_1|,\cdots,|y_n|)\qquad(\text{定义为 } M_\infty(y));$$

$$\lim_{\gamma\to 0}M_\gamma(y)=(|y_1\cdots y_n|)^{\frac{1}{n}}\qquad(\text{定义为 } M_0(y)),$$

这称为几何平均。

証. 1）当 $\gamma>0$ 时，有

$$\left\{\frac{[\max(|y_1|,\cdots,|y_n|)]^\gamma}{n}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\leqslant M_\gamma(y)\leqslant\{[\max(|y_1|,\cdots,|y_n|)]^\gamma\}^{\frac{1}{\gamma}},$$

即

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\max(|y_1|,\cdots,|y_n|)\leqslant M_\gamma(y)\leqslant\max(|y_1|,\cdots,|y_n|).$$

由

$$\lim_{\gamma\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=1$$

可知

$$\lim_{\gamma\to\infty}M_\gamma(y)=\max(|y_1|,\cdots,|y_n|).$$

2）当 $|y_i|>0(i=1,2,\cdots,n)$时，由 Lagrauge 中值定理（定理4.1）可知

$$\frac{\log\left(\frac{1}{n}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma)\right)-0}{\gamma-0}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\gamma'}\log|y_i|}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\gamma'}},$$

此处 $0<\gamma'<\gamma$. 因此

$$\lim_{\gamma\to 0}M_\gamma(y)=\lim_{\gamma\to 0}\left\{\frac{1}{n}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma)\right\}^{\frac{1}{\gamma}}=$$

$$=\lim_{\gamma\to 0}e^{\frac{1}{\gamma}\log\left\{\frac{1}{n}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma)\right\}}=\lim_{\gamma'\to 0}e^{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\gamma'}\log|y_i|}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{\gamma'}}}=$$

$$=e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log|y_i|}=|y_1\cdots y_n|^{\frac{1}{n}}.$$

若有某些 $y_i=0$，不妨假定 $|y_i|>0(i=1,2\cdots,s)$，$y_i=0(i=s+1,\cdots,n)$，則

$$M_\gamma(y)=\left[\frac{1}{n}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_n|^\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}}=\left[\frac{s}{n}\cdot\frac{1}{s}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_s|^\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}}=$$

$$=\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\frac{1}{s}(|y_1|^\gamma+\cdots+|y_s|^\gamma)\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

由

$$\lim_{\gamma\to 0}\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=0$$

可知

$$\lim_{\gamma\to 0}M_\gamma(y)=0\cdot|y_1\cdots y_s|^{\frac{1}{s}}=0=|y_1\cdots y_n|^{\frac{1}{n}}.$$

故得定理.

定理 6. 当 $\gamma>0$ 时我們有

$$M_0(y)\leqslant M_\gamma(y)\leqslant M_\infty(y).$$

其中特別有

$$|y_1\cdots y_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{|y_1|+\cdots+|y_n|}{n},$$

就是几何平均不大于算术平均.

§6. 漸 近 綫

在掌握了微分学之后,我們就更有把握来說明图形的增減变化的情况、使我們更能抓住要点来刻画图形.

通常所使用的"按点描图"的方法,所取的点疏密多少都是有"偶然性"的,与图形的特性无关. 两点之間的联綫方法,可以任意或平或曲,或向上凸或向下凸并无定則,因此并不能很好地达到我們的希望.

我們現在的主要目的在于尽可能准确地表达出函数的特点,至于个别的点的准确位置仅居次要地位.

在考虑一个函数所表示的曲綫

$$y=f(x)$$

时,首先要知道的是这函数所存在的区域,例如

$$y=\sin^{-1}x,\qquad y=\sqrt{1-x^2}$$

的存在区域一定在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 之中,因此所画的图形不会超出这个区域.

在可能存在的区域內,我們要考虑間断点,就是失去連續性的点. 例如,$x=x_0$ 是这样的一点,我們要考虑它的左右极限.

其次考虑 $y=f(x)$ 的微商 $y'=f'(x)$ 的情况,微商无穷的情况必須特别考虑,我們仅处理微商无穷仅在个别点出现的情况,并标出 $f'(x)=0$ 的各点. 有了这些点便可以在一定程度上表示出这曲綫的一般情况,因为一有这些点就可以表出曲綫的增減情况,并且可以指出函数的变化率下降到 $0(y'=0)$ 或增大到无穷 $(y'=\infty)$ 的那些点.

更进一步的精确度由二次微商表达，曲綫是向上凸还是向下凸，可以由 $f''(x)$ 表示出来. 如果曲綫經过一点时由向上凸而变为向下凸了，这样的点称为**扭轉点**. 如果 $f''(x)$ 在这一点附近連續且变号，則在这一点 $f''(x)=0$. 但是有时使 $f''(x)=0$ 的点并不一定是扭轉点.

我們先来研究曲綫有无穷分支的情况，双曲綫抛物綫都是有无穷分支的曲綫.

有以下性質的一条直綫，称为对曲綫的一分支的漸近綫：当点在无穷分支上移向无穷时，这点和該直綫的距离趋向于 0.

先講曲綫平行于 y 軸的漸近綫，这样的漸近綫的形式是 $x=c$（是常数），即当沿无穷分支趋向无穷时，x 趋于 c，y 趋向无穷.

所以平行于 y 軸的漸近綫就是求这样的 c 值，使 $x\to c$ 时，$f(x)\to\infty$.

在研究曲綫对于漸近綫的相关位置时，必須注意 x 自左至右趋向 c 时的符号，例如 $y=\frac{1}{x}$ 以 $x=0$ 为漸近綫，其左趋向 $-\infty$，其右趋向 $+\infty$. 又如 $y=\frac{1}{x^2}$ 也是以 $x=0$ 为漸近綫，其左其右都趋向 $+\infty$.

再研究不平行于 y 軸的漸近綫

$$y=ax+b.$$

命 ω 表漸近綫与 x 軸所成的角度，$\overline{MK}$ 是曲綫上的点到这漸近綫的距离，$\overline{MK_1}$ 是当横坐标 x 相同时，曲綫上点的縱坐标与漸近綫上点的縱坐标之差，由直角三角形得

图 133

$$\overline{MK_1}=\frac{\overline{MK}}{|\cos\omega|},\ \left(\omega\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

原条件是

$$\lim_{x\to\infty}\overline{MK}=0.$$

这也相当条件

$$\lim_{x\to\infty}\overline{MK_1}=0, \tag{1}$$

也就是

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0. \tag{2}$$

所以要求漸近綫，就是要求 a, b 使上式成立.

条件(2)也就是

$$\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0.$$

但是第一因子是无穷大，所以由此得出

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0,$$

也就是

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

求出 a 之后，

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax).$$

所以得

定理 1. 曲綫

$$y=f(x)$$

有一条不平行于 y 軸的漸近綫存在的必要且充分条件是：当沿一无穷分支移动时，$x\to\infty$ 而且以下两个极限存在：

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax).$$

此时漸近綫的方程就是

$$y=ax+b.$$

同法处理 $x\to-\infty$ 的情况.

特别注意，当 $x\to+\infty$ (或 $-\infty$) 时，差 $f(x)-(ax+b)$ 的符号. 如果 x 充分大时这差常正，則曲綫在漸近綫上；常負，則曲綫在漸近綫下；时負时正，則倏上倏下. 在前两种情况下，我們又可把漸近綫看作曲綫在无穷远点的切綫.

例 1.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

先确定分支

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

的漸近綫，我們有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b}{xa}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}.$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right)=-\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0,$$

所以双曲綫有漸近綫

$$y=\frac{b}{a}x,\qquad ay=bx.$$

又当 $x\to-\infty$ 时，我們有

$$y=-\frac{b}{a}x.$$

同法处置另一分支 $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

例 2.

$$y=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}\qquad a>0.$$

由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1-a/x}}=1$$

及

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}=\frac{a}{2},$$

所以

$$y=x+\frac{a}{2}$$

是在正的方向这曲綫的漸近綫。

由

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1,\qquad \lim_{x\to-\infty}(y+x)=-\frac{a}{2}$$

可知，$y=-x-\frac{a}{2}$ 是在負的方向这曲綫的漸近綫。

又

$$x=a$$

也是一条漸近綫。

§7. 作 图 要 点

假如我們要画出 $y=f(x)$ 的图形，需要依以下的步驟来进行考虑。

1）确定自变数 x 的变化范围；

2）确定曲綫与坐标軸的交点；

3）确定曲綫的极大值与极小值，同时也可以看出曲綫的升降情况；

4）确定曲綫的扭轉点，同时也可以看出曲綫的上、下凸的情况；

5）确定漸近綫；

6）如果曲綫有对称性，应明确指出，借以帮助我們画图形。

例 1. 画曲綫

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

1）x 可以从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，但 $x\neq 1$.

2）命 $x=0$，則得 $y=-\frac{9}{4}$，而当 $y=0$ 得 $x=3$，所以曲綫經过两点 $\left(0,-\frac{9}{4}\right)$ 与 $(3,0)$。

3）由

$$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

知极小値在 $(3, 0)$、极大値在 $(-1, -2)$.

4）由二次微商

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

可以看出 $x>1$ 时，$f''(x)>0$，所以曲綫向下凸；而 $x<1$ 时曲綫向上凸；当 $x=1$ 时，得 $f(x)$ 的一間断点.

5）当 x 从右方趋于 1 时，y 趋于正无穷；当 x 从左方趋于 1 时，y 趋于負无穷，所以有 $x=1$ 为其漸近綫.

又

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}+\frac{1}{(x-1)},$$

所以有

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$$

为其另一漸近綫.

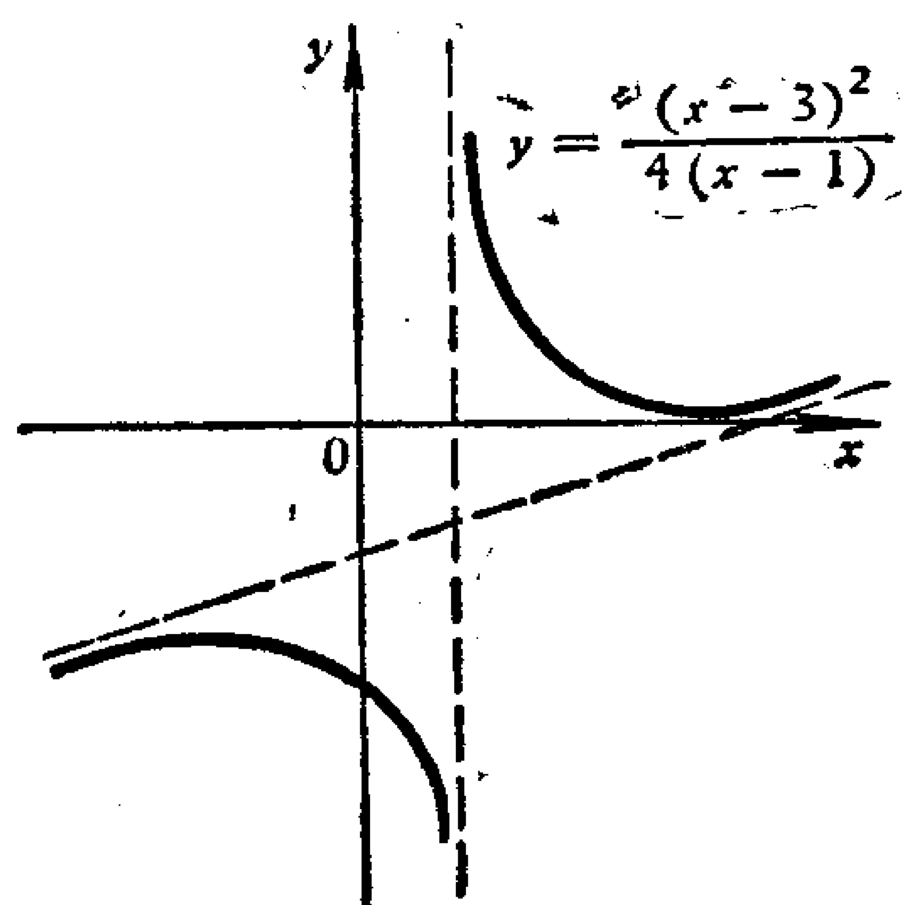


图 134

由这些性質，作出图形（見图 134）.

例 2. van der Waals 的公式是：在压力 p 温度 T 时，一克分子气体的体积 v 适合于

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT,$$

这儿 a, b, R 都是正常数. 我們假定温度 T 已給定，我們来研究压力

$$p=p(v)=-\frac{a}{v^2}+\frac{RT}{v-b}$$

因体积 v 而变化的情況，特别是 $v>b$ 的情況. 函数 $p=p(v)$ 的微商是

$$p'(v)=\frac{2a}{v^3}-\frac{RT}{(v-b)^2}.$$

要研究 $p'(v)$ 的正負情況，我們研究

$$z(v)=\frac{2(v-b)^2}{v^3}-\frac{RT}{a}$$

的变化情況也就够了.

$$z'(v)=\frac{2(v-b)(3b-v)}{v^4}.$$

由此可見

v	b		$3b$		$+\infty$
$z'(v)$	0	+	0	−	0
$z(v)$	$-\frac{RT}{a}$	↗	$\frac{8}{27b}-\frac{RT}{a}$	↘	$-\frac{RT}{a}$

现在分三种情况来进行討論:

1) 若 $\frac{8a}{27b} < RT$, $z(v)$ 常負,故 $p'(v)$ 也常負,即 $p(v)$ 是減函数.

当 v 接近于 b 时, p 变为无穷,图形如图 135 所示.

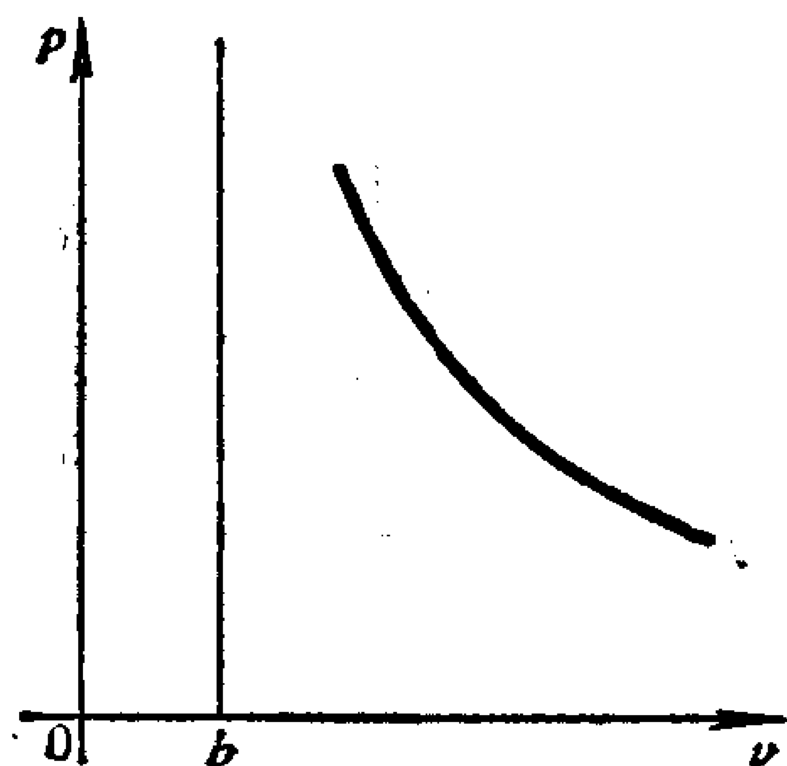


图 135

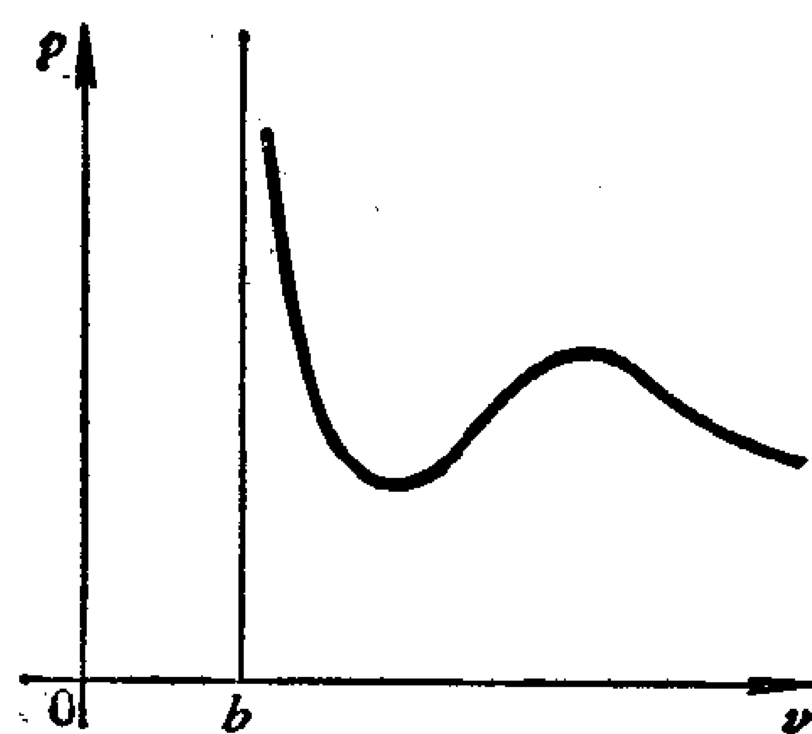


图 136

2) 如果 $\frac{8a}{27b} > RT$, $z(v)$ 有一根 v_1 在 b 与 $3b$ 之間,另一根 v_2 在 $3b$ 与 ∞ 之間,且在二根之間为正,其他的情况为負,因此得(图 136)

v	b		v_1	$3b$	v_2		$+\infty$
$p'(v)$ 及 $z(v)$		−	0	+	0	−	
$p(v)$		↘	m	↗	M	↘	

3) $\frac{8a}{27b} = RT$, 則 $z(v)$ 有重根 $v = 3b$. $z(v)$ 常为負,所以 $p(v)$ 是減函数,但在 $v = 3b$ 有一水平切綫.

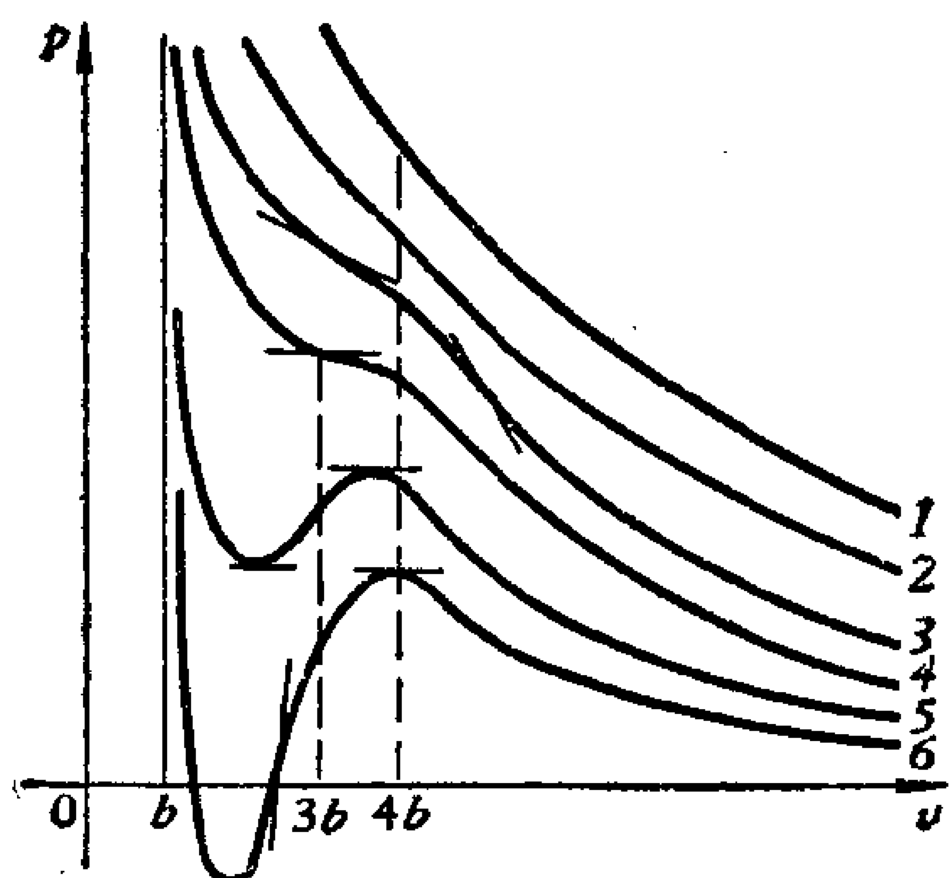


图 137

① $T > \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{a}{bR}$,

② $T = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{a}{bR}$,

③ $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{a}{bR} > T > \frac{8}{27}\frac{a}{bR}$,

④ $T = \frac{8}{27}\frac{a}{bR}$,

⑤⑥ $\Big\}\ T < \frac{8}{27}\frac{a}{bR}$.

例 3.

$$x(x^2+y^2)+a(x^2-y^2)=0, \quad a>0$$

这条曲綫有以下几何意义：取一个定点O及过O的圓(C)及一直綫(D)，一条經过O的直綫Δ，交圓(C)于P，交直綫(D)于Q. Δ上的点M由$\overline{OM}=\overline{PQ}$来定义（图138）. M的軌迹称为圓形立方曲綫，当(D)就是圓直径时，就可以算出是上面的形式（图139）. 取O为原点，圓C的中心在$(a, 0)$，D就是$x=a$.

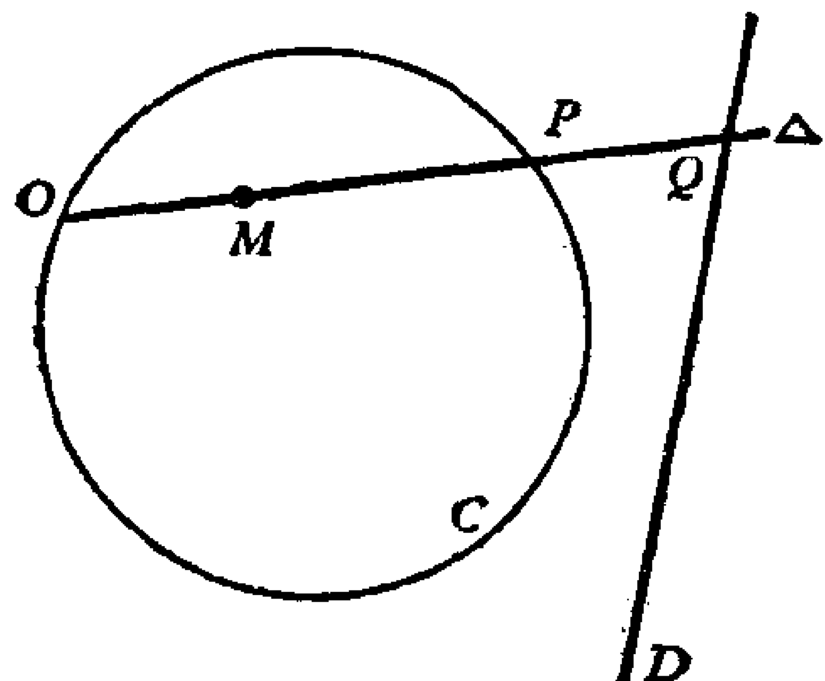


图 138

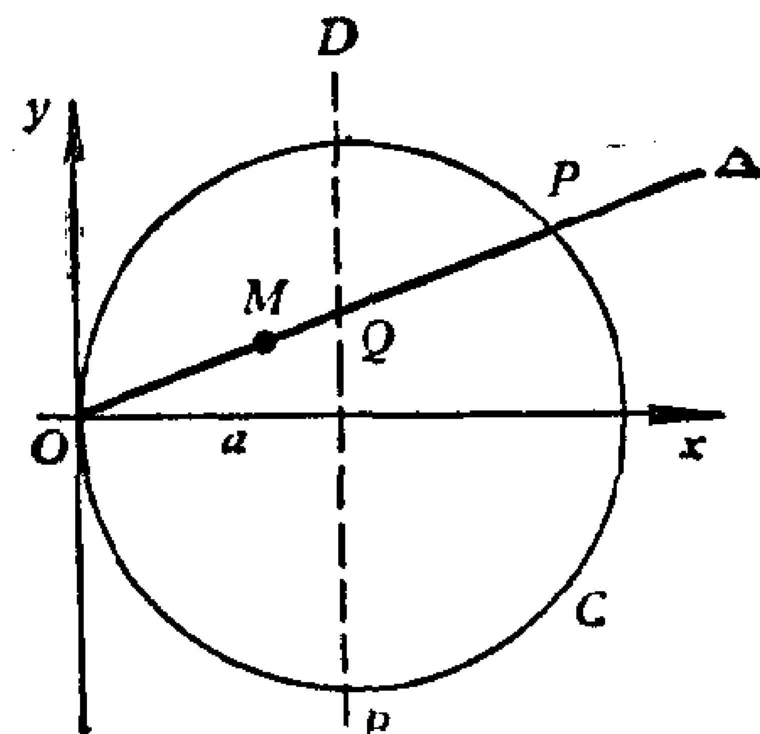


图 139

設M的坐标为(x_0, y_0)，过OM的直綫为

$$y=\frac{y_0}{x_0}x,$$

故Q的坐标是$\left(a, \frac{y_0}{x_0}a\right)$. 圓的方程是$(x-a)^2+y^2=a^2$，交点$P$的横坐标适合于

$$(x-a)^2+\frac{y_0^2}{x_0^2}x^2-a^2=0, \qquad x=\frac{2ax_0^2}{x_0^2+y_0^2}.$$

由

$$\overline{OM}=\overline{PQ},$$

得

$$x_0^2+y_0^2=a^2\left[\left(1-\frac{2x_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right)^2+\frac{y_0^2}{x_0^2}\left(1-\frac{2x_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right)^2\right],$$

$$(x_0^2+y_0^2)^3=a^2\left[(y_0^2-x_0^2)^2+\frac{y_0^2}{x_0^2}(y_0^2-x_0^2)^2\right],$$

$$x_0^2(x_0^2+y_0^2)^2=a^2(y_0^2-x_0^2)^2$$

此即題設之方程.

解出得

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

所以仅在$[-a, a)$之間有曲綫. 由于对x軸的对称性，我們考慮

$$y=x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

其微商

$$y'=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\left(1+\frac{ax}{(a+x)(a-x)}\right).$$

我們考慮

$$a^2+ax-x^2=-\left(x-a\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-a\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

因此

x	$-a$		$a\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		a
y	0	↘	极小	↗	0	↗	$+\infty$

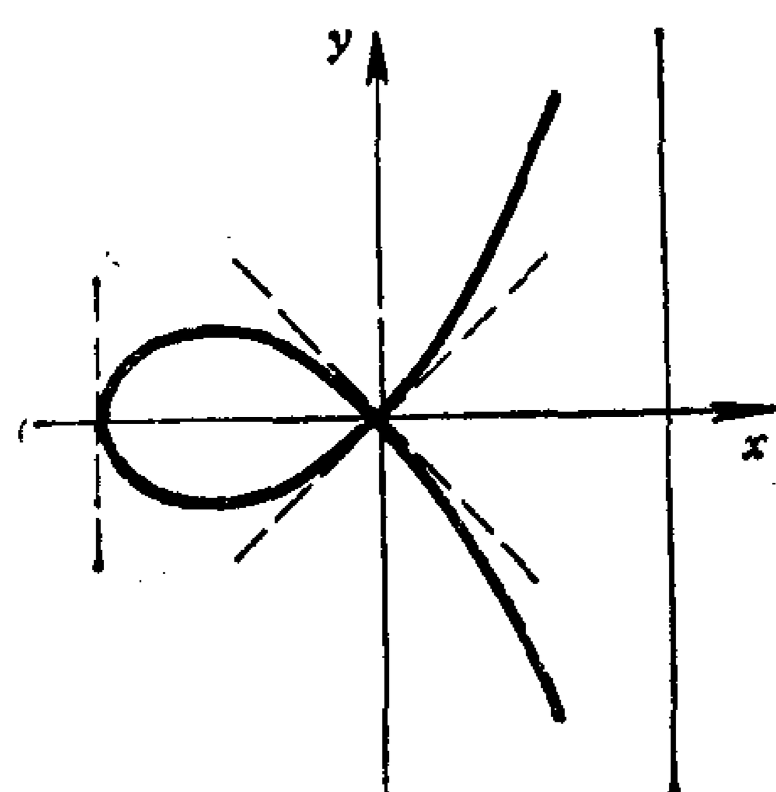


图 140

当 $x=-a$，则 $y'=-\infty$，所以在此处有一垂直切綫：当 $x=0$ 时，$y'=1$，在此处有平分象限的切綫，有漸近綫 $x=a$，这曲綫在这漸近綫之左。

求 y''，易見曲綫是向下凸的，沒有扭轉点。

例 4.

$$y=2\sin x-x\cos x.$$

1）列出 x 在 $\frac{n\pi}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$ 时 y 的值。

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	……	π	2π	3π	……
y	2	-2	2	-2	……	π	-2π	3π	……

2）$y'=\cos x+x\sin x$

$y''=x\cos x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y''	0	$+$	0	$-$	$-\pi$	$-$	0	$+$	2π
y'	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	-1	↘	$-\frac{3\pi}{2}$	↗	1
y	0	↗	极大	↘				极小	↗

3）由

$(2\sin x-x\cos x)^2=4\sin^2 x-4x\cos x\sin x+$
$+x^2\cos^2 x=4+x^2-(2\cos x+x\sin x)^2\leqslant 4+x^2$，
所以 $y=2\sin x-x\cos x$ 包在双曲綫 $y^2-x^2=4$ 之内（見图 141）。

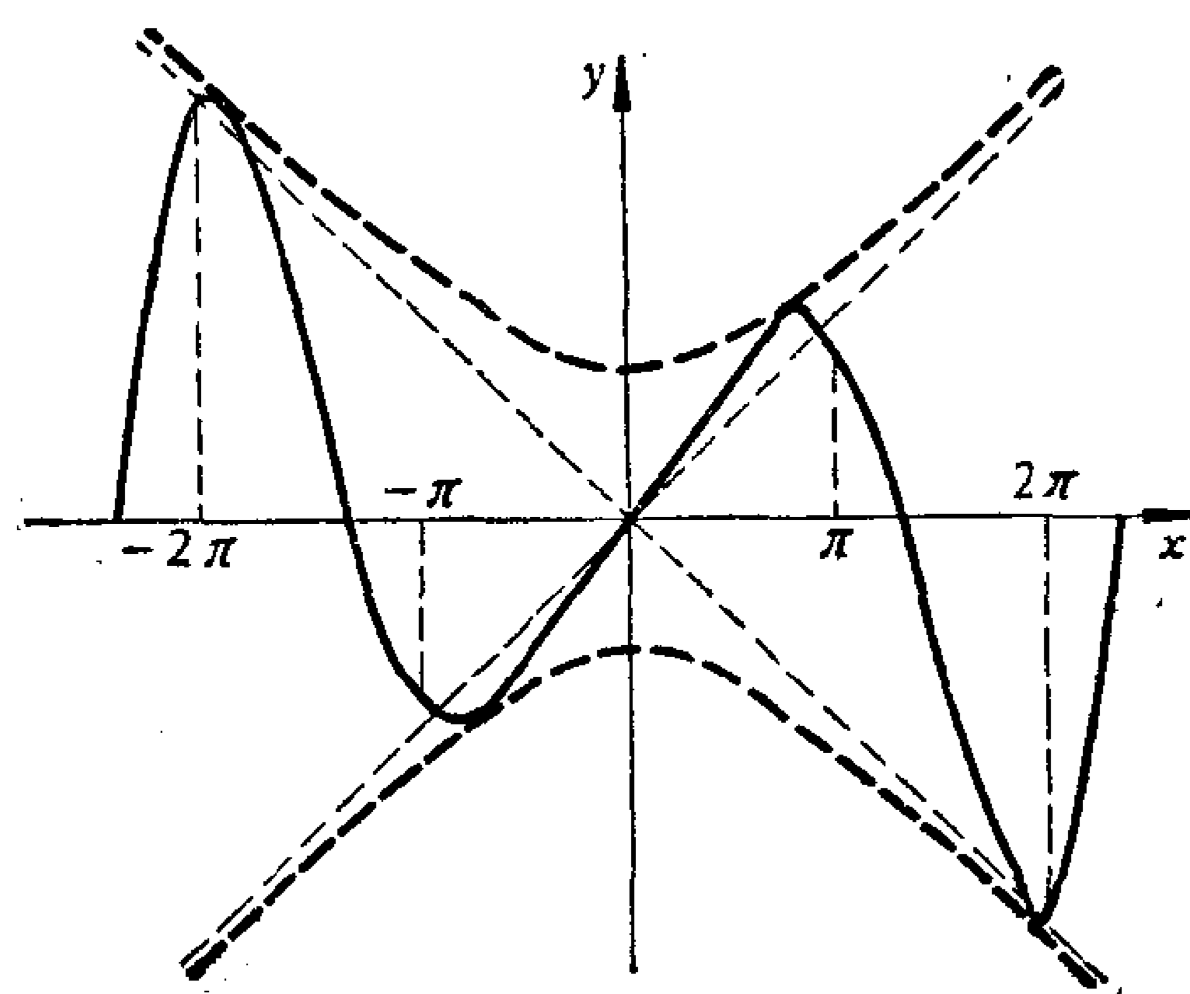


图 141

例 5.

$$y=x+\sqrt{x^2-1}.$$

1）x 所取的值的范围是 $|x|\geqslant 1$；

2）$y'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$-\infty$	-1		1	∞
y'	0	$-\infty$		$+\infty$	$+2$
y	↘	-1		1	↗

(黑影表示不取 $-1 < x < 1$ 这个区間的值)；

3）現在来求当 $x \to \infty$ 时的漸近綫，此时

$$y = x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x + x\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{\varepsilon(x)}{x^2}\right],$$

此处

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

故得漸近綫

$$y = 2x.$$

又当 $x \to -\infty$ 时

$$y = x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x - x\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{\eta(x)}{x^2}\right],$$

此处

$$\lim_{x\to-\infty} \eta(x) = 0.$$

故得漸近綫 $y = 0$（图 142）.

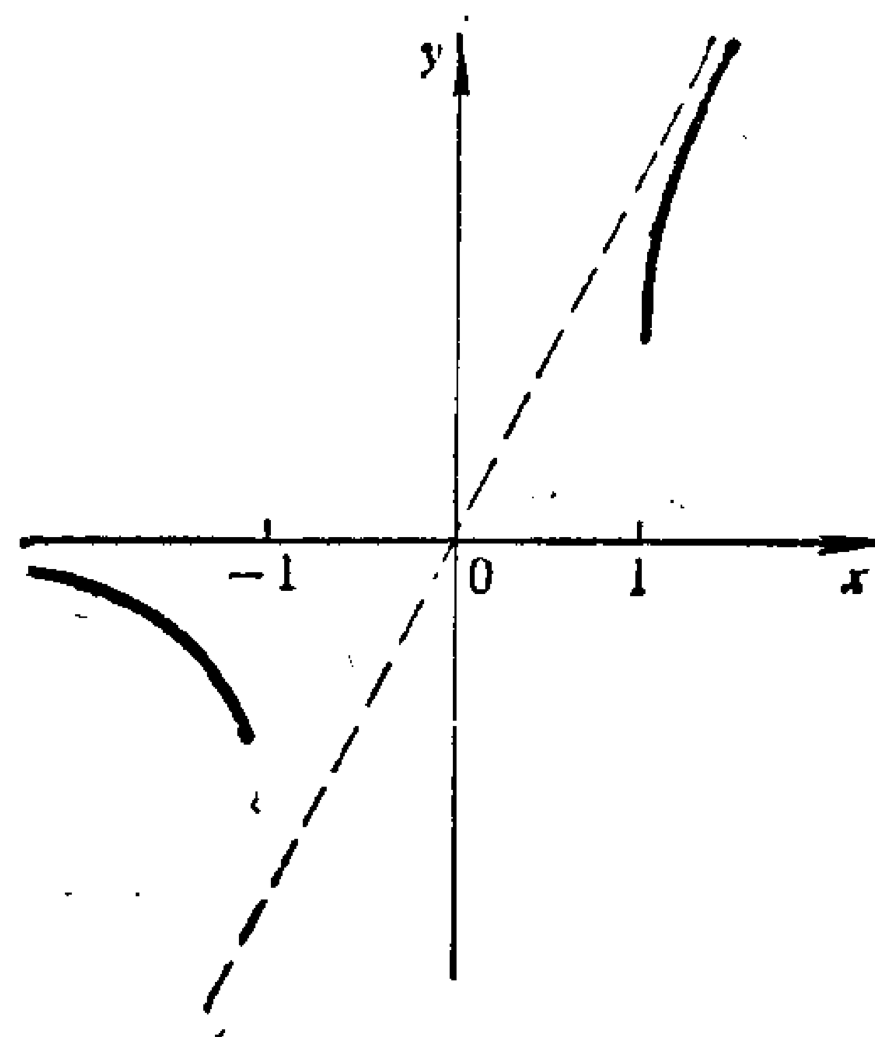


图 142

例 6.

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

1）将坐标軸轉 45°，即用变換

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y).$$

故原方程变为

$$\sqrt{2}\,(X^3 + 3XY^2) - 3(X^2 - Y^2) = 0,$$

即

$$Y = \pm \frac{X}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3 - X\sqrt{2}}{1 + X\sqrt{2}}}.$$

因此

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < X < \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

2）我們考慮一支

$$Y = \frac{X}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3 - X\sqrt{2}}{1 + X\sqrt{2}}},$$

得

$$Y' = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3 - X\sqrt{2}}{1 + X\sqrt{2}}}\left[1 - \frac{2X\sqrt{2}}{(3 - X\sqrt{2})(1 + X\sqrt{2})}\right].$$

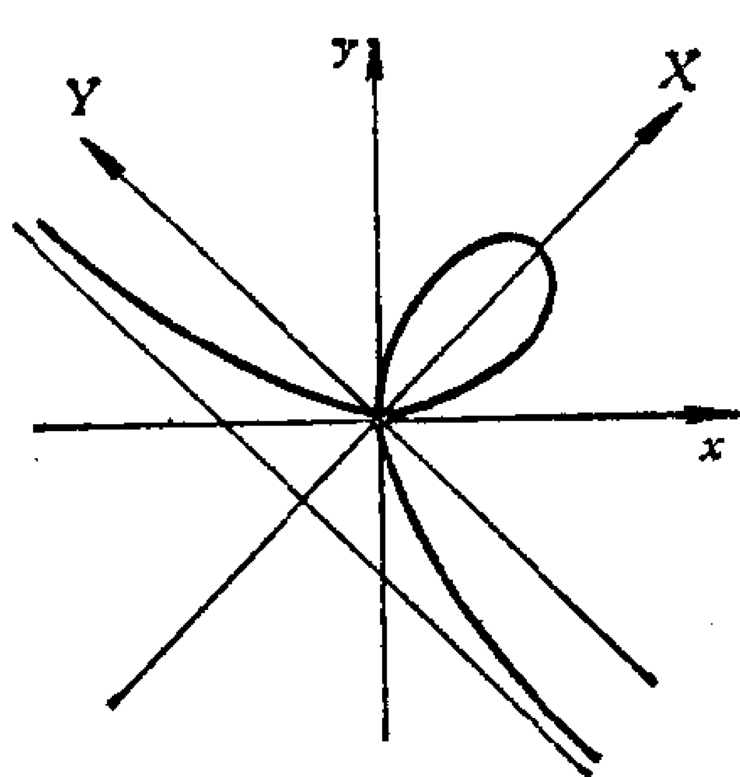


图 143

故得

X	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\frac{3}{\sqrt{2}}$
Y'	$+\infty$	$+$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
Y	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$ 极大	↘	0

§8. 参变表示法的曲綫描图

例 1.

$$x = \sin t, \qquad y = \frac{\sin t}{2+\cos t}.$$

这都是 t 的以 2π 为周期的函数,所以这曲綫是当 t 由 $-\pi$ 变到 π 的軌迹. 当 t 变为 $-t$ 时, x, y 变为 $-x$, $-y$, 所以曲綫对 O 是对称的. 所以只要考虑 $0 \leqslant t \leqslant \pi$ 的情況.

求微商

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1+2\cos t}{(2+\cos t)^2}.$$

所以有下表

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	0

由

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+2\cos t}{\cos t(2+\cos t)^2},$$

可知,当

$$t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3} \text{ 及 } \pi \text{ 时}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3},\ \infty,\ 0 \text{ 及 } 1.$$

因而作出图 144.

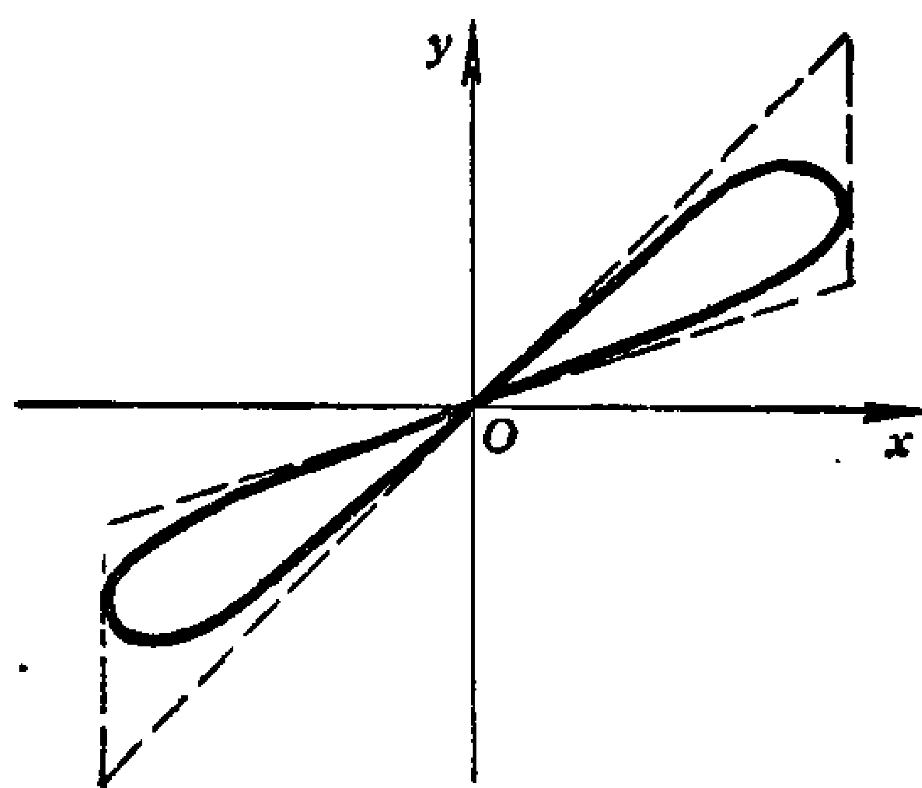


图 144

例 2. 描繪曲綫

$$x = \frac{t^3-t^2+2}{t}, \qquad y = \frac{t^3-1}{t+1}.$$

除 $t=0$ 及 $t=-1$ 之外, t 可取区間 $-\infty < t < \infty$ 中的任何值. 由

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t^3-t^2-2}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2t^3+3t^2+1}{(t+1)^2}$$

(試自証 $x'=0$ 有唯一实根 t_2 在 0 与 ∞ 之間, $y'=0$ 有

唯一实根 t_1 在 $-\infty$ 与 -1 之間),故得

t	$-\infty$		t_1		-1		0		t_2		$+\infty$
x'		$-$		$-$			▓	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	▓			$+$		$+$	
x	$+\infty$		$\searrow$		0	$\searrow -\infty$	▓	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$	▓	$-\infty$ $\nearrow$	-1		$\nearrow$		$+\infty$

(黑影处表示間断). 由此可見

$$x=0 \quad 及 \quad y=-1$$

是两条渐近綫.

又当 $t\to\infty$ 时

$$x=t^2-t+\frac{2}{t}$$

$$y=\frac{t^3-1}{t}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t}}=\frac{t^3-1}{t}\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\cdots\right)=t^2-t+1-\frac{2}{t}+\frac{\varepsilon(t)}{t},$$

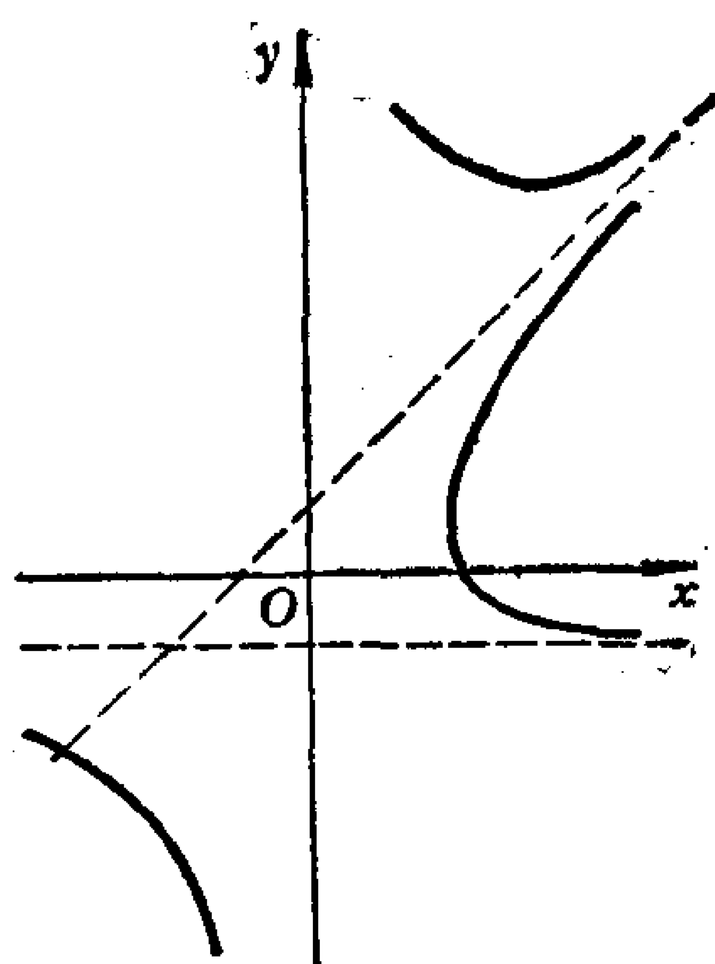


图 145

此处

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0.$$

故得另一渐近綫

$$y-x-1=0.$$

因而作出图 145.

§9. 切綫,法綫,子切綫,子法綫

曲綫

$$y=f(x)$$

在点 $M(x,y)$ 的切綫是

$$Y - y = y'(X - x),$$

而法綫(垂直于切綫的直綫)是

$$X - x + y'(Y - y) = 0.$$

切綫与 x 軸的交点 T 的横坐标等于(命 $Y = 0$)

$$x - \frac{y}{y'}.$$

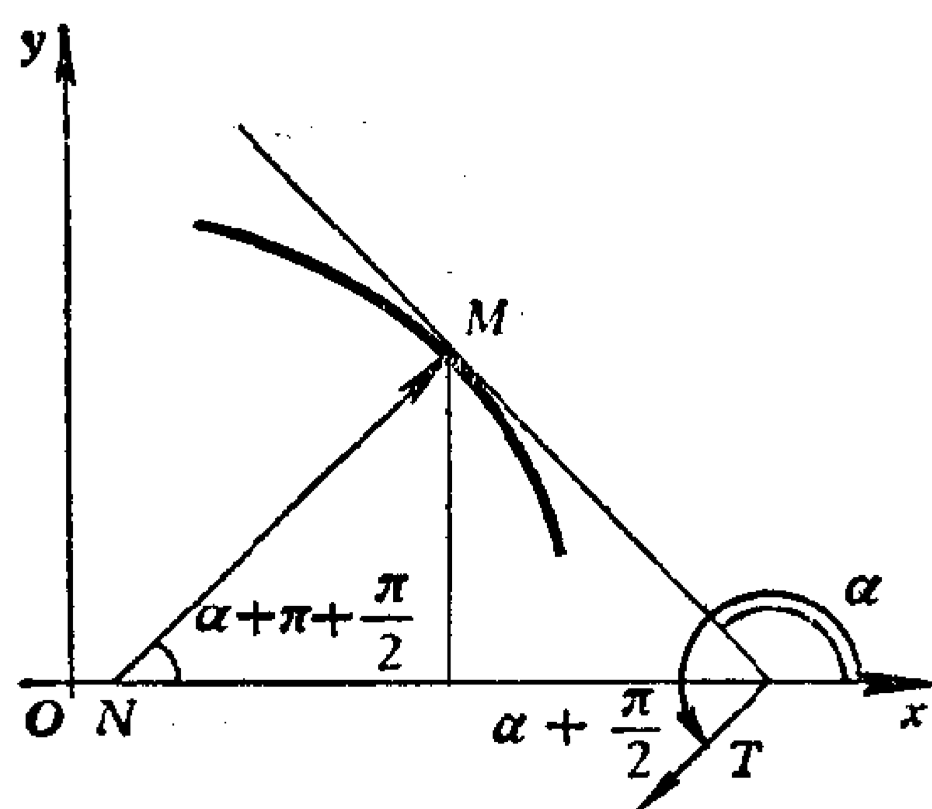


图 146

法綫与 x 軸的交点的横坐标等于 $x + y'y$.

子切綫就是 MT 在 x 軸上的射影，其长就是 $-y/y'$. 子法綫就是 NM 在 x 軸上的射影，其长就是 $y'y$.

綫段 TM 及 MN 的长度各称为切綫长及法綫长,故得

$$\overline{TM} = \left|\frac{y}{y'_x}\sqrt{1 + y'^2_x}\right|,$$

$$\overline{MN} = \left|y\sqrt{1 + y'^2_x}\right|.$$

切綫长、法綫长及子切綫、子法綫对切綫与法綫的作图有帮助.

例 1. 求作抛物綫 $y^2 = 2px$ 的切綫与法綫.

由

$$yy'_x = p,$$

故抛物綫的子法綫长为常数.

因而得抛物綫的法綫簡便作图法如下：过 M 作平行于 y 軸的直綫交 x 軸于 P. 量 $PN = p$. 联接 MN 就是法綫,随之而得切綫(图 147).

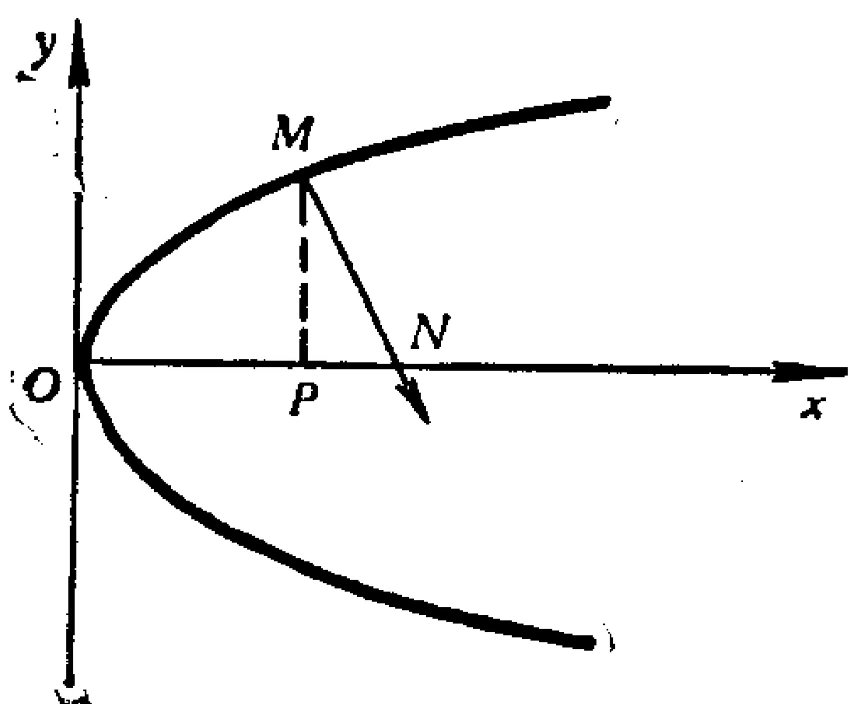


图 147

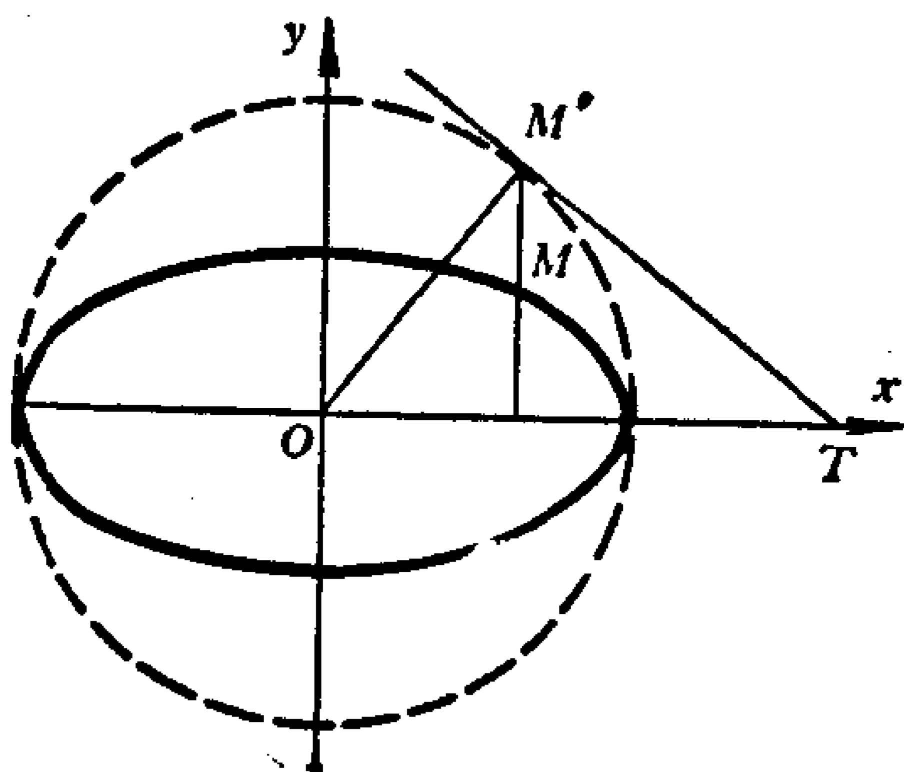


图 148

例 2. 求作椭圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切綫与法綫.

椭圓的切綫方程是

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) = 0.$$

当 $Y = 0$ 时，得 $X = \frac{a^2}{x}$. 故椭圓在 $M(x, y)$ 的切綫与 x 軸的交点 T 与 y 及 b 无关.

故得求椭圓切綫的簡便作图法：过M作平行于Y軸的直綫交圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 于M'. 作此圓过M'的切綫，交X軸于T. 联接T与M，就得到椭圓的切綫了，随之而得法綫(图148).

特别当曲綫由极坐标 $r=f(\theta)$ 給出时，改写成直角坐标，则得

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,$$
$$y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta.$$

因此

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta}.$$

用极坐标来研究曲綫，則切綫的位置，往往不用它与极軸的交角α来确定，而用它与向径的延长綫的交角ω来确定. 由图149知

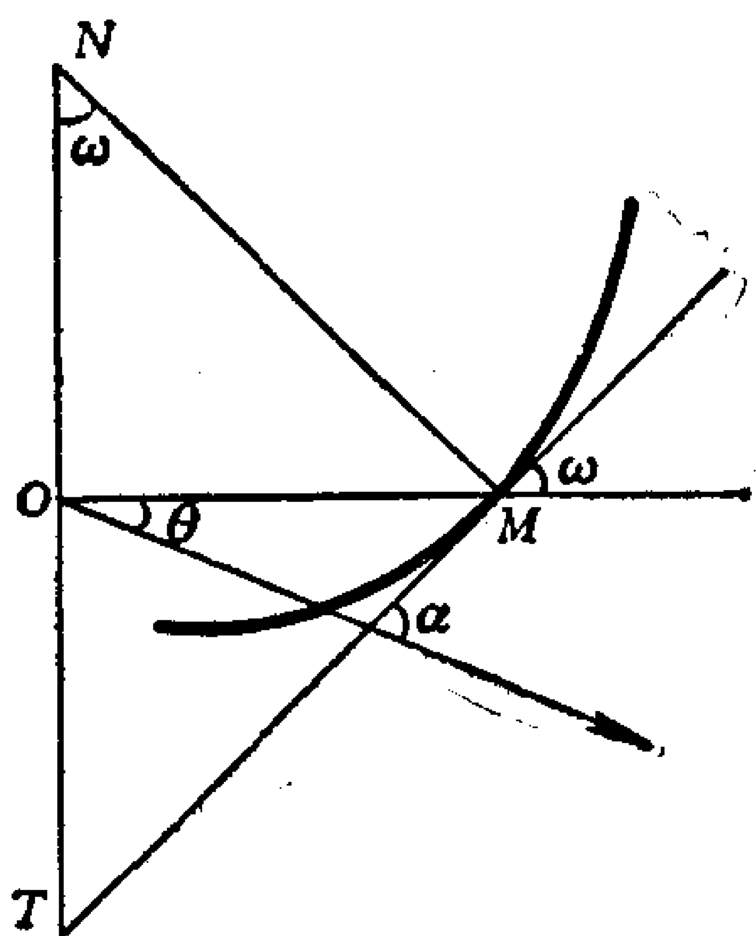


图 149

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}(\alpha-\theta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta}=\frac{xy'_x-y}{x+yy'_x}=\frac{r}{r'_\theta}.$$

通过原点O，作垂直于向径的軸，設切綫与法綫分别与它交于T与N，則TO, ON, TM, MN分别称为**极子切綫**，**极子法綫**，**极切綫**与**极法綫**. 由图149可知

$$\overline{TO}=r\operatorname{tg}\omega=\frac{r^2}{r'_\theta},$$

$$\overline{ON}=r\operatorname{ctg}\omega=r'_\theta,$$

$$\overline{TM}=\left|\frac{r}{r'_\theta}\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\right|,$$

$$\overline{MN}=\sqrt{r^2+r'^2_\theta}.$$

例 3. 求作双曲螺綫 $r=\frac{a}{\theta}$ 的切綫.

由 $r'_\theta=-\frac{a}{\theta^2}$ 可知极子切綫等于 $-a$ (常数)，故得切綫簡便作图法見图150：

$$a>0.$$

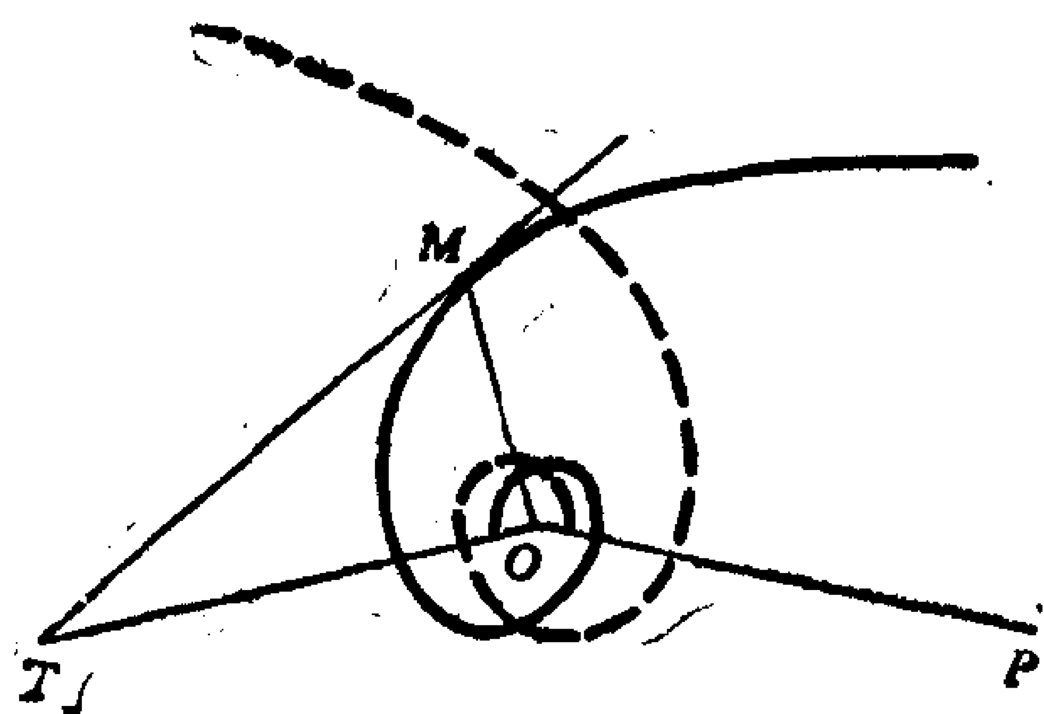


图 150

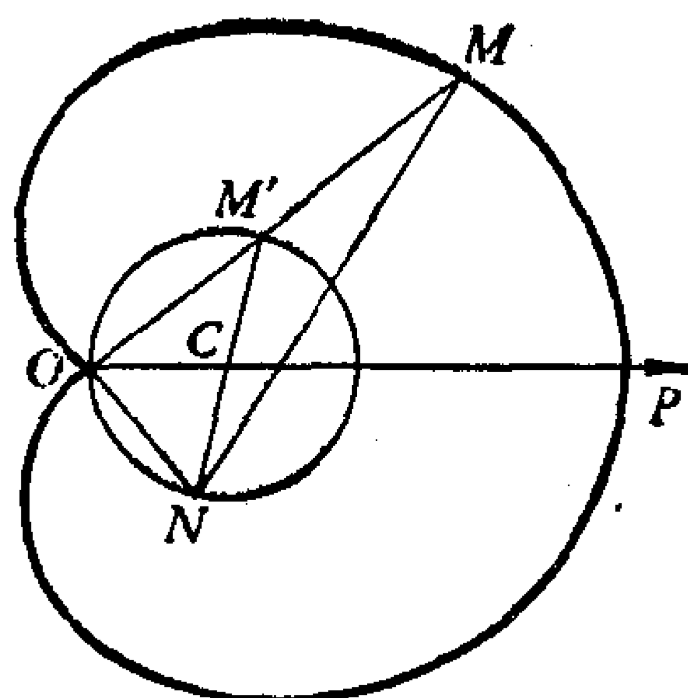


图 151

例 4. 求作蚶綫 $r = a\cos\theta + b$ 的法綫.

由

$$\text{极子法綫} = r'_\theta = -a\sin\theta,$$

故极子法綫与 b 无关,即无論什么 b,同一向径上的点所对应的 N 都是一样的. 故得法綫的作法如图 151: 过蚶綫上一点 M, 联 MO, 交圓 $r = a\cos\theta$ (对应于 $b = 0$ 的蚶綫) 于 M', M' 与圓心 C 的联綫交圓于 N, 則 N 与 M 的联綫就是蚶綫的法綫.

§10. 积分公式

如果 $F(x)$ 的微商是 $f(x)$, 也就是

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x),$$

我們就称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的积分原函数,或称为 $f(x)$ 的不定积分. 用符号

$$F(x) = \int f(x)dx = \int dF(x)$$

来表它. 但是必須注意,一个函数的积分原函数并不是唯一的. 例如,对任一常数 C, 我們有

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

我們現在来証明这一現象的反定理.

定理 1. 一个函数的积分原函数只能相差一个常数.

証. 若

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dG(x)}{dx} = f(x),$$

即

$$\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = 0.$$

所以我們如果能够証明:"微商为 0 的函数一定是常数"即足.

假定在 $[a, b]$ 中定义的函数 $F(x)$ 的微商是 0,由中值定理可知

$$F(x) - F(a) = (x - a)F'(\xi) = 0, \quad a < \xi < x \leqslant b.$$

即无論 x 是 $[a, b]$ 中之何值,常有 $F(x) = F(a)$, 即得所証.

由这定理立刻推出

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

这儿C是一个常数.

又显而易見,对任意常数a与b,常有

$$\int (aF(x) + bG(x))dx = a\int F(x)dx + b\int G(x)dx + C.$$

把第五章§7的微商公式表倒轉順序,就可以得出本节之末的积分表. 这积分表中仅仅包括了很簡单的几个积分,較复杂的积分方法以后再系統地介紹. 注意,在求积分时,永远不要忘記写上积分常数C.

积 分 公 式 表

1) $\int au'dx = au + C.$

2) $\int (u_1' + \cdots + u_n')dx = (u_1 + \cdots + u_n) + C.$

3) $\int (u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'u_3\cdots u_n + u_1u_2\cdots u_n')dx = u_1u_2\cdots u_n + C.$

4) $\int \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{u}{v} + C.$

5) $\int 1dx = x + C.$

6) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{1+a} + C. \qquad (a \neq -1)$

7) $\int \frac{1}{x}dx = \log x + C, \quad \int \frac{1}{x}dx = \log a \log_a x + C.$

8) $\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$

9) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

10) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

11) $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C.$

12) $\int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

13) $\int \operatorname{tg} x \cdot \sec x dx = \sec x + C.$

14) $\int \operatorname{ctg} x \csc x dx = -\csc x + C.$

15) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C.$

16) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

17) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arc\,sec} x + C.$

18) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

19) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

20) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$

21) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$

22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{sh}^{-1} x + C.$

23) $\int \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{ch}^{-1} x + C.$

24) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{th}^{-1} x + C, \qquad (-1 < x < 1).$

25) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{cth}^{-1} x + C, \qquad (x > 1, x < -1).$

26) $\int y'_u u'_x dx = y + C.$

現在举几个簡单的例子来說明积分常数的意义:

先考虑等速运动. 在直綫上取一点作为原点或者称它为家. 在离"家"C里的地方依每小时v里的速度背向着"家"前进, t小时后离家多远? 当然离家

$$s = C + vt$$

里,速度就是

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

所以仅仅知道了速度v和时間t,我們并不能确切地知道身在何处,必須知道出发点的所在. C就是当$t=0$时出发点离家的距离. 如果要問离我們出发点多远, 那末C就等于0,而t小时后走了vt里.

再考虑等加速运动. 例如,物体墜地,地心吸力的加速度是

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \qquad (g = 9.81\,[\text{米}]/[\text{秒}]^2).$$

要研究这一个問題, 就必須知道开始观察时(即$t=0$的时候)物体的所在地以及那时的速度. 例如,我們从地面上算起, 物体从s_0公尺高度以每秒鈡v_0的速度向下墜,問几秒鈡后达到地面. 先算t秒鈡后的速度:积分一次,得出

$$\frac{ds}{dt} = gt + C.$$

当$t=0$时,速度$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = v_0$, 所以$C = v_0$. 再积分,得物体所走过的总路程是

$$\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C',$$

离地面的高度是

$$s_0 - \left(\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C'\right).$$

当 $t = 0$ 时,高度是 s_0, 所以 $C' = 0$, 卽得 t 秒后,高度等于

$$s_0 - \frac{1}{2}gt^2 - v_0t,$$

落地的时間就是

$$s_0 - \frac{1}{2}gt^2 - v_0t = 0$$

的解答.

这說明了:我們仅知加速度,是不能定出物体运动所在点的. 我們必須知道在开始观察时这物体在那儿,以怎样的速度运动,才能由加速度知道这物体运动的規律.

§11. 隐函数的微分

卽使对沒有解出的方程

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

我們也能求函数 y 对 x 的微商.

例 1. 命

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

我們要求出 y'.

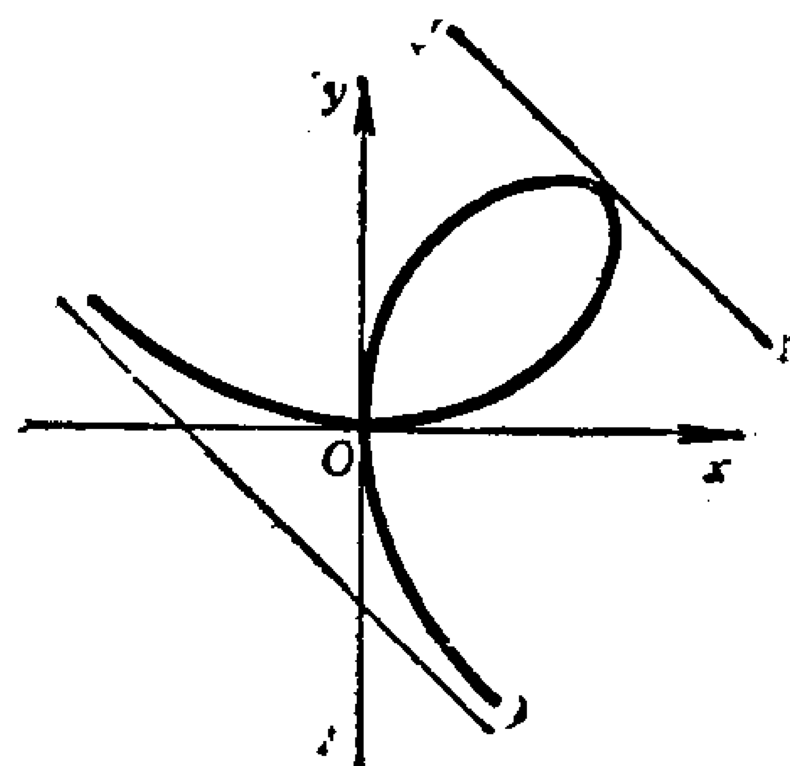


图 152

逐項求微分可知

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3ay - 3ax\frac{dy}{dx} = 0.$$

所以得出

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

这曲綫經过一点 $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. 在这一点我們有

$$y' = -1.$$

所以得切綫

$$y - \frac{3}{2}a = -\left(x - \frac{3}{2}a\right),$$

卽

$$x + y = 3a.$$

为了把这方法一般化,我們引进偏微商的概念. 在 $F(x, y)$ 中把 y 看成常数,对 x 进

行微商,称为 $F(x, y)$ 对 x 的偏微商,用

$$F_x(x, y) \quad 或 \quad \frac{\partial}{\partial x}F(x, y)$$

来表它. 同样,用

$$F_y(x, y) \quad 或 \quad \frac{\partial}{\partial y}F(x, y)$$

来表示 $F(x, y)$ 对 y 的偏微商,一般說我們有

定理 1. 假定 (x_0, y_0) 是适合于

$$F(x, y) = 0$$

的一点,并且由 (1) 定义一个 x 的函数 $y = y(x)$, y 是 x 的連續函数,微商及偏微商都存在,且 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \mid y_0 = y(x_0)$, 則在这一点,我們有

$$y' = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y} = -F_x/F_y.$$

这称为隐函数的微商公式(所謂隐函数乃指 $F(x, y) = 0$ 还沒有对 y 解出来).

証. 当 x_0 增加 Δx 时, y_0 增加了 Δy. 当 $\Delta x \to 0$ 时, Δy 也接近于 0. 由

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0,$$

可知

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) = 0.$$

即得

$$\frac{F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} + \\ + \frac{F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

由中值定理得

$$F_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \Delta y) + F_y(x_0, y_0 + \theta'\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

此处 $0 < \theta < 1$, $0 < \theta' < 1$. 当 $\Delta x \to 0$, 得

$$F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0.$$

即得定理.

在曲綫 (1) 上的一点 (x_0, y_0), 切綫方程是

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0),$$

即

$$F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0.$$

这样的表达形式,可以表达斜率是 ∞ 的情形.

再回到例 1. 如果 (x_0, y_0) 是

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

上的一点,在这点的切綫方程是

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 - 3axy)\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 - 3axy)\right)_0 (y - y_0) = 0.$$

我們用 $(f(x))_0 = (f(x))_{x=x_0}$ 表 $f(x_0)$, 即得

$$(x_0^2 - ay_0)(x - x_0) + (y_0^2 - ax_0)(y - y_0) = 0,$$

即

$$(x_0^2 - ay_0)x + (y_0^2 - ax_0)y = ax_0y_0.$$

在 $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$ 的切綫, 如前所述. 在原点附近, 这式子全等于 0. 这样的点称为奇异点,以后再进行討論.

我們現在討論以下更一般的問題. 如果

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

我們研究函数

$$G(x, y)$$

对 t 的微商. 結果是

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

(当然我們必須假定所应有的微商的存在性等). 用微分形式表出就是

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy.$$

我們来証明这一結果. 当給了 t 的变量 Δt 时, x 及 y 的变量各为 Δx 与 Δy. 由中值公式可得

$$\begin{aligned} G(x + \Delta x, y + \Delta y) - G(x, y) &= G(x + \Delta x, y + \Delta y) - G(x, y + \Delta y) \\ &+ G(x, y + \Delta y) - G(x, y) = G_x(x + \theta\Delta x, y + \Delta y)\Delta x \\ &+ G_y(x, y + \theta'\Delta y)\Delta y, \end{aligned}$$

此处 $0 < \theta < 1$, $0 < \theta' < 1$. 除以 Δt 即得

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

这結果比定理 1 更广泛. 取 $x = t$, 即得定理 1.

应用这結果我們可以求隐函数的高阶微商. 例如,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) = -\frac{1}{F_y}\frac{d}{dx}(F_x) + \frac{F_x}{F_y^2}\frac{d}{dx}F_y = \\ &= -\frac{1}{F_y}\left((F_x)_x + (F_x)_y\frac{dy}{dx}\right) + \frac{F_x}{F_y^2}\left((F_y)_x + (F_y)_y\frac{dy}{dx}\right) = \\ &= -\frac{1}{F_y}\left((F_x)_x + (F_x)_y\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\right) + \frac{F_x}{F_y^2}\left((F_y)_x + (F_y)_y\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\right) \end{aligned}$$

等等.

§ 12. $\frac{0}{0}$型的不定式

若当 $x=a$ 时, $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都等于 0, 则当 $x=a$ 时, 商 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 是这样的一个不定式: $\frac{0}{0}$. 本节就是研究当 $x\to a$ 时 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 的趋限情况.

定理 1 (l'Hospital). 假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区間 $[a,b]$ 内定义, 而且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, 并且 $f'(a)$ 及 $g'(a)$ 都存在而且有限, $g'(a)\neq 0$, 则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

証. 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 点都連續, 故有 $f(a)=g(a)=0$. 所以

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

令 $x\to a$ 卽得所需.

如果 $g'(a)=0$, 但 $f'(a)\neq 0$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 趋向 ∞; 如果 $g'(a)=f'(a)=0$, 我們还可継續上述手續. 續行可得

定理 2. 如果 $f(x)$, $g(x)$ 有 n 阶微商, 且

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}f'(x)=\cdots=\lim_{x\to a}f^{(n-1)}(x)=0,$$
$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}g'(x)=\cdots=\lim_{x\to a}g^{(n-1)}(x)=0$$

及 $g^{(n)}(a)\neq 0$, 而 $f^{(n)}(a)$ 有限, 则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

例 1. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\log(e-x)+x-1}.$$

分子分母都是零, 我們可以用定理 1. 极限等于

$$\left.\frac{e^x+e^{-x}}{1-\dfrac{1}{e-x}}\right|_{x=0}=\frac{2}{1-\dfrac{1}{e}}=\frac{2e}{e-1}.$$

例 2. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x},$$

此处有

$$\begin{aligned}
f(x)&=e^x-e^{-x}-2x, & f(0)&=0; & g(x)&=x-\sin x, & g(0)&=0,\\
f'(x)&=e^x+e^{-x}-2, & f'(0)&=0; & g'(x)&=1-\cos x, & g'(0)&=0,\\
f''(x)&=e^x-e^{-x}, & f''(0)&=0; & g''(x)&=\sin x, & g''(0)&=0,\\
f'''(x)&=e^x+e^{-x}, & f'''(0)&=2; & g'''(x)&=\cos x, & g'''(0)&=1.
\end{aligned}$$

所以极限等于 2.

注意. 1) 如果 $f(a) \neq 0$ 或 $g(a) \neq 0$, 我們并不能得出

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

換言之, 在应用定理 2 时, 我們必須步步检驗是否是 $\frac{0}{0}$. 到了不是这样的情况时, 运算应立刻終止, 决不能盲目地对分子与分母求微商.

2) 如果有可約的因子, 最好早早約去. 这样可以簡化我們的演算. 如果有极限值非 0 的因子, 我們也可以取出去.

例 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2xe^x - 3e^x + 3 + x}{3(e^x - 1)^2} \text{（上下求微商, 并約去 } e^x\text{）}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{2xe^x + 2e^x - 3e^x + 1}{2(e^x - 1)e^x} \text{（微商）}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{-e^x + 2xe^x + 1}{e^x - 1} \text{（把 } \lim_{x \to 0} e^x = 1 \text{ 取出去）}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{2xe^x + e^x}{e^x} = \frac{1}{6}.$$

定理 3. 如果 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 內定义且

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0,$$

并且 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 中存在且有限, $g'(x) \neq 0$; 如果极限

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

存在, 则也一定有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

證. 換变数 $x = \frac{1}{t}$, 則得

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

§ 13. $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式

定理 1. 假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 內定义, 并且

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty;$$

$f'(x)$ 与 $g'(x)$ 存在，并且 $g'(x) \neq 0$. 如果

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$

則

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

証. 先研究K是有限的情况.

因为 $g'(x) \neq 0$, 所以照 Darboux 定理，它的符号不变. 我們不妨假定 $g'(x) < 0$, 如此当 x 漸減时，而 $g(x)$ 变大，当 $x \to a$ 时 $g(x) \to +\infty$. 所以我們不妨假定 $g(x) > 0$.

对任一 ε, 我們定有 $\eta > 0$ 使

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad a < x < a + \eta.$$

命 $x_0 = a + \eta$, 則 x 在 a 与 x_0 之間. 在 $[x, x_0]$ 中用 Cauchy 定理可知

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad x < c < x_0.$$

所以

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

直接驗証，我們有恆等式

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right],$$

由此得出

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right|.$$

由(1)可知，右边第二項在 $x < x_0 = a + \eta$ 时必小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 又因当 $x \to a$ 时 $g(x) \to +\infty$. 所以第一項也趋于 0, 且能找得 $\delta > 0$ (可以使 $\delta < \eta$) 使 $a < x < a + \delta$ 时第一項亦小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 所以得出了

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon.$$

这証明了所需要的結果.

当 $K = \infty$, 已知至少在 a 近处有 $f'(x) \neq 0$, 所以 $\lim\limits_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, 也就有 $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. 所以

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

类似上节，可以討論变元趋向 ∞ 的情况.

定理 2. 假定 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 内定义且

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty.$$

在 $[c, +\infty)$ 內存在着有限导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$，且 $g'(x) \neq 0$. 如果极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

存在(有限或无穷)，則

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

証明留給讀者.

例 1. 当 $\mu > 0$ 时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^{\mu}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}} = 0.$$

例 2. 当 $a > 1, \mu > 0$ 时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{a^{x}\log a}.$$

若 $\mu > 1$，則右端仍然是 $\frac{\infty}{\infty}$，一次一次地接着做，总有一次分子的 x 的指数 < 0，因此得出

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}} = 0.$$

注意. 1) 在这两条定理里，我們假定了微商的比存在，而后求函数的极限. 我們不能倒过来用. 例如，极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

是存在的，但是微商之比 $1+\cos x$ 却沒有极限.

2) 定理 2 的变数 x 是連續变数，我們有关于貫的相仿的定理.

定理 3 (O. Stolz). 如果 $y_n \to \infty$ 并且 $y_{n+1} > y_n$，則有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

只須等式右边的极限已知其存在(有限或无穷).

証. 先假定有有限数 l 使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l,$$

即任給 $\varepsilon > 0$，必有 N，使 $n > N$ 时

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

或

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

也就是

$$\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N},\ \frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\ \cdots,\ \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}},\ \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

都在$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}, l+\frac{\varepsilon}{2}\right)$之中. 由于$\frac{p}{q}<\frac{p+p'}{q+q'}<\frac{p'}{q'}$, 所以

$$\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(x_n-x_N是所有的分子之和, y_n-y_N是所有的分母之和).

由恆等式

$$\frac{x_n}{y_n}-l=\frac{x_N-ly_N}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right)$$

可得

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|\leqslant\left|\frac{x_N-ly_N}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-l\right|,$$

当$n>N$时第二項$<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于$y_n\to\infty$, 所以第一項在$n>N'$时也$<\frac{\varepsilon}{2}$(并可取$N'>N$), 就是当$n>N'$时

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-l\right|<\varepsilon.$$

卽得所証.

如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty,$$

当n充分大时有

$$x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1},$$

所以当$y_n\to+\infty$时, x_n也$\to+\infty$. 研究$\frac{y_n}{x_n}$. 由前結果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty.$$

請比較定理 1 与定理 3 的証明.

§ 14. 其他型的不定式

1) $0\cdot\infty$型的不定式. 可以变成为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$.

假定

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty,$$

則

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

这样便把 $0\cdot\infty$ 型变为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

例 1. 命 $\mu>0$

$$\lim_{x\to 0}(x^{\mu}\cdot\log x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0.$$

2) $\infty-\infty$ 型的不定式.

假定

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty,$$

我們可以利用

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

把問題化为 $\frac{0}{0}$. 或者研究

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}},$$

把問題化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

例 2. 求

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x},$$

但

$$\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}.$$

前一因子的极限等于 2. 又

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cos x}=\frac{1}{3},$$

所以所求的极限等于 $\frac{2}{3}$.

3) 形如 1^{∞}, 0^0, ∞^0 的不定型.

如

$$y=(f(x))^{g(x)}.$$

取 $\log y=g(x)\log f(x)$, 便各得 $\infty\cdot 0$, $0\cdot(-\infty)$ 及 $0\cdot\infty$ 的型.

例 3. 命

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

当 $x \to 0$, 这是 1^∞ 型.

因为所討論的是 x 的偶函数,所以不妨假定 $x>0$. 现在有

$$\log y = -\frac{\log x - \log \sin x}{1-\cos x},$$

接連微分两次,可知

$$\lim_{x\to 0}\log y = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\dfrac{\sin x}{x}+2\cos x} = -\frac{1}{3}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{3}}.$$

例 4.

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\log x}}.$$

当 $x \to +\infty$ 这是 0^0 型. 取 $\log y = \dfrac{\log\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)}{\log x}$, 此为 $\dfrac{\infty}{\infty}$, 故

$$\lim_{x\to+\infty}\log y = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x}\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\dfrac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{1}{e}.$$

第七章　函数的 Taylor 展开式

§1. 多項式的 Taylor 公式

命 $p(x)$ 表一 n 次多項式

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n, \tag{1}$$

逐次微商可得

$$\begin{aligned}
p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1},\\
p''(x) &= 1\cdot 2\cdot a_2 + 2\cdot 3a_3x + \cdots + (n-1)n\cdot a_nx^{n-2},\\
p'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 + \cdots + (n-2)(n-1)n\cdot a_nx^{n-3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p^{(n)}(x) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdots na_n.
\end{aligned}$$

在这些式子里，命 $x=0$，立刻得出

$$a_0 = p(0),\quad a_1 = \frac{p'(0)}{1!},\quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!},\quad a_3 = \frac{p'''(0)}{3!},\ \cdots,\quad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

把这些系数表示式代入(1)式可得

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

这公式与(1)的区别只在于系数的写法不同，而沒有什么性質上的差异．但是写法(2)的形式启示了以下一系列的工作．

首先，我們不依 x 的方次展开多項式，而依 $x-x_0$ 的方次展开多項式，x_0 是 x 的某一特別数值：

$$p(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \cdots + A_n(x-x_0)^n \tag{3}$$

命 $x-x_0=\xi$，$p(x)=p(x_0+\xi)=P(\xi)$．多項式

$$P(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \cdots + A_n\xi^n$$

的系数由前已証明的式子(2)得到：

$$A_0 = P(0),\quad A_1 = \frac{P'(0)}{1!},\quad A_2 = \frac{P''(0)}{2!},\quad A_3 = \frac{P'''(0)}{3!},\ \cdots,\quad A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

但由

$$P(\xi) = p(x_0+\xi),\quad P'(\xi) = p'(x_0+\xi),\quad P''(\xi) = p''(x_0+\xi),\ \cdots,$$

可知

$$P(0) = p(x_0),\quad P'(0) = p'(x_0),\quad P''(0) = p''(x_0),\ \cdots.$$

因而得出

$$A_0 = p(x_0), \quad A_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{p''(x_0)}{2!},$$

$$A_3 = \frac{p'''(x_0)}{3!}, \cdots, \quad A_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

代入(3)得

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{p'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4}$$

这称为多項式 $p(x)$ 在 $x = x_0$ 点的 Taylor 展开式.

不难証明,展开式是唯一的.

§2. 函数的 Taylor 展开式

假定函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内定义,且有 n 阶微商

$$f'(x), \quad f''(x), \cdots, \quad f^{(n)}(x).$$

命 x_0 为 $[a, b]$ 中的一点,我們仿上节做出多項式

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

又命

$$r(x) = f(x) - p(x).$$

定理 1. 在本节开始所給的假定下,当 $x \to x_0$ 时,$r(x) \to 0$,且是一个高于 n 級的无穷小(与 $x - x_0$ 比較),也就是

$$r(x) = o[(x - x_0)^n]$$

或

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

証. 依 $p(x)$ 的性質可知

$$[r(x)]_{x=x_0} = [f(x) - p(x)]_{x=x_0} = 0,$$
$$[r'(x)]_{x=x_0} = [f'(x) - p'(x)]_{x=x_0} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[r^{(n)}(x)]_{x=x_0} = [f^{(n)}(x) - p^{(n)}(x)]_{x=x_0} = 0.$$

我們現在用归納法来証明定理 1.

当 $n = 1$ 时

$$r(x_0) = r'(x_0) = 0,$$

所以

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = r'(x_0) = 0,$$

即

$$r(x)=o(x-x_0).$$

假定这个論断对 $m(n>m\geqslant 1)$ 正确，我們进一步証明，它对 $m+1$ 也正确. 此时，微商 $r'(x)$ 适合于

$$r'(x_0)=r''(x_0)=\cdots=r^{(m+1)}(x_0)=0,$$

且依假設

$$r'(x)=o((x-x_0)^m).$$

由中值公式

$$r(x)=r(x)-r(x_0)=r'(c)(x-x_0),$$

此 c 在 x 与x_0之間. 因为 $|c-x_0|<|x-x_0|$，所以

$$r'(c)=o((c-x_0)^m)=o((x-x_0)^m).$$

于是得出

$$r(x)=o((x-x_0)^{m+1}).$$

这就是需要証明的.

因此我們定义 $p(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的近似多項式，而 $r(x)$ 称为余項.

命 $x-x_0=\Delta x$, $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$, 則得出

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+o(\Delta x^n).$$

§ 3. Taylor 級数的余項

为了更清楚起見，我們把余項 $r(x)$ 改写成为 $r_n(x)$，因为它和 n 有关.

定理 1. 假定 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+H]$ 上有 n 阶連續微商，而且在 (x_0, x_0+H) 中有第 $(n+1)$ 阶有限微商. 假定 $\psi(z)$ 在 $[x_0, x]$ 上連續，且在开区間 (x_0, x) 內有不等于 0 的微商，則有一 c 适合于 $x_0<c<x$, 使

$$r_n(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

証. 我們有

$$r_n(x)=f(x)-f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

現在把 x 固定在 $[x_0, x_0+H]$ 內的任一数. 作一輔助函数

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

其中 z 在 $[x_0, x]$ 內变动，函数 $\varphi(z)$ 連續而且适合于

$$\varphi(x_0)=r_n(x),\qquad \varphi(x)=0,$$

并且在 (x_0, x) 內有微商

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - f'(z)\right] -$$

$$- \left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right] -$$

$$- \left[\frac{f^{(4)}(z)}{3!}(x-z)^3 - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2\right] - \cdots$$

$$\cdots - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right] =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

由 Cauchy 公式

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

此处 $x_0 < c < x$ 或 $c = x_0 + \theta(x - x_0)$，$(0 < \theta < 1)$；及

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

得出

$$r_n(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

这就是所要証明的結果.

这定理虽然很一般，但在具体应用时很不方便. 如果我們取

$$\psi(z) = (x-z)^p; \qquad p > 0,$$

則得

$$\psi'(z) = -p(x-z)^{p-1}, \quad (x_0 < z < x).$$

于是有

$$r_n(x) = \frac{-(x-x_0)^p}{-p(x-c)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n+1-p}(x-x_0)^p.$$

因

$$c = x_0 + \theta(x - x_0),$$

所以

$$x - c = x - x_0 - \theta(x - x_0) = (1-\theta)(x - x_0),$$

因而得出

定理 2 (Schlömilch-Roché). 在定理 1 的假定下，余項

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1},$$

此处 $0 < \theta < 1$.

取 $p = n+1$，便得到更常用的形式.

定理 3 (Lagrange).

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

此处 c 是 x_0 与 x 之間的数或 $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Lagrange 余項的好处是：它使我們联想到下一項的形式.

带 Lagrange 余項的 Taylor 公式記之如下：

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

此处 c 在 x 与 x_0 之間或 $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

在定理 2 中取 $p = 1$, 則得

定理 4.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}.$$

如果 $f(x)$ 是无穷可微的函数(卽所有阶的微商都存在), 而且

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0,$$

則我們可以得到无穷展开式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots.$$

这級数收斂于 $f(x)$, 称为函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 Taylor 展开式.

特别当 $x_0 = 0$ 时, 級数

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

称为 $f(x)$ 的 Maclaurin 展开式. 它的余項可以表为

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{或} \quad \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1 - \theta)^n x^{n+1}.$$

用 Taylor 公式可以补充求极大极小的方法.

設 $n \geqslant 2$, 假定当 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 的前 $n - 1$ 次微商都等于 0, 卽

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

而 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. 如果 n 是奇数, 則得一扭轉点; 假定 n 是偶数, 如果 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 取极大値, 如果 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 取极小値.

証明是十分显然的. 我們有 Taylor 展开式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

此处 $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $(0 < \theta < 1)$.

假定 n 是奇数，$(x-x_0)^n$ 在 $x=x_0$ 附近可正可負，而 $f^{(n)}(c)$ 在 $x=x_0$ 附近取定号.

假定 n 是偶数，当 x 与 x_0 充分接近时，$(x-x_0)^n$ 取正号，如果 $f^{(n)}(x_0)>0$，則常有

$$f(x)-f(x_0)>0,$$

即 $f(x_0)$ 极小. 同法証明 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时为极大.

§4. e^x 的展开式

我們有

$$f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ \cdots,\ f^{(k)}(x)=e^x,\ \cdots.$$

所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(k)}(0)=1.$$

因此带 Lagrange 余項的公式是

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\quad 0<\theta<1.$$

无穷級数

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

的公項是

$$a_n=\frac{x^n}{n!}.$$

而比率

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{n+1}\to 0.$$

由比例判别条件知道这級数收斂（对任一 x），所以公項 $\frac{x^n}{n!}\to 0$. 因而得出余項（因为 $e^{\theta x}\leqslant e^{|x|}$ 与 n 无关）

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\to 0.$$

也就是对任一 x，常有

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

特别当 $x=1$ 时，

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

由 e^x 的展开式立刻得到

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

而

$$\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots.$$

習題 1. 由 e^{x} 的展开式証明

$$e^{x+y}=e^{x}\cdot e^{y}.$$

提示:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}x^{l}y^{n-l}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^{l}}{l!}\sum_{n=l}^{\infty}\frac{y^{n-l}}{(n-l)!}.$$

§5. $\sin x$ 与 $\cos x$ 的展开式

我們有

$$f(x)=\sin x,\ f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \cdots,\ f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),$$

因此得

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\cdots,$$
$$f^{(2m)}(0)=0,\ f^{(2m+1)}(0)=(-1)^{m}.$$

由此得展开式

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left(\theta x+\frac{2n+3}{2}\pi\right).$$

在上节我們已經証明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}=0,$$

所以得到展开式

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots.$$

对任一 x，这式子常成立.

类似地可以証明:对任一 x 常有

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots.$$

必須注意,这公式的 x 是对弧度而言,不是对角度而言的.

Taylor 公式不但給我們近似式,而且也給我們精确度. 例如我們不仅有

$$\sin x\doteq x,\quad \sin x\doteq x-\frac{x^{3}}{3!},\quad \sin x\doteq x-\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{5}}{120},$$

而且有

$$|\sin x-x|<\frac{x^{3}}{6},$$

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| < \frac{x^5}{120},$$

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}\right| < \frac{x^7}{5040}.$$

为了使誤差小于 0.001，我們要

$$\frac{x^3}{3!} < 0.001$$

或 $x < 0.1817$. 就是当 $x < 0.1817$（約 10°）时，用 x 代 $\sin x$ 的誤差 < 0.001.

又由

$$\frac{x^5}{5!} < 0.001$$

或 $x < 0.6544$（約 $37^\circ.5$）可知，用

$$x - \frac{x^3}{3!}$$

代 $\sin x$ 的誤差 < 0.001. 同法，如果 $x < 0.4129$（約 $23^\circ.5$），誤差可 < 0.0001. 余类推.

关于 $y = \sin x$ 与它的近似多項式的图形如下：

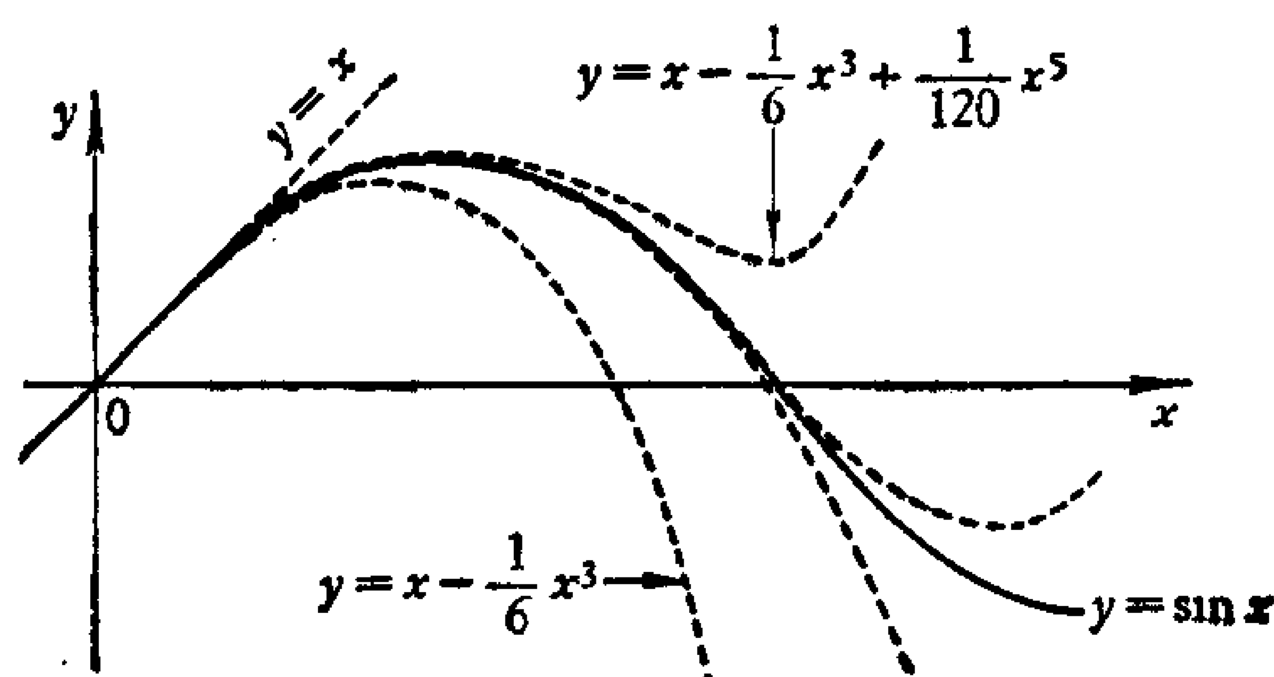


图 153

同样，当 $y = \cos x$ 时，我們不仅有

$$y \doteq 1, \quad y \doteq 1 - \frac{x^2}{2}, \quad y \doteq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

而且有

$$|\cos x - 1| < \frac{x^2}{2},$$

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| < \frac{x^2}{24},$$

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right| < \frac{x^6}{720}.$$

关于 $y = \cos x$ 与它的近似多項式的图形如图 154 所示.

例 1. 設圓的半径为 r，圓心角 $2x$ 所对应的弦长为 d，弧长为 s，x 所对应的弦长为 δ，則关于弧长 s，有下面的近似值：

$$s \doteq 2\delta + \frac{2\delta - d}{3},$$

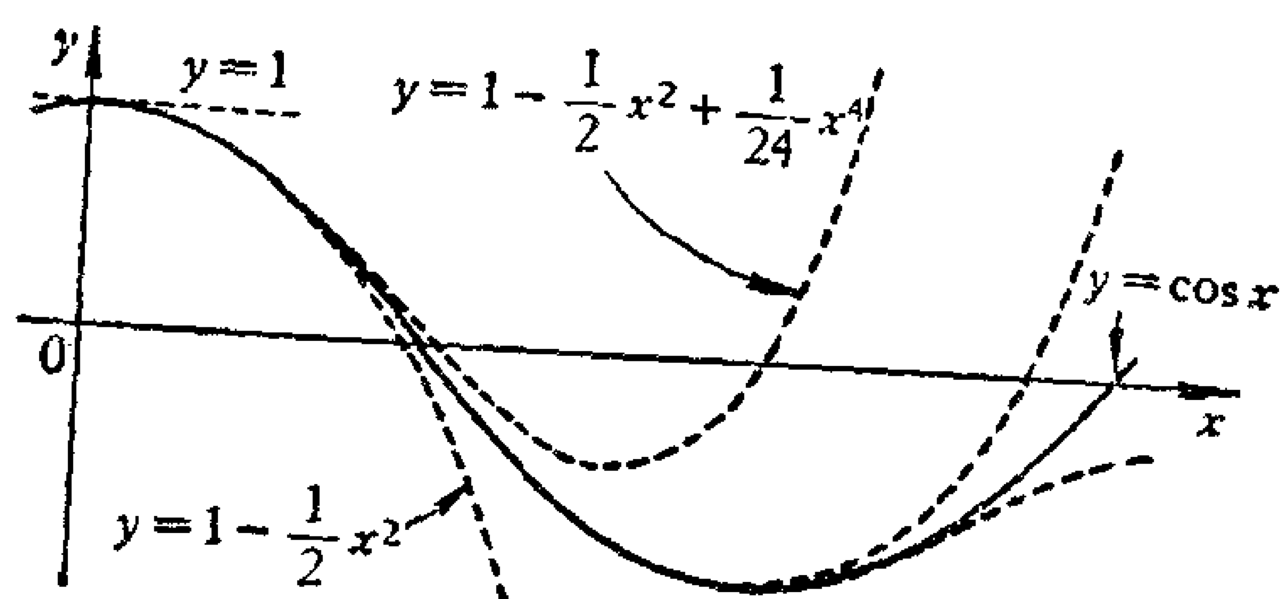


图 154

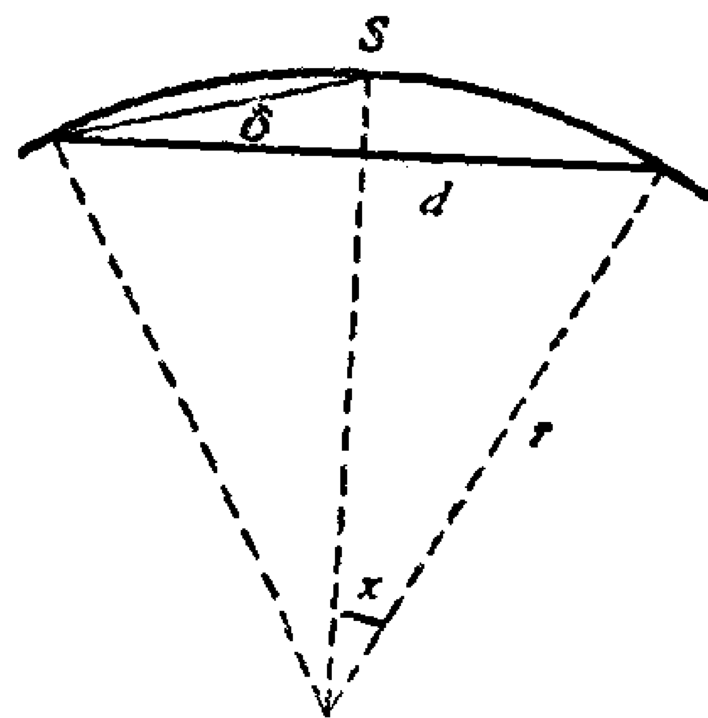


图 155

或更精确些，有

$$\left|s-2\delta-\frac{2\delta-d}{3}\right|<r\cdot\frac{x^5}{180}.$$

这一公式叫 Huygens 公式(图 155).

用待定系数法．假定

$$s\doteq Ad+B\delta,$$

然后确定系数 A 与 B.

由于

$$d=2r\cdot\sin x=2r\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{\theta'}{120}x^5\right)\qquad(0<\theta'<1),$$

$$\delta=2r\cdot\sin\frac{x}{2}=2r\left(\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{48}+\frac{\theta''}{3840}x^5\right),\qquad(0<\theta''<1)$$

因此

$$Ad+B\delta=2r\left[\left(A+\frac{B}{2}\right)\cdot x-\left(\frac{1}{6}A+\frac{1}{48}B\right)x^3+\left(\frac{\theta'}{120}A+\frac{\theta''}{3840}B\right)\cdot x^5\right];$$

但另一方面

$$s=2rx.$$

比较系数可知

$$A+\frac{1}{2}B=1,$$

$$\frac{1}{6}A+\frac{1}{48}B=0.$$

故得 $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{8}{3}$, 因此 s 的近似公式为

$$s\doteq 2\delta+\frac{2\delta-d}{3}.$$

而誤差为

$$\left|s-2\delta-\frac{2\delta-d}{3}\right|<2r\cdot\left(\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{3}\right)x^5=r\cdot\frac{x^5}{180}.$$

例如取 $x=\frac{\pi}{12}$, $r=1$, 则由 Huygens 公式得出

$$s \doteq 0.523593,$$

且

$$|s-0.523593|<0.000007.$$

例 2. 計算 $\sin 10°$.

我們必須先把 $10°$ 变为弧度

$$10°=\frac{2\pi}{360}\cdot 10=\frac{\pi}{18}=0.17\cdots.$$

取两項,

$$\left|\sin\frac{\pi}{18}-\frac{\pi}{18}+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\right|\leqslant\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5<\frac{1}{120}(0.18)^5<0.0000016,$$

而

$$\frac{\pi}{18}\doteq 0.174533, \qquad \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3\doteq 0.000886,$$

即

$$\left|\sin\frac{\pi}{18}-0.173647\right|\leqslant 0.0000016$$

$$0.1736454<\sin\frac{\pi}{18}<0.1736486,$$

所以 $\sin 10°$ 准到五位小数的值是 0.17364.

引进虚数,得

$$\cos x=1+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\cdots+\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

$$i\sin x=(ix)+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\cdots+\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots.$$

并在一起就有

$$\cos x+i\sin x=1+(ix)+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots=e^{ix} \quad (\text{定义}).$$

由此得出 Euler 公式:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

習題 1. 由 Euler 公式証明

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x.$$

§6. 二項式展开式

假定 $x>-1$, 即 $1+x>0$, 我們現在考虑函数

$$f(x) = (1+x)^{\alpha},$$

这儿 α 是一任意实数.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

由此得出

$$f(0)=1,\ f'(0)=\alpha,\ \cdots,\ f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

由 Taylor 公式得

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x).$$

现在我們用定理 3.4 的余項形式

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

先看級数

$$1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots,$$

它的一般項是

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k,$$

所以,当 $k\to\infty$ 时,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right||x| \to |x|.$$

故当 $-1<x<1$ 时,这級数收斂. 所以这級数的一般項

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \to 0, \qquad (k\to\infty).$$

当 n 取任何值时, $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ 不大于 1. 因为在我們所考虑的情况下(即 $-1<x<1$), 常有 $0<1-\theta<1+\theta x$, 所以

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1.$$

因此

$$0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1.$$

綜合起来,得

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x(1+\theta x)^{\alpha-1}\to 0.$$

因此得到：当 $|x|<1$ 时，我們常有

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

若 α 是正整数 m，这級数到 $m+1$ 項为止，它就变成普通的二項式公式.

我們提出以下的几个特殊情況：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots,$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots.$$

这些公式可以用来开任何次方. 例如要求 A 的 m 次方根，我們先找一整数 a，使

$$A=a^m+b \quad 或 \quad A=(a+1)^m-c.$$

如果 $\frac{b}{a^m}$ 或 $\frac{c}{(a+1)^m}$ 二数中有一小于 1，則我們便能根据

$$A^{\frac{1}{m}}=(a^m+b)^{\frac{1}{m}}=a\left(1+\frac{b}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

或

$$A^{\frac{1}{m}}=[(a+1)^m-c]^{\frac{1}{m}}=(a+1)\left[1-\frac{c}{(a+1)^m}\right]^{\frac{1}{m}},$$

而用展开式算出 $A^{\frac{1}{m}}$. 一般説来，$\frac{b}{a^m}$ 或 $\frac{c}{(a+1)^m}$ 愈小，級数收斂得愈快.

例 1. 計算 $(1000)^{\frac{1}{5}}$，准到 10^{-6}.

$$\sqrt[5]{1000}=\sqrt[5]{1024-24}=4\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}}=$$

$$=4\left[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{128}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3+r_3\left(\frac{3}{128}\right)\right].$$

当 $0<\theta<1$ 时，有 $0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^3<1\left(x=-\frac{3}{128}\right)$ 及

$$\left(1-\theta\frac{3}{128}\right)^{-\frac{4}{5}}<\left(1-\frac{3}{128}\right)^{-\frac{4}{5}}=\left(\frac{128}{125}\right)^{\frac{4}{5}}<\frac{128}{125}.$$

故用定理 3.4 的余項形式，得

$$4\left|r_3\left(\frac{3}{128}\right)\right|<\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\cdot\left(\frac{3}{128}\right)^4\frac{128}{125}=\frac{3^5\cdot 7}{5^7\cdot 2^{17}}=10^{-7}\frac{3^3\cdot 63}{2^4\cdot 64}<10^{-7}\frac{27}{16}$$

$$< 2 \cdot 10^{-7}.$$

又用四舍五入法得

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{128} = 0.0046875,$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2 \doteq 0.0000439,$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3 \doteq 0.0000006,$$

故

$$4\left[1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{128} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2 - \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3\right] \doteq 3.9810720.$$

括弧中三、四两项的誤差各不超过 $(0.5) \cdot 10^{-7}$,故上式的誤差不超过 $4 \cdot 2 \cdot (0.5) \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 10^{-7}$. 因而

$$|\sqrt[5]{1000} - 3.981072| < 2 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

§7. $\log(1+x)$ 的展开式

命

$$f(x) = \log(1 + x),$$

我們有

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2},\ f'''(x) = \frac{2!}{(1 + x)^3}, \cdots,$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k - 1)!}{(1 + x)^k}, \cdots$$

因而得出

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 2!, \cdots,$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k - 1)!, \cdots$$

及

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

这級数也是当 $|x| < 1$ 时收斂. 我們还是用定理 3.4 的余項形式

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n(1 - \theta)^n}{(1 + x\theta)^{n+1}} x^{n+1}.$$

和上节一样地可証,当 $n \to \infty$ 时,

$$r_n(x) \to 0.$$

因此得出:如果 $-1 < x < 1$, 則

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots.$$

我們也能証明当 $x = 1$ 时有公式

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

(考慮 Lagrange 的余項可能簡单些).

如果用这公式来計算log 2，基本上是无能为力的．例如，我們要准到 0.0001，就必須取 10000 項.

在一般計算时，我們用以下的方法：

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

用 $-x$ 代替 x 得

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

二式相減得

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)\qquad |x|<1.$$

以 $x=\frac{1}{31}, \frac{1}{49}, \frac{1}{161}$ 相継代入，則得

$$\log 16-\log 15=2\left[\frac{1}{31}+\frac{1}{3\cdot 31^3}+\cdots\right]=2P,$$

$$\log 25-\log 24=2\left[\frac{1}{49}+\frac{1}{3\cdot 49^3}+\cdots\right]=2Q,$$

$$\log 81-\log 80=2\left[\frac{1}{161}+\frac{1}{3\cdot 161^3}+\cdots\right]=2R.$$

即

$$4\log 2-\log 3-\log 5=2P,$$
$$-3\log 2-\log 3+2\log 5=2Q,$$
$$-4\log 2+4\log 3-\log 5=2R.$$

由此解出

$$\log 2=14P+10Q+6R,$$
$$\log 3=22P+16Q+10R,$$
$$\log 5=32P+24Q+14R.$$

在此 P, Q、R 都收斂得很快，故用这些式子計算log 2，log 3 与log 5 是很方便的．例如要計算log 2，准到 10^{-5}. 由于

$$P-\frac{1}{31}-\frac{1}{3\cdot 31^3}<10^{-8},$$

$$Q-\frac{1}{49}-\frac{1}{3\cdot 49^3}<10^{-8},$$

$$R-\frac{1}{161}<10^{-7},$$

而用四舍五入法得

$$\frac{1}{31}+\frac{1}{3\cdot 31^3}=\frac{2884}{89373}=0.0322693,$$

$$\frac{1}{49}+\frac{1}{3\cdot 49^3}=\frac{7204}{352947}=0.0204110,$$

$$\frac{1}{161}=0.006211.$$

用这三数分别代替 P, Q, R，誤差分别不超过 $6\cdot 10^{-8}, 6\cdot 10^{-8}, 6\cdot 10^{-7}$.

$$14\times 0.0322693+10\times 0.0204110+6\times 0.006211=0.6931462,$$

因此

$$|\log 2-0.69315|<4\times 10^{-6}+84\times 10^{-8}+60\times 10^{-8}+$$
$$+36\times 10^{-7}<9.6\times 10^{-6}<10^{-5}.$$

同样可以求出 $\log 3, \log 5$ 的近似値.

習題．若

$$\log_{10}\frac{1025}{1024}=a,\ \log_{10}\frac{1024^2}{1023\cdot 1025}=b,\ \log_{10}\frac{81^2}{80\cdot 82}=c,$$

$$\log_{10}\frac{125^2}{124\cdot 126}=d,\ \log_{10}\frac{99^2}{98\cdot 100}=e,$$

則

$$196\log_{10}2=59+5a+8b-3c-8d+4e.$$

幷試用 a, b, c, d, e 表示 $\log_{10}3$ 及 $\log_{10}41$，再用此法以求 $\log_{10}2$ 至小数第 10 位，以說明此法在实际上有用处(已知 $\log_e 10=2.302580930$).

§8. arc tg x 的展开式

命

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg} x,$$

在第五章 §11 中已經証明

$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n(\operatorname{arc\,tg} x)\cdot\sin n\left(\operatorname{arc\,tg} x+\frac{\pi}{2}\right),$$

所以

$$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!,\qquad f^{(2m+2)}(0)=0.$$

因此得出

$$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+r_n(x),$$

这儿的 $r_n(x)$ 依定理 3.3 的形式为

$$r_n(x)=\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(\operatorname{arc\,tg}\theta x)\cdot\sin(n+1)\left(\operatorname{arc\,tg}\theta x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot x^{n+1}\ (0<\theta<1).$$

故当 $|x|\leqslant 1$ 时，

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0.$$

所以当 $|x|\leqslant 1$ 时，

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots. \qquad (1)$$

特别当 $x = 1$ 时，有

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

这个式子收斂得很慢，用它来計算 π 很不方便. 例如，我們要精密到 10^{-5}，就需要計算 50,000 項.

x 愈小，(1)收斂得愈快. 置

$$x = \frac{1}{5}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\varphi = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

因为 $\operatorname{tg} 4\varphi$ 与 1 相差很小，所以 4φ 与 $\frac{\pi}{4}$ 相差很小. 命

$$\psi = 4\varphi - \frac{\pi}{4},$$

則

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

因此

$$\frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi = 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239} =$$

$$= 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + r_7\left(\frac{1}{5}\right)\right] - \left[\frac{1}{239} + r_1\left(\frac{1}{239}\right)\right].$$

由于交錯級数对誤差的估計(定理 4.4.1)，得

$$\left|4r_7\left(\frac{1}{5}\right) - r_1\left(\frac{1}{239}\right)\right| < \frac{4}{9\cdot 5^9} + \frac{1}{3\cdot 239^3} < 0.5\cdot 10^{-6}.$$

用四舍五入法，对其他各項計算如下：

$\frac{1}{5} \doteq 0.2000000$	$\frac{1}{3.5^3} \doteq 0.0026667$
$\frac{1}{5\cdot 5^5} \doteq 0.0000640$	$\frac{1}{7.5^7} \doteq 0.0000018$
$+\,0.2000640$	$-\,0.0026685$

又

$$\frac{1}{239} \doteq 0.0041841,$$

于是

$$\pi \doteq 4\{4[0.2000640 - 0.0026685] - 0.0041841\} = 3.1415916.$$

因此

$$\pi \doteq 3.14159,$$

而誤差为

$$|\pi - 3.14159| < 4\times0.5\times10^{-6}+4\times4\times2\times0.5\times10^{-7}+4\times0.5\times10^{-7}+ 1.6\times10^{-6} < 5.4\times10^{-6} < 10^{-5}.$$

習題 1. 試証：当 $|x|<1$ 时

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

習題 2. 試証

$$\operatorname{ar\,sinh} x = x - \frac{1}{2\cdot3}x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5 - \cdots.$$

$$\operatorname{ar\,tgh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots.$$

§9. 冪級数，收斂半径

从以上一些例子可以归納出一个重要对象——冪級数：

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots.$$

現在扩大一下我們的研究范围，假定冪級数的系数是复数，变数 x 也是复虚数，改写为 z.

定理 1 (Abel). 如果冪級数

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n + \cdots \tag{1}$$

在复数平面上一点 ξ 收斂，则当 z 取适合于不等式

$$|z| < |\xi| \tag{2}$$

的任何值时，(1)絕对收斂．反之，如果(1)在点 ξ 处发散，则当 z 取适合于不等式

$$|z| > |\xi| \tag{3}$$

的任何值时，(1)发散．

証．如果

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_n\xi^n + \cdots \tag{4}$$

收斂，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n\xi^n = 0.$$

故有一M存在，使

$$|a_n||\xi|^n < M.$$

如果 z 适合于(2),命

$$q=\left|\frac{z}{\xi}\right|<1,$$

則得

$$|a_nz^n|<M\left|\frac{z}{\xi}\right|^n=Mq^n.$$

由于 $\sum q^n$ 收斂,因而得出定理的第一部分.

第二部分十分明显. 因为如果有适合于(3)的 z 使(1)收斂,则由定理的第一部分,級数(4)一定收斂. 这和假定违背.

定义. 如果数 $R(\geqslant 0)$ 适合以下的性质,称它为冪級数(1)的收斂半径:

1) 当 $|z|<R$ 时,(1)絕对收斂;

2) 当 $|z|>R$ 时,(1)发散.

有时可能 $R=0$,就是說除 $z=0$ 外,无处收斂. 有时可能 $R=\infty$,就是說在全平面上处处收斂.

例 1. 設 α 非正整数,冪級数

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots$$

的收斂半径是 1.

例 2. 冪級数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

的收斂半径是 ∞.

例 3. 冪級数

$$x+2!x^2+3!x^3+\cdots+n!x^n+\cdots$$

的收斂半径等于 0.

定理 2. 收斂半径

$$R=\varliminf_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}}.$$

証. 先假定 $0<R<\infty$.

1) 由 R 的定义可知,对于任意給定的 $\varepsilon>0$,必有 N,使当 $n>N$ 时,

$$|a_n|^{-\frac{1}{n}}>R-\varepsilon,$$

也即

$$|a_n|<\frac{1}{(R-\varepsilon)^n}.$$

所以一定存在正常数 M,使对一切 n,都有

$$|a_n|<\frac{M}{(R-\varepsilon)^n}.$$

故若 $|z| < R$，則可取 ε 使 $\left|\frac{z}{R-\varepsilon}\right| < 1$，于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n < M \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{R-\varepsilon}\right|^n$$

收斂，所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 絕对收斂.

2）仍由 R 的定义，对于任意給定的正数 $\varepsilon > 0$，必有无穷多个 n_ν 使

$$|a_{n_\nu}|^{-1/n_\nu} < R + \varepsilon.$$

也即

$$|a_{n_\nu}| > \frac{1}{(R+\varepsilon)^{n_\nu}}.$$

如果 $|z| > R$，則可取 ε 使 $\left|\frac{z}{R+\varepsilon}\right| > 1$，于是 $a_{n_\nu} z^{n_\nu}$ 不趨于 0，因此 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 并不收斂，得所欲証.

关于 $R = 0$ 及 ∞ 的情形，讀者自証之.

§ 10. 冪級数的四則运算

定理 1. 如果在 $|z| < R$ 中

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

收斂，則

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$$

也在 $|z| < R$ 中收斂.

証. 因为两个收斂級数的和与差仍然收斂，所以定理成立.

定理 2. 仍如定理 1 的假定，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}$$

在 $|z| < R$ 中也收斂.

証. 因为 $f(z)$，$g(z)$ 在 $|z| < R$ 中收斂，故由上节定理 2，一定有

$$R \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n}, \quad R \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |b_n|^{-1/n};$$

而与上节定理 2 同样地可以推出：存在正常数 M 及 M_1，使

$$|a_n| < \frac{M}{(R-\varepsilon)^n}, \qquad |b_n| < \frac{M_1}{(R-\varepsilon)^n}$$

对一切 n 都成立. 于是

$$|c_n| \leqslant \sum_{l=0}^{n} \frac{MM_1}{(R-\varepsilon)^l (R-\varepsilon)^{n-l}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(n+1)MM_1}{(R-\varepsilon)^n} \leqslant \frac{MM_1}{\left(\dfrac{R-\varepsilon}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)^n}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=1$，故得定理。

至于两幂級数的商，間題不太簡单．它的收斂半径依賴于分母的零点而决定．但若分母的常数項不等于 0，我們可以得一冪級数，它有收斂半径，但現在还不能說明收斂半径究竟多大，这里只介紹一下求冪級数商的方法。

例 1. 試将 $\sec z$ 展成冪級数。

已知

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots,$$

于是

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)^{-1} =$$

$$= 1 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots\right) +$$

$$+ \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots\right)^2 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \cdots\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{5}{24}z^4 + \cdots.$$

以后将說明这級数的收斂半径是 $\dfrac{\pi}{2}$。

例 2. 試将 $\operatorname{tg} z$ 展成冪級数。

$$\operatorname{tg} z = \sin z \cdot \sec z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{5}{24}z^4 + \cdots\right) =$$

$$= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots.$$

例 3. 展开 $\csc z - \dfrac{1}{z}$ 为冪級数。

因为

$$z\csc z - 1 = \frac{z}{\sin z} - 1 = z\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)^{-1} - 1 =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right)^{-1} - 1 = \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right) +$$

$$+ \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right)^2 + \cdots = \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \cdots,$$

所以得到

$$\csc z - \frac{1}{z} = \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \cdots.$$

关于怎样写出这些級数的一般項，現在还不能叙述，待引进 Bernoulli 及 Euler 数之后，才能說明。

§ 11. 冪級数的微分与积分

从收斂半径为 R 的冪級数

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots,$$

我們可以得到两个冪級数

$$C + a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \cdots$$

及

$$a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots.$$

先証明这两个冪級数的收斂半径都是 R. 由

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1,$$

可知

$$\varliminf_{n\to\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}} = \varliminf_{n\to\infty} |n a_n|^{-\frac{1}{n-1}} = \varliminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{n+1}\right|^{-\frac{1}{n+1}}.$$

这就是我們所要求的結果。

命

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < R),$$

我們現在証明

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots \qquad (|z| < R).$$

証. 对于固定的 $|z| < R$, 找出 ρ, 使 $|z| < \rho < R$. 数 $a_n\rho^n$ 有界，即存在常数 K, 使 $|a_n\rho^n| < K(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 对于 $\varepsilon > 0$, 存在 $0 < \delta < \rho - |z|$, 当 $|h| < \delta$ 时，

$$\frac{K\rho|h|}{(\rho - |z| - \delta)(\rho - |z|)^2} < \varepsilon.$$

于是

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right| \leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left|\binom{n}{2} z^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{\binom{n}{2} |z|^{n-2}|h| + \cdots + |h|^{n-1}\right\} =$$

$$= K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \left\{\frac{(|z| + |h|)^n - |z|^n}{|h|} - n|z|^{n-1}\right\} =$$

$$= K \left\{\frac{1}{|h|}\left(\frac{\rho}{\rho - |z| - |h|} - \frac{\rho}{\rho - |z|}\right) - \frac{\rho}{(\rho - |z|)^2}\right\} =$$

$$\leqslant \frac{K\rho|h|}{(\rho - |z| - \delta)(\rho - |z|)^2} < \varepsilon, \qquad (|h| < \delta),$$

因此

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

由于 $|z| < R$ 是任意的,故得所欲証.

由于 $f'(z)$ 的收斂半径仍为 R, 故可継續逐項求微商,而得

$$f^{(\nu)}(z) = \sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-\nu+1)a_n z^{n-\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \cdots),$$

它們的收斂半径都是 R. 特別有 $f^{(\nu)}(0) = \nu! a_\nu$. 又命

$$F(z) = C + a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \cdots,$$

則 $F(z)$ 是 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的原函数. 故

$$F(z) = \int f(z) dz.$$

§12. 冪級数的唯一性定理及反函数

定理 1. 若当 $|z| < R$ 时,收斂級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0,$$

則

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \cdots = 0.$$

証. 若定理不成立,即存在 $a_k \neq 0$ 而 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$, 則 $f(z)$ 可以写为

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n.$$

若 $0 < \rho < R$, 由于 $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \rho^n$ 收斂,故 $|a_n| \rho^n < K (n = k, k+1, \cdots)$. 因此当 $|z| < \rho$ 时

$$|f(z)| \geqslant |z|^k (|a_k| - |a_{k+1}||z| - \cdots) \geqslant$$
$$\geqslant |z|^k \left(|a_k| - \frac{K|z|}{\rho^{k+1}} - \frac{K|z|^2}{\rho^{k+2}} - \cdots \right) = |z|^k \left(|a_k| - \frac{K|z|}{\rho^k(\rho - |z|)} \right).$$

由于 $|a_k| > 0$, 故可取 $|z|$ 足够小,使

$$|z| > 0, \qquad |a_k| - \frac{K|z|}{\rho^k(\rho - |z|)} > 0.$$

因此

$$|f(z)| > 0.$$

此与假定矛盾,故得定理.

从冪級数

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \tag{1}$$

我們可以反轉过来得出冪級数

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots, \tag{2}$$

用比較系数法可以逐步确定 $b_1, b_2, b_3, \cdots$.

將(2)代入(1)得

$$a_1(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots) + a_2(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots)^2 + a_3(b_1 y + b_2 y^2 + \cdots)^3 + \\ + \cdots - y = 0,$$

故由定理 1 得

$$a_1 b_1 - 1 = 0,$$
$$a_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0,$$
$$a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因此

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3},\quad b_3 = \frac{2a_2^2}{a_1^5} - \frac{a_3}{a_1^4},\ \cdots.$$

关于冪級数(2)的收斂半径問題,牽涉較多,在此不作討論了.

例 1.

$$y = \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

則得

$$x = y - y^2 + y^3 - \cdots.$$

例 2.

$$y = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

則得

$$x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \cdots.$$

例 3.

$$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

則得

$$x = y + \frac{y^3}{6} + \cdots.$$

§ 13. Kummer 判别法，Gauss 判别法

定理 1 (Kummer). 設有正項級数

$$u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots, \tag{1}$$

若有正項貫 $a_1, a_2, \cdots$, 且存在 α 及 N, 使当 $n > N$ 时,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geqslant \alpha > 0, \tag{2}$$

則(1)收斂;若 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散,且当 $n > N$ 时

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} < 0, \tag{3}$$

则(1)发散.

證. 若(2)成立,则当 $n = N+1, N+2, \cdots, M$时,有

$$a_{N+1}u_{N+1} - a_{N+2}u_{N+2} \geqslant \alpha u_{N+2},$$
$$a_{N+2}u_{N+2} - a_{N+3}u_{N+3} \geqslant \alpha u_{N+3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_M u_M - a_{M+1}u_{M+1} \geqslant \alpha u_{M+1}.$$

总加之,得

$$\alpha(u_{N+2} + \cdots + u_{M+1}) \leqslant a_{N+1}u_{N+1} - a_{M+1}u_{M+1} < a_{N+1}u_{N+1}$$

将 $M \to \infty$, 则得

$$\sum_{n=N+2}^{\infty} u_n < \frac{a_{N+1}u_{N+1}}{\alpha},$$

故由定理 4.3.2 可知級数(1)收斂.

若(3)成立,则当 $n = N+1, \cdots, M$时

$$\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} > \frac{\frac{1}{a_{N+2}}}{\frac{1}{a_{N+1}}}, \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} > \frac{\frac{1}{a_{N+3}}}{\frac{1}{a_{N+2}}}, \quad \cdots, \quad \frac{u_{M+1}}{u_M} > \frac{\frac{1}{a_{M+1}}}{\frac{1}{a_M}}.$$

各不等式相乘得

$$u_{M+1} > a_{N+1}u_{N+1}\frac{1}{a_{M+1}} \qquad (M = N+2, N+3\cdots),$$

故由定理 4.3. 4′可知級数(1)发散.

定理 2 (Gauss). 对于級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{1}$$

若

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p},$$

此处 $p > 1$ 而 $|\omega_n| < A$. 当 $\mu > 1$ 时,(1)絕对收斂;当(1)是正項級数,则 $\mu \leqslant 1$ 时,級数发散;当(1)是任意項級数,则 $\mu \leqslant 0$ 时,級数发散.

證. 取 $a_n = n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - a_{n+1}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{n\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}\right) - n - 1\right\} = \mu - 1. \tag{4}$$

当 $\mu > 1$ 时,可知存在 α 及 N, 使当 $n > N$ 时,

$$a_n\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - a_{n+1} \geqslant \alpha > 0.$$

故由定理 1 可知(1)絕对收斂.

当 $\mu < 0$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}=0,$$

可知存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1+\frac{\mu}{n}\left(1+\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}\right)<1,$$

也即 $|u_{n+1}|>|u_n|$. 故当 $n\to\infty$ 时, u_n 不趋于 0. 故級数(1)发散.

当 $\mu=0$ 时,因为

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|\leqslant 1+\frac{|\omega_n|}{n^p}\leqslant 1+\frac{A}{n^p},$$

所以

$$\left|\frac{u_1}{u_n}\right|=\left|\frac{u_1}{u_2}\right|\cdot\left|\frac{u_2}{u_3}\right|\cdots\left|\frac{u_{n-1}}{u_n}\right|\leqslant\left(1+\frac{A}{1^p}\right)\left(1+\frac{A}{2^p}\right)\cdots\left(1+\frac{A}{(n-1)^p}\right)=$$

$$=e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{A}{\nu^p}\right)}<e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\frac{A}{\nu^p}}<e^{A\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^p}}<K,$$

故当 $n\to\infty$ 时, u_n 不趋于零,所以(1)发散.

当 $\mu<1$ 而 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$ 时,由(4)可知存在 N_2, 使当 $n>N_2$ 时,

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}<0.$$

故由定理 1 及調和級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散(见 § 4.3), 可知(1)发散.

最后,当 $\mu=1$ 而 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$时,取 $a_n=n\log n$, 则

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}=n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\omega_n}{n^p}\right)\log n-(n+1)\log(n+1)=$$

$$=\frac{\omega_n}{n^{p-1}}\log n+(n+1)\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_n}{n^{p-1}}\log n=0,\quad \lim_{n\to\infty}(n+1)\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-1,$$

可知存在 N_3, 当 $n>N_3$ 时,

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}<0.$$

故由定理 1 及 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ 发散,可知級数(1)发散.

§ 14. 超越几何級数

定义. 假定 α,β,γ 是实数,但 γ 不是負整数或 0, 則級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z^2+$$

$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n$$

称为超越几何級数或 Gauss 級数.

当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时,即为几何級数. 显然有

$$F(\alpha,\beta,\beta;z)=(1-z)^{-\alpha},$$

$$2F\left(-\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ z^2\right)=(1+z)^n+(1-z)^n,$$

$$zF(1,1,2;-z)=\log(1+z),$$

$$2zF\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2};\ z^2\right)=\log\frac{1+z}{1-z}.$$

又可証明

$$\lim_{\beta\to\infty}F\left(1,\beta,1;\ \frac{z}{\beta}\right)=e^z,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}F\left(\alpha,\alpha,\frac{1}{2};\ \frac{z^2}{4\alpha^2}\right)=\cosh z.$$

習題 1. 試証

$$F\left(\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2};\ \sin^2x\right)=\cos nx.$$

習題 2. 試証

$$tF\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2};\ -t^2\right)=\operatorname{arc\,tg}t.$$

定理 1. 当 $|z|<1$ 时,級数絕对收斂; 当 $|z|>1$ 时,級数发散.

証. 把 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ 的第 $n+1$ 項記作 u_n, 則

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\right|\cdot|z|.$$

当 $n\to\infty$ 时, $|u_{n+1}/u_n|\to|z|$. 由定理 4.3.6 及 4.3.6′ 可知定理正确.

但在单位圓周上如何? 我們不作一般討論,仅就 $z=1$ 及 $z=-1$ 二点研究它們的收斂发散情況如下:

定理 2. 超越几何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma;1)$ 当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时絕对收斂; 当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant0$ 时发散.

証. 当 $n>|\alpha|$, $n>|\beta|$ 时,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}-\frac{\alpha^3}{n^3}+\cdots\right)\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}-\frac{\beta^3}{n^3}+\cdots\right)=$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n(n+\alpha)}\right)\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n(n+\beta)}\right)=$$

$$= 1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2}.$$

这儿 ω_n 有界，因此超几何級数在若干項之后，所有的項都同号，故可以看作是正項級数。由定理 13.2 得知定理成立。

定理 3. 超越几何級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;-1)=1-\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}+\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}+\cdots$$

当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时絕对收斂，当 $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时收斂，而当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$ 时发散。

証. 由于

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\left|\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(n+\alpha)(n+\beta)}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

故由定理 13.2 可知当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，級数絕对收斂，当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$ 时发散。

当 $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时，可知当 $n>\max(|\alpha|,|\beta|,|\gamma|)$ 时，从第 $n+1$ 項开始，$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$ 是正負項相間的級数，而且存在 N，当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2}>1.$$

又可知存在 $\varepsilon>0$ 及 N，使 $-1<\gamma-\alpha-\beta-\varepsilon$. 当 $m>N$ 时

$$\left|\frac{u_m}{u_{m+1}}\right|>1+\frac{\gamma-\alpha-\beta-\varepsilon+1}{m}=1+\frac{\delta}{m}\quad(\delta>0),$$

故

$$\left|\frac{u_{N+1}}{u_{n+1}}\right|=\left|\frac{u_{N+1}}{u_{N+2}}\right|\cdot\left|\frac{u_{N+2}}{u_{N+3}}\right|\cdots\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|>\left(1+\frac{\delta}{N+1}\right)\cdots\left(1+\frac{\delta}{n}\right)=$$

$$=e^{\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\log\left(1+\frac{\delta}{\nu}\right)}\geqslant e^{\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\frac{\delta}{\nu}-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\frac{\delta^2}{\nu^2}}.$$

由于 $n\to\infty$ 时，$e^{\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\frac{\delta}{\nu}-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu=N+1}^{n}\frac{\delta^2}{\nu^2}}$ 趋于 ∞，亦即 $u_n\to 0$. 故由定理 4.4.1 可知，当 $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$, $F(\alpha,\beta,\gamma;-1)$ 收斂。

定理 4. 当 $|z|<1$ 时，有

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;z)=F(\alpha,\beta,\gamma;z)+z\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z)\quad(1)$$

及

$$F(\alpha+1,\beta,\gamma+1;z)=F(\alpha,\beta,\gamma;z)+z\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;z).\quad(2)$$

証. 由

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; z) - F(\alpha, \beta, \gamma; z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{n!(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \right] z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \left[\frac{\beta+n}{\gamma+n} - \frac{\beta}{\gamma} \right] z^n$$

$$= z\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{(n-1)!(\gamma+2)\cdots(\gamma+n)} z^{n-1}$$

$$= z\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; z),$$

此即(1).

因为 $F(\alpha+1, \beta, \gamma+1; z) = F(\beta, \alpha+1, \gamma+1; z)$，所以

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma+1; z) = F(\alpha, \beta, \gamma; z) + z\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; z).$$

取

$$\begin{cases} X_{2n} = F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n; x), \\ X_{2n+1} = F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1; x), \end{cases}$$

$$a_{2n} = \frac{(\beta+n)(\gamma-\alpha+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n-1)}, \quad a_{2n+1} = \frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)},$$

则

$$\begin{cases} X_0 = X_1 - a_1 x X_2, \\ X_1 = X_2 - a_2 x X_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{m-1} = X_m - a_m x X_{m+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

证. 由(1)得

$$F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1; x) = F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n; x)$$
$$+ \frac{(\alpha+n)(\gamma-\beta+n)}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)} xF(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2; x),$$

即当 $m = 2n+1$ 时

$$X_m = X_{m-1} + a_m x X_{m+1}.$$

由(2)得

$$F(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2; x) = F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1; x)$$
$$+ \frac{x(\beta+n+1)(\gamma-\alpha+n+1)}{(\gamma+2n+1)(\gamma+2n+2)} F(\alpha+n+1, \beta+n+2, \gamma+2n+3; x),$$

即当 $m = 2n+2$ 时

$$X_m = X_{m-1} + x a_m X_{m+1},$$

则得(3)式.

由(3)式可知

$$\frac{X_0}{X_1}=1-\frac{a_1x}{\frac{X_1}{X_2}},\quad \frac{X_1}{X_2}=1-\frac{a_2x}{\frac{X_2}{X_3}},\quad\cdots,\quad \frac{X_{m-1}}{X_m}=1-\frac{a_mx}{\frac{X_m}{X_{m+1}}}.$$

逐步代入则得連分数

$$\frac{X_0}{X_1}=1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\ddots\cfrac{}{1-\cfrac{a_mx}{\frac{X_m}{X_{m+1}}}}}}.$$

因此

$$\frac{X_1}{X_0}=\frac{1}{\frac{X_0}{X_1}}=\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\ddots\cfrac{}{1-\cfrac{a_mx}{\frac{X_m}{X_{m+1}}}}}}}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{a_1x}{1}-\frac{a_2x}{1}-\overline{\cdots}-\frac{a_{m-1}x}{1}-\frac{a_mx}{\frac{X_m}{X_{m+1}}}.$$

Марков 用这个式子計算

$$S=1+\frac{n-l-1}{l+2}\cdot\frac{p}{q}+\frac{(n-l-1)(n-l-2)}{(l+2)(l+3)}\left(\frac{p}{q}\right)^2+\cdots$$

$$=F\left(-n+l+1,1,l+2;\ -\frac{p}{q}\right),$$

此处 l,n 是整数，$0\leqslant l<n,\ 0<p<\frac{1}{2},\ p+q=1$。

取

$$\begin{cases}\alpha=-n+l+1,\\ \beta=0,\\ \gamma=l+1,\\ x=-\dfrac{p}{q},\end{cases}$$

则

$$X_1=F\left(-n+l+1,1,l+2;-\frac{p}{q}\right),\qquad X_0=1.$$

由定义可知

$$a_{2n-2l-1}=a_{2(n-l-1)+1}=0,$$

故

$$\frac{X_1}{X_0} = F\left(-n+l+1, 1, l+2; -\frac{p}{q}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-} \frac{a_1 x}{1-} \frac{a_2 x}{1-} \cdots - \frac{a_{2n-2l-2}x}{1}.$$

因为

$$a_{2k-1}x = \frac{(\alpha+k-1)(\gamma-\beta+k-1)}{(\gamma+2k-2)(\gamma+2k-1)}\left(-\frac{p}{q}\right) =$$

$$= \frac{(-n+l+k)(l+k)}{(l+2k)(l+2k-1)}\left(-\frac{p}{q}\right) =$$

$$= \frac{(n-l-k)(l+k)}{(l+2k)(l+2k-1)}\left(\frac{p}{q}\right) = c_k,$$

$$a_{2k}x = \frac{(\beta+k)(\gamma-\alpha+k)}{(\gamma+2k)(\gamma+2k-1)}\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{k(n+k)}{(2k+l)(2k+l+1)}\left(-\frac{p}{q}\right) = -d_k,$$

故

$$S = \frac{X_1}{X_0} = \frac{1}{1-} \frac{c_1}{1+} \frac{d_1}{1-} \frac{c_2}{1+} \cdots - \frac{c_{n-l-1}}{1} + \frac{d_{n-l-1}}{1}.$$

現在对 c_k 及 d_k 进行估計．我們有

$$0 < c_k \qquad (k \leqslant n-l-1),$$

又假定 $(n+1)p < l+2$，則

$$(n-l-1)p = (n+1)p - (l+2)p < (l+2)(1-p) = (l+2)q,$$

即

$$c_1 = \frac{(n-l-1)}{l+2} \cdot \frac{p}{q} < 1.$$

故

$$c_k = \frac{(n-k-l)}{l+2k} \cdot \frac{(l+k)}{(l+2k-1)} \frac{p}{q} < c_1 < 1, \qquad (k \geqslant 2).$$

命

$$\omega_k = \frac{c_k}{1+} \frac{d_k}{1-} \frac{c_{k+1}}{1+} \cdots,$$

則用数学归納法易証

$$0 < \omega_k < c_k.$$

又

$$S = \frac{1}{1-\omega_1}, \quad \omega_1 = \frac{c_1}{1+} \frac{d_1}{1-\omega_2}, \quad \omega_2 = \frac{c_2}{1+} \frac{d_2}{1-\omega_3},$$

一般說来有

$$\omega_k = \frac{c_k}{1+} \frac{d_k}{1-\omega_{k+1}}.$$

故由估計

$$0 < \omega_{k+1} < c_{k+1}$$

可得 ω_k 的上下界，从而得到 ω_{k-1}，$\cdots$，以至 S 的上下界.

例. 取

$$p=\frac{1}{3},\ n=9{,}000,\ l=3{,}090,$$

ν	c_ν	d_ν
1	0.95553	0.00047
2	0.95444	0.00094
3	0.95335	0.00140
4	0.95227	0.00187
5	0.95119	0.00234
6	0.95010	

由不等式

$$0<\omega_6<0.95011,$$

开始得

$$1.00234<1+\frac{d_5}{1-\omega_6}<1.04711;\ 0.90839<\omega_5<0.94898,$$

$$1.02041<1+\frac{d_4}{1-\omega_5}<1.03685;\ 0.91842<\omega_4<0.93324,$$

$$1.01716<1+\frac{d_3}{1-\omega_4}<1.02119;\ 0.93362<\omega_3<0.93728,$$

$$1.01416<1+\frac{d_2}{1-\omega_3}<1.01514;\ 0.94020<\omega_2<0.94113,$$

$$1.00785<1+\frac{d_1}{1-\omega_2}<1.00816;\ 0.94779<\omega_1<0.94810,$$

因而得出

$$\frac{1}{0.05221}<S<\frac{1}{0.05190}.$$

習題 1. 証明 $y=F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ 适合于

$$x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta y=0.$$

§ 15. 用冪級数解微分方程

例 1. 求冪級数

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

之适合于

$$y''-xy=0 \tag{2}$$

者.

以(1)代入(2)得

$$(2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\cdots)-x(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)=0.$$

由幂級数唯一性定理比較系数得出

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2\cdot 1a_2=0 \\ x^1 & 3\cdot 2a_3-a_0=0 \\ x^2 & 4\cdot 3a_4-a_1=0 \\ x^3 & 5\cdot 4a_5-a_2=0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^s & (s+2)(s+1)a_{s+2}-a_{s-1}=0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

由这些式子不难得出 $a_{3k+2}=0$ 及

$$a_{3k}=\frac{a_{3(k-1)}}{3k(3k-1)}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}a_0;$$

又

$$a_{3k+1}=\frac{a_{3(k-1)+1}}{3k(3k+1)}=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}a_1,$$

因此我們得出

$$y=a_0y_1+a_1y_2,$$

此处 a_0 及 a_1 是常数，且

$$y_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k},$$

及

$$y_2=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}.$$

因为

$$\left[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k+1)}{(3k+3)!}x^{3k+3}\right]\Big/\left[\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}\right]=\frac{x^3}{(3k+2)(3k+3)},$$

所以由比例判别条件可知，級数 y_1 对任何值都收斂. 同法証明 y_2 也是对任何值都收斂的級数.

例2. 考慮方程

$$(1-x^2)y''-xy'+a^2y=0. \tag{3}$$

以幂級数(1)代入这方程得

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n+a^2a_n=0,$$

即

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=(n^2-a^2)a_n.$$

由此得出

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a^2(a^2-4)\cdots(a^2-(2n-2)^2)}{(2n)!}a_0,$$

$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{(a^2-1)(a^2-3^2)\cdots(a^2-(2n-1)^2)}{(2n+1)!}a_1.$$

因此得到

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2,$$

此处 a_0, a_1 是二常数,而

$$y_1 = 1 - \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^2(a^2-2^2)}{4!}x^4 - \frac{a^2(a^2-2^2)(a^2-4^2)}{6!}x^6 + \cdots$$

及

$$y_2 = x - \frac{a^2-1}{3!}x^3 + \frac{(a^2-1)(a^2-3^2)}{5!}x^5 - \frac{(a^2-1)(a^2-3^2)(a^2-5^2)}{7!}x^7 + \cdots.$$

由于当 $n \to \infty$ 时

$$\left|\frac{a^2(a^2-4)\cdots(a^2-(2n)^2)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \Big/ \left|\frac{a^2(a^2-4)\cdots(a^2-(2n-2)^2)}{(2n)!}x^{2n}\right| =$$

$$= \left|\frac{a^2-(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)}x^2\right| \to |x|^2,$$

故用比例判别条件,級数 y_1 当 $|x| < 1$时絕对收斂;同样地, y_2 当 $|x| < 1$ 时也絕对收斂.

只要 a 不等于一个偶数,当 $|x| > 1$ 时,这級数显然发散,当 a 是偶数时,級数 y_1 就成为多項式了. 不难驗証 y_1 与 y_2 就等于下面两个初等函数:

$$y_1 = \cos(a \arcsin x), \qquad y_2 = \frac{1}{a}\sin(a \arcsin x). \tag{4}$$

事实上,通过微分,容易証明 $\cos(a \arcsin x)$ 及 $\sin(a \arcsin x)$ 都适合微分方程(3),因此它們能够表成 y_1 与 y_2 的綫性組合,如

$$\cos(a \arcsin x) = \alpha y_1 + \beta y_2, \qquad \sin(a \arcsin x) = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

計算这两等式双方以及它們的一阶微商在 $x = 0$ 处的数值,容易定出 $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = a$, 故得(4)式.

归納以上的方法我們可以处理如下形式的微分方程

$$\alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y = F(x),$$

此处 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $F(x)$ 都是 x 的冪級数, 且 $\alpha(0) \neq 0$. 在这样的情况下, 可以把

$$p(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \quad q(x) = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}, \quad g(x) = \frac{F(x)}{\alpha(x)}$$

写成为 x 的冪級数,然后用冪級数代入,比較系数而得解.

如果 $\alpha(0) = 0$, 修改上法,有时仍可解决問題.

習題 (Airy). 解方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2xy = 0.$$

例 3 (超越几何級数). 解微分方程

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

我們考虑形如

$$x^{\lambda}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

的解,代入上式比較 $x^{\lambda-1}$ 的系数立得

$$\lambda(\lambda - 1) + \gamma\lambda = 0,$$

即

$$\lambda = 0 \quad 或 \quad \lambda = 1 - \gamma.$$

比較 $x^{n+\lambda}$ 的系数可得

$$(n+1+\lambda)(n+\lambda)a_{n+1} - (n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n + \gamma(n+\lambda+1)a_{n+1} - \\ - (\alpha+\beta+1)(n+\lambda)a_n - \alpha\beta a_n = 0,$$

即

$$(n+\lambda+1)(n+\lambda+\gamma)a_{n+1} = (n+\lambda+\alpha)(n+\lambda+\beta)a_n,$$

或即

$$a_{n+1} = \frac{(n+\lambda+\alpha)(n+\lambda+\beta)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+\gamma)}\, a_n$$

所以有两个解:即当 $\lambda = 0$ 时,

$$y = a_0\left(1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2 + \cdots\right) = a_0F(\alpha, \beta, \gamma; x);$$

另一解是:当 $\lambda = 1 - \gamma$ 时,

$$y = a_0x^{1-\gamma}\left(1 + \frac{(1-\gamma+\alpha)(1-\gamma+\beta)}{(2-\gamma)1}x + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-\gamma+\alpha)(2-\gamma+\alpha)(1-\gamma+\beta)(2-\gamma+\beta)}{(2-\gamma)(3-\gamma)\cdot 1\cdot 2}x^2 + \cdots\right)$$

$$= a_0x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x).$$

但是我們必須注意,当 γ 为負整数或 0 时,第一解无效,而当 $2-\gamma$ 为負整数或 0 时,或即 γ 为不小于 2 的正整数时,第二解无效.

一般来講,我們的超几何方程的解是

(*A*) $y = C_1F(\alpha, \beta, \gamma; x) + C_2x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x)$. 而当 $\gamma = 1$ 时, $F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x)$, 在 $F(\alpha, \beta, 1; x)$ 之外,对 γ 的其他整数値我們还是仅有一个解,由此可知,(*A*) 不能給出超越几何方程的有两个常数的解. 当 γ 为非整数时,(*A*) 便是超几何方程的有两个常数的解了.

例 4 (Legendre).

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

以冪級数

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} a_lx^l$$

代入并比較系数得

$$(l+2)(l+1)a_{l+2} - l(l-1)a_l - 2la_l + n(n+1)a_l = 0,$$

或即

$$a_{l+2} = -\frac{(n+l+1)(n-l)}{(l+1)(l+2)} a_l.$$

所以得出

$$a_{2l} = (-1)^l \frac{(n+1)(n+3)\cdots(n+2l-1)n(n-2)\cdots(n-2l+2)}{(2l)!} a_0,$$

$$a_{2l+1} = (-1)^l \frac{(n+2)(n+4)\cdots(n+2l)(n-1)(n-3)\cdots(n-2l+1)}{(2l+1)!} a_1,$$

而得 Legendre 方程的有两个任意常数的解:

$$y = a_0\left(1 - \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(n+1)(n+3)\cdot n(n-2)}{4!}x^4 + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left(x - \frac{(n+2)(n-1)}{2\cdot 3}x^3 + \frac{(n+2)(n+4)(n-1)(n-3)}{5!}x^5 - \cdots\right)$$
$$= a_0y_1 + a_1y_2.$$

如果 n 是一个正偶数,则 y_1 仅有有限项,它是 x 的 n 次多项式,用 $\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}n!}{2^n\left(\frac{n}{2}!\right)^2}P_n(x)$ 表它,当 n 是正奇数时, y_2 仅有有限项,它是 x 的 n 次多项式,我们也用 $\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n!}{2^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}!\right)^2}P_n(x)$ 表它. 这个多项式 $P_n(x)$ 称为 Legendre 多项式.

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \cdots.$$

现在提出几个较难的习题,但是是重要的结果.

习题 1.

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right\}$$
$$= \sum_{r=0}^{m}(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r},$$

此处 $m = \frac{1}{2}n$ 或 $\frac{1}{2}(n-1)$, 视 n 为偶或奇而定.

习题 2. 证明

$$P_n(x) = F\left(n+1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right).$$

习题 3. 证明

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n).$$

例 5 (Bessel).

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \mu^2)y = 0 \qquad \mu \neq 0,$$

我們現在考虑形如

$$y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

的解。比較 x^r 的系数可得

$$r(r-1) + r - \mu^2 = 0,$$

即 $r = \pm\mu$. 命

$$y = x^\mu(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots),$$

代入原方程比較系数可得 $a_1 = 0$ 及

$$k(2\mu + k)a_k + a_{k-2} = 0,$$

即得

$$a_{2k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

及

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}k!(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+k)}.$$

命

$$y_1 = x^\mu\left(1 - \frac{x^2}{2^2\cdot1\cdot(\mu+1)} + \frac{x^4}{2^4\cdot1\cdot2\cdot(\mu+1)(\mu+2)} - \cdots\right),$$

又換 μ 为 $-\mu$, 而命

$$y_2 = x^{-\mu}\left(1 - \frac{x^2}{2^2\cdot1\cdot(-\mu+1)} + \frac{x^4}{2^4\cdot1\cdot2\cdot(-\mu+1)(-\mu+2)} - \cdots\right),$$

則当 μ 非整数时，方程有两个任意常数的解 $c_1y_1 + c_2y_2$。当 μ 为正整数时 y_2 不存在，当 μ 为負整数时 y_1 不存在，当 $\mu = 0$ 时 $y_1 = y_2$，所以当 μ 为整数时，我們仅得到只有一个任意常数的解。将来知道，在这种情况下方程的解法还沒有完整。

第八章　方程的近似解

§1. 引　　言

本章中将研究方程的数值解法．我們所討論的方程可能是代数方程也可能是超越方程．所謂方程求解就是在于求出数值 ξ，使

$$f(\xi)=0, \tag{1}$$

这儿 $f(x)$ 是一个已給的連續函数．ξ 称为方程(1)的根，或称为函数 $f(x)$ 的零点．

最直觉的方法是描图法，尽可能細地取一些点 $x_1<x_2<x_3\cdots$ 来算出 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，$\cdots$．把点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$ 画在紙上，如果 (x_v,y_v) 与 (x_{v+1},y_{v+1}) 一个处于 x 軸以上，一个处于 x 軸以下，我們再在 x_v，x_{v+1} 之間取一些分得更細些的点，这样就可以把曲綫 $y=f(x)$ 交 x 軸的点逐步显示出来．这一方法，在原則上是簡单的，但是实际应用时，却是效率不高的．在实际計算时，实質上分成两步，第一步是确定两个数 a，b，其間包含有根；第二步是把包含着根的区間的两端逐漸接近，在某些情形下，做些补充的計算来說明近似值的誤差．

关于第一步，一般講，我們并沒有很好的办法．但是在实际問題中，客观事物的本身往往就建議了根所应当存在的范围．例如，在 α，β 之間．因为在根的附近，一般講来，$f(x)$ 是变号的（不变号的情况是曲綫切于 x 軸，但在这一情况时 $f'(x)$ 是变号的，我們不討論这种情况，如果讀者了解了一般情况之后，这种特殊情况的处理，自能作出）．因而分隔 α，β 可以得到这样的一个区間 a，b，使 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号．

例 1.　考虑代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

如果 $|x|>1+|a_1|+\cdots+|a_n|=M$，则

$$|a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n|\leqslant(|a_1|+\cdots+|a_n|)|x|^{n-1}<M|x|^{n-1}<|x|^n.$$

因此

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\neq 0,$$

换言之，代数方程的根 ξ 一定适合于

$$|\xi|\leqslant 1+|a_1|+\cdots+|a_n|.$$

§2. 图　解　法

上节虽然說了图解法的缺点，但是，如果应用得恰当，还是可以給我們提出不少有用的資料的．

例 1. 解三次方程

$$x^3 - ax = b.$$

在图紙上固定地画好曲綫

$$y = x^3,$$

然后用一把直尺就可以找出我們所討論的三次方程的根来. 把直尺的边經过 $(0, b)$ 及 $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ 二点，则与曲綫 $y = x^3$ 的交点的横标就是根的数值（图 156）. 其原因是經过

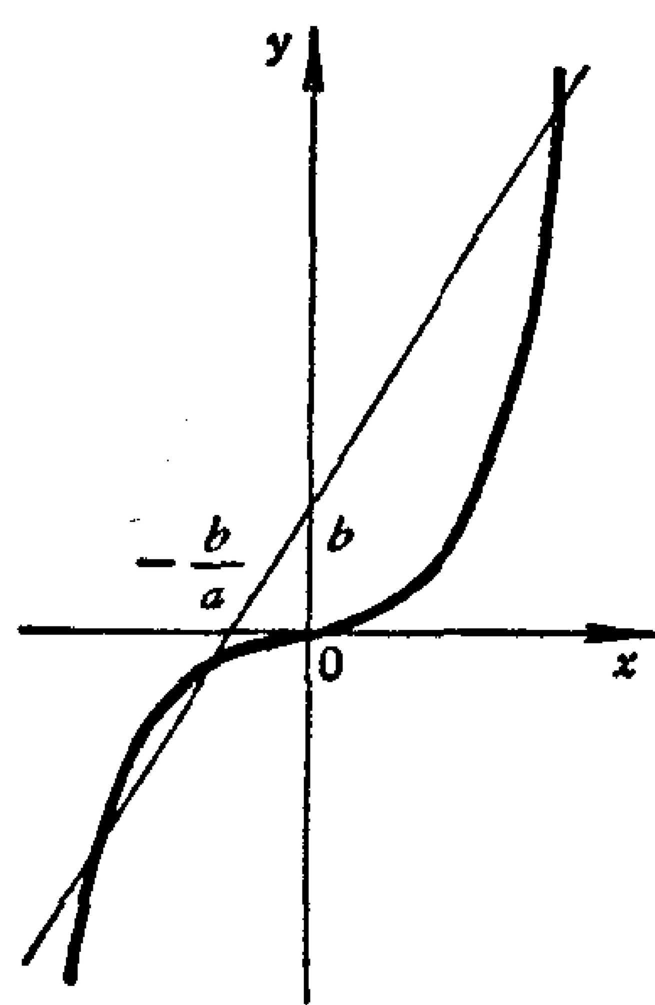


图 156

$(0, b)$及$\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$的直綫方程是

$$y = ax + b,$$

所以交点的横坐标就是原方程的根.

例 2. 解方程

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tgh} x.$$

把二个图形

$$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{tgh} x$$

重叠在一起，我們可以看出交点的横坐标在 $\frac{\pi}{4} + n\pi$ 附近.

§3. 迭 代 法

在研究$\sqrt{2}$的漸近値时，我們已經用过迭代法. 迭代法的基本形式是：把 $f(x)$ 分为 $f_1(x) - f_2(x)$. 如此，方程变为

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{1}$$

其中 $f_1(x)$ 是这样一个函数，对任意的实数 m，方程

$$f_1(x) = m$$

容易計算到高度准确的实根.

我們的計算方法是：先从一个近似值 x_0 出发，代到方程(1)的右边，解方程

$$f_1(x) = f_2(x_0)$$

而得出 x 的第二近似值 x_1.

再以 x_1 代入(1)的右边，解方程 $f_1(x) = f_2(x_1)$ 以确定第三近似值 x_2. 如此做下去，得出一系列的值：

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

其中

$$f_1(x_1) = f_2(x_0),$$
$$f_1(x_2) = f_2(x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_1(x_n) = f_2(x_{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

这方法的几何意义是：所求的根是曲綫

$$y = f_1(x) \tag{c_1}$$

与

$$y = f_2(x) \tag{c_2}$$

的交点的横坐标 ξ.

已往的手續可以說成为，作直綫 $x = x_0$ 平行于 y 軸，交曲綫 C_2 于 (x_0, y_0)，过这交点引直綫平行于 x 軸交 C_1 于 (x_1, y_0)，再过 (x_1, y_0) 引平行于 y 軸的直綫交 C_2 于 (x_1, y_1)，过交点引平行于 x 軸的綫交 C_1 于 (x_2, y_1)，如此續行，得出一条折綫(图 157).

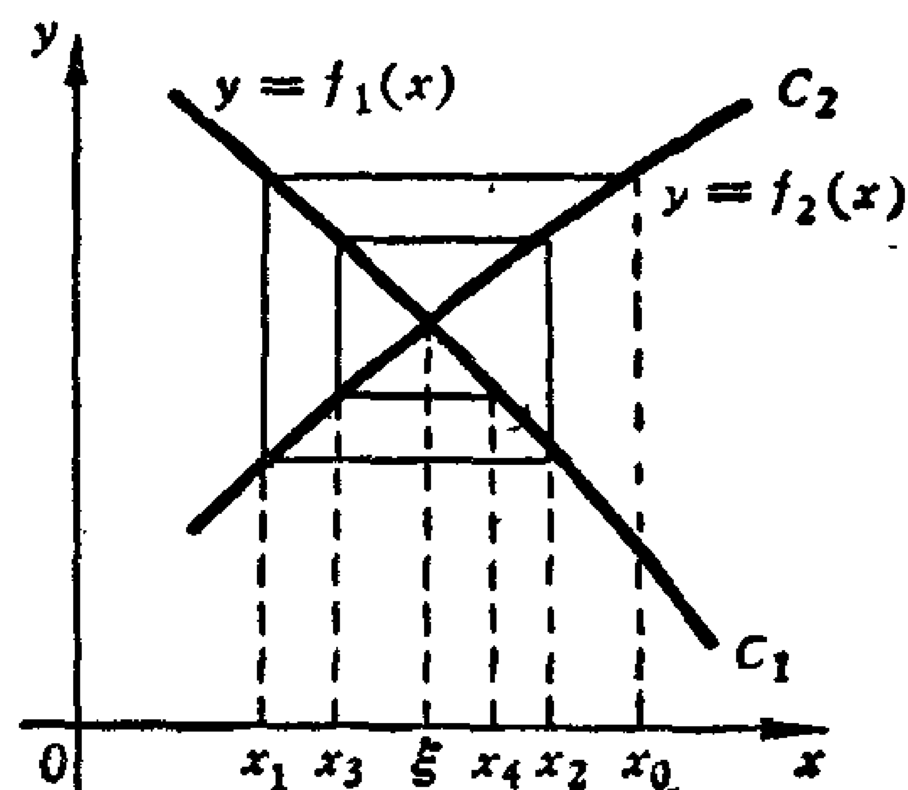


图 157

但这样的折綫是否愈来愈近于交点是一个問題，从图形 157 上看，如果我們从 x_2 出发先求与 C_1 的交点，并作平行于 x 軸的綫交 C_2 等等，則获得了一条刚好相反的折綫，这說明了，我們如果不小心地选择曲綫的次序，我們可能得到愈来愈远的結果. 保証趋向于交点的条件是

$$|f_2'(\xi)| < |f_1'(\xi)|.$$

这一条件当然很难用，因为这儿我們需要在 $x = \xi$ 的数値. 不过我們有以下的結果.

定理 1. 如果有

$$\left|\frac{f_2'(y)}{f_1'(x)}\right| \leqslant q < 1 \ (a < x < b,\ a < y < b),$$

則

$$x_n \to \xi.$$

證. 从

$$f_1(x_{n+1}) - f_1(x_n) = f_2(x_n) - f_2(x_{n-1})$$

及 Lagrange 定理可知

$$(x_{n+1} - x_n)f_1'(x) = (x_n - x_{n-1})f_2'(y),$$

此处 x 在 x_n 与 x_{n+1} 之間，而 y 在 x_n 与 x_{n-1} 之間. 因而得出

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q|x_n - x_{n-1}|.$$

由此得出

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^n|x_1 - x_0|.$$

从而得出

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{n+p-1})|x_1 - x_0| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

当 $n \to \infty$, $q^n \to 0$，所以 x_n 是收斂的. 旣然收斂，我們由

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_{n-1})$$

可知

$$f_1(\xi) = f_2(\xi).$$

这定理的特例是

定理 2. 如果在 (a, b) 中 $f(x)$ 連續，且 $|f'(x)| \leqslant q < 1$，則方程

$$x = f(x)$$

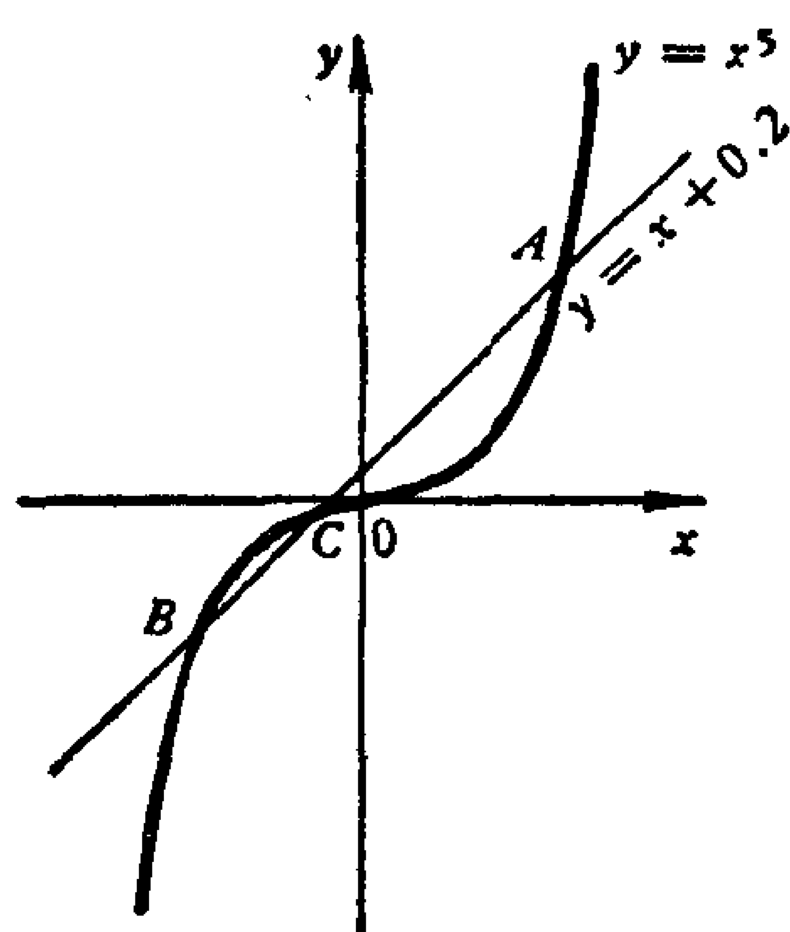


图 158

的一个根可由

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ \cdots,\ x_n = f(x_{n-1}),\ \cdots$$

来接近.

例 1. $x^5 - x - 0.2 = 0$,

这方程的实根是曲綫

$$y = x^5 \tag{1}$$

与

$$y = x + 0.2 \tag{2}$$

的交点的横坐标，由图 158 可以看出，它有两个負根，一个正根.

在 A 及 B，(2)的斜率的絕对値小于(1)的切綫的斜率的絕对値，取 $f_1(x) = x^5$, $f_2(x) = x + 0.2$，将 A 与 B 的横坐标的計算列成表如下：

$\sqrt[5]{x_n + 0.2}$	$x_n + 0.2$
$x_0 = 1$	1.2
$x_1 = 1.037$	1.237
$x_2 = 1.0434$	1.2434
$x_3 = 1.0445$	1.2445
$x_4 = 1.04472$	

于是得到准确到四位的根的近似値 $x \doteq 1.04472$.

$\sqrt[5]{x_n + 0.2}$	$x_n + 0.2$
$x_0 = -1$	-0.8
$x_1 = -0.956$	-0.756
$x_2 = -0.9456$	-0.7456
$x_3 = -0.9430$	-0.7430
$x_4 = -0.9423$	-0.7423
$x_5 = -0.94214$	-0.74214
$x_6 = -0.94210$	

于是得誤差不超过 $2 \cdot 10^{-5}$ 的根的近似値 $x \doteq -0.94210$.

在計算 C 的坐标时，由于在 C 点(2)的斜率的絕对値大于(1)的切綫的斜率，故此时应該取 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^5 - 0.2$. 現在将 C 的横坐标的計算列于下：

$x_n^5 - 0.2$	x_n^5
$x_0 = 0$	-0
$x_1 = -0.2$	-0.00032
$x_2 = -0.20032$	

于是得到准确到五位的根的近似値 $x \doteq -0.20032$.

例 2. $x = \operatorname{tg} x$.

这个方程的根是曲綫

$$y = x \tag{3}$$

与

$$y = \operatorname{tg} x \tag{4}$$

交点的横坐标.

由图 159 可以看出,在每一个区間

$$\left[(2n-1)\frac{\pi}{2},\ (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]\ (n=0,\ \pm1,\cdots)$$

中,这方程有一个根.

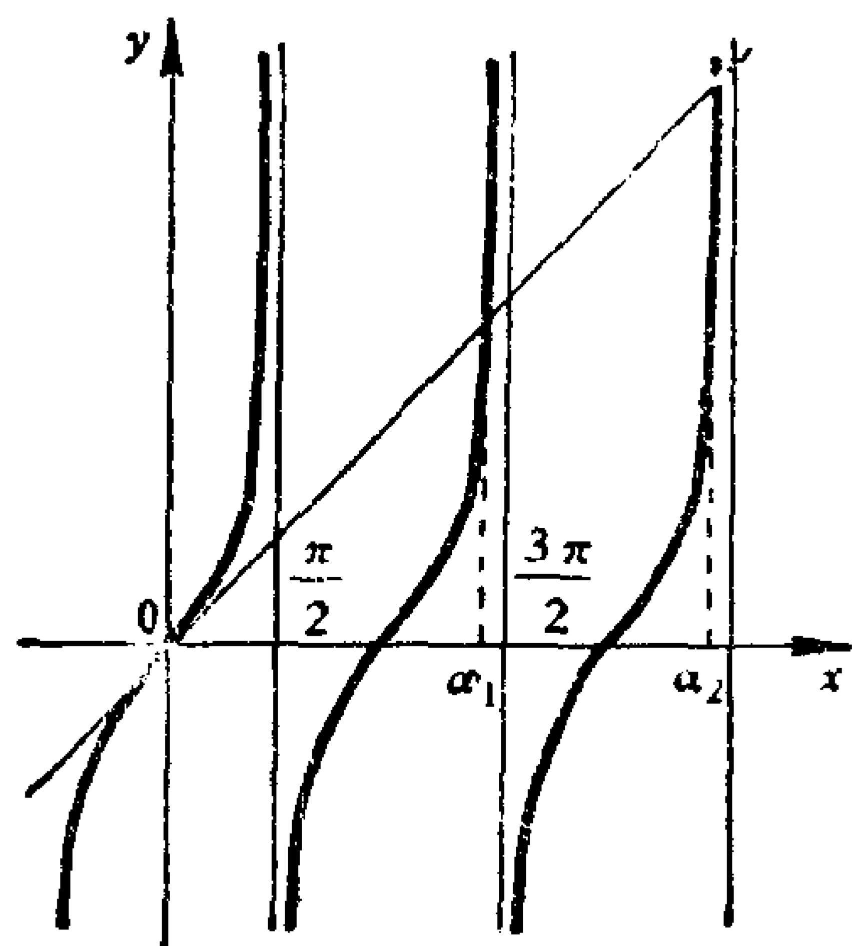


图 159

命 α_n 表示第 n 个正根,则

$$\alpha_n \sim \left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}.$$

現在来求 α_1. 将原来方程改变为

$$x = \operatorname{arc\,tg} x,$$

我們把計算列成下表:

x_n	$\operatorname{arc\,tg} x_n$
$x_0 = 4.7124\cdots = \frac{3\pi}{2}$	4.5033
$x_1 = 4.5033$	4.4938
$x_2 = 4.4938$	4.4935
$x_3 = 4.4935$	

于是得到根的近似値为 $\alpha_1 \doteq 4.4935$, 它准确到四位数字.

迭代法的原理也可以用来計算联立方程

$$F_1(x,\ y)=0,\quad F_2(x,\ y)=0$$

的交点$(\xi,\ \eta)$.

設在(ξ,η)附近 $F_1(x,\ y)=0$, $F_2(x,\ y)=0$ 分别确定了函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$. 这时 $\frac{\partial F_1}{\partial y}\neq 0$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}\neq 0$, 且由定理 1, 当

$$\left|\frac{y_2'(x)}{y_1'(y)}\right| \leqslant q < 1,$$

即 $\left|\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big/\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_P \leqslant q\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\Big/\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|_Q$, $0<q<1$ 成立时(这里 P、Q 是(ξ,η)邻域的点),则可由一个 x_0 出发,在

$$y_1(x) = y_2(x_0)$$

中解 x_1. 这相当于由一适合 $F_2(x_0, y_0)=0$ 的(x_0, y_0)出发,在 $F_1(x,\ y_0)=0$ 中解出 x_1 使

$$F_1(x_1,\ y_0)=0.$$

而由 $y_1(x)=y_2(x_1)$ 确定 x_2, 相当于确定 y_1 使

$$F_2(x_1,\ y_1)=0.$$

再确定 x_2 使 $F_1(x_2,\ y_1)=0,\ \cdots$, 即定理 1 的演算过程化为先确定 $(x_0,\ y_0)$ 使

$$F_2(x_0,\ y_0)=0,$$

然后再依次由以下方程来确定 $x_1,\ y_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_n,\ \cdots$,

$$F_1(x_1, y_0) = 0$$
$$F_2(x_1, y_1) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_1(x_n, y_{n-1}) = 0$$
$$F_2(x_n, y_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots.$$

§4. 插 值 法

我們假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是連續的，$f'(x)$，$f''(x)$ 都不变号，$f(a)f(b) < 0$.

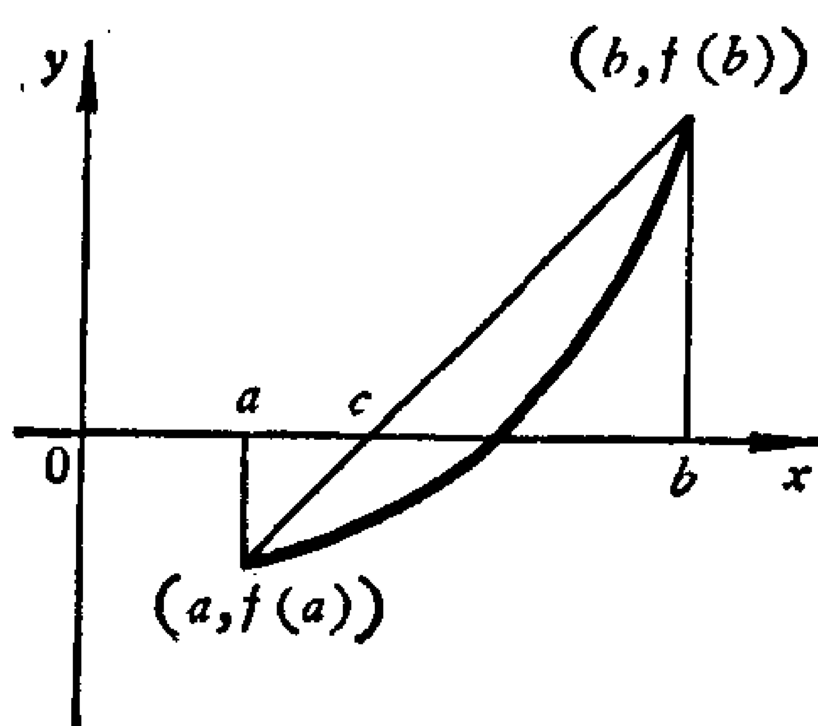


图 160

过 $(a, f(a))$ 与 $(b, f(b))$ 作一直綫

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

这直綫和 x 軸的交点是 $x = c$，即

$$\frac{- f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{c - a}{b - a}.$$

解得

$$c = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)} = b - \frac{(a - b)f(b)}{f(a) - f(b)}.$$

这一公式便把区間 (a, b) 縮小成为 (a, c) 或 (c, b). 区别根是在 (c, b) 中，还是在 (a, c) 中的方法是研究 $f''(x)$ 的符号. 若在 (a, b) 中 $f'(x) > 0$，則当 $f''(x) > 0$ 时，根在 (c, b) 之中；而 $f''(x) < 0$ 时，根在 (a, c) 之中. 若在 (a, b) 中 $f'(x) < 0$，則当 $f''(x) > 0$ 时，根在 (a, c) 中；而 $f''(x) < 0$ 时，根在 (c, b) 之中.

例. 求方程

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

的根. 由下表

x	∞	5	2	1.9	1.8	1.7	1.5	1	0
$f(x)$	+	+	+	+0.339	−0.248	−	−	−	−

可見根落在(1.8,1.9)之中，又由公式可得

$$c = 1.9 + \left[\frac{-(1.8 - 1.9)0.339}{-0.248 - 0.339}\right] = 1.843.$$

計算得 $f(1.843) = -0.00427 < 0$，所以根在(1.843,1.9)之間，再用公式

$$c = 1.9 + \left[\frac{(-0.057)\cdot 0.339}{0.339 - (-0.00427)}\right] = 1.9 - \frac{0.019323}{0.34327} = 1.8437.$$

为了要說明精确度，取 $x = 1.8438$ 代入，

$$f(1.8438) = 6.268180 - 6.799197 + 5.5314 - 5 = 0.000383 > 0.$$

而

$$f(1.8437) < 0,$$

所以根在(1.8437,1.8438)中，即近似值的誤差小于0.0001.

§ 5. Newton 法

我們仍然假定在 $[a, b]$ 中 $f(x)$ 是連續的，$f'(x)$ 也是連續的，$f(a)$ 与 $f(b)$ 异号。为了肯定起見，我們假定 $f(a) < 0$，$f(b) > 0$。如此 $f(x)$ 是升函数，即 $f'(x) > 0$。过 $(a, f(a))$ 作曲綫 $y = f(x)$ 的切綫

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

即

$$x = a + \frac{y - f(a)}{f'(a)}.$$

这切綫与 x 軸交于

$$c = a + \left[\frac{-f(a)}{f'(a)}\right].$$

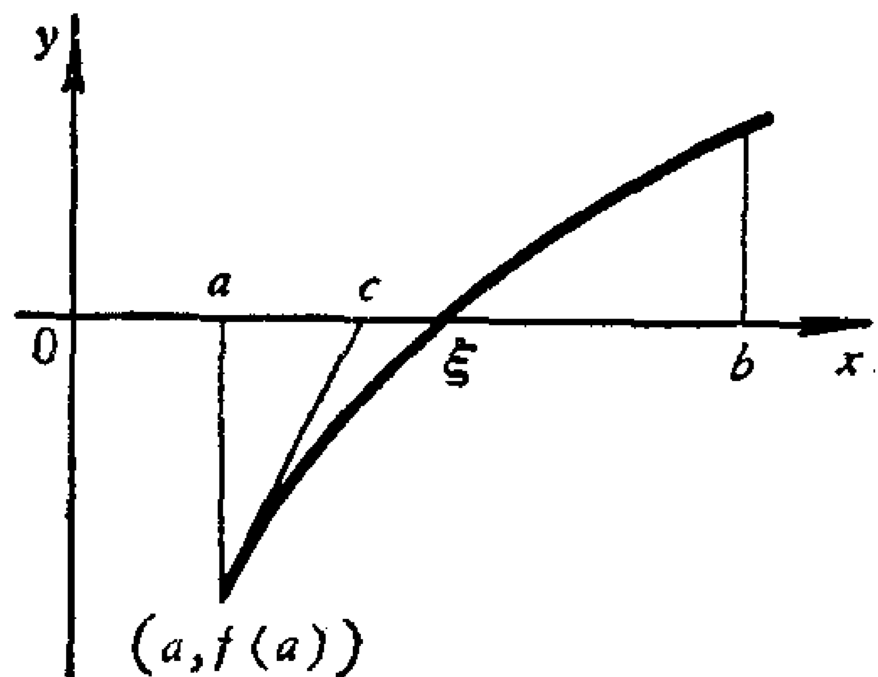


图 161

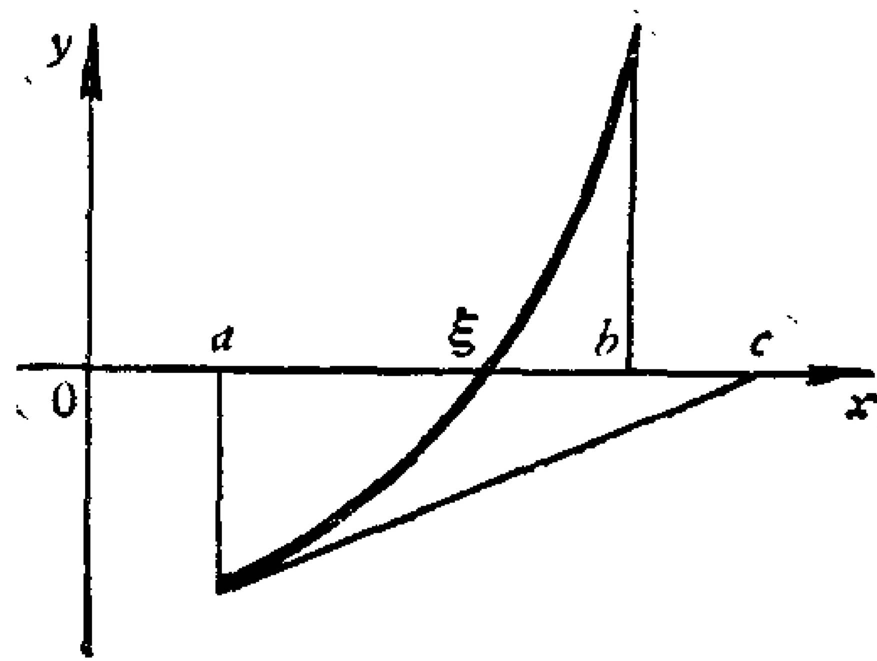


图 162

在第 161 图的情况下，c 比 a 更接近于 ξ，但是在第 162 图的情况下，并不一定有这样的結論，主要的原因是第一种情况曲綫是向上凸的，也就是 $f(a)$ 和 $f''(x)$ 是同号的。如果 $f(a)$ 和 $f''(x)$ 异号，我們由 b 点出发，可得同样的結果：

$$c = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

我們再回到原来的問題，把

$$a_1 = a + \left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]$$

作为根的新数值，再一个一个地求

$$a_2 = a_1 + \left[-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}\right],\quad a_3 = a_2 + \left[-\frac{f(a_2)}{f'(a_2)}\right], \cdots, a_n = a_{n-1} + \left[-\frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}\right],$$

此处有 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$。又从

$$f(a_n) = f(a_n) - f(\xi) = (a_n - \xi)f'(\eta),$$

此 η 在 a_n 与 ξ 之間，所以

$$|a_n - \xi| \leqslant \frac{|f(a_n)|}{m},$$

此处 m 等于 $|f'(x)|$ 在 a, b 間的最小値。

例 1. 給了方程

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 7 = 0.$$

把根分隔出来:

x	$+\infty$	10	5	2	1.9	1.8	1.7	1.5	1	$-\infty$
$f(x)$	+	+	+	+	+1.379	−0.088	−	−	−	−

根在 1.8 与 1.9 之間。

微分得

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3,$$

由此得

$$f'(a) = f'(1.8) = 9.72 + 7.2 - 3 = 13.92.$$

代入則得

$$a_1 = 1.8 + \frac{0.088}{13.92} = 1.806.$$

代入原方程

$$f(1.806) = -0.0042 < 0.$$

因此根在(1.806,1.9)之間。

継行可得

$$a_2 = a_1 + \left[\frac{-f(a_1)}{f'(a_1)}\right] = 1.806 + \frac{0.0042}{13.9348} = 1.8063.$$

因为 $f(1.8063) < 0$，所以根在 (1.8063,1.9) 之中，并求出 $f(1.807) > 0$. 所以根在 (1.8063,1.807)之間，这近似値的誤差小于 0.001。

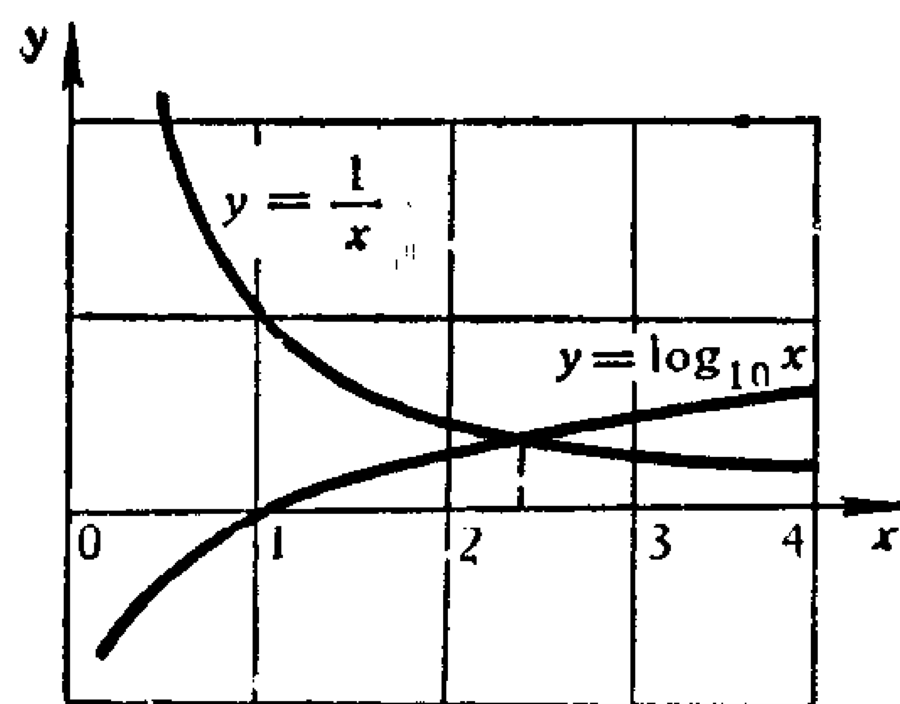


图 163

例 2. 解

$$x \cdot \log_{10} x = 1.$$

用两曲綫

$$y = \log_{10} x, \quad y = \frac{1}{x}$$

的交点来預測方程的根的位置，由图中看出根是在 2 与 3 之間，我們再来进行驗算. 命 $f(x) = x\log_{10} x - 1$，則

$$f(2) = -0.39793\cdots < 0,$$
$$f(3) = 0.43136\cdots > 0.$$

显然在 $2 < x < 3$ 間

$$f'(x) = \log_{10} x + \log_{10} e > 0$$

$$f''(x) = \frac{\log_{10} e}{x} > 0$$

我們由 $b = 3$ 出发

$$b_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{0.43136\cdots}{0.91141} = 3 - 0.473\cdots.$$

我們取 $b_1 = 2.53$, $f(2.53) = 0.019894\cdots$

$$b_2 = 2.53 - \frac{f(2.53)}{f'(2.53)} = 2.53 - \frac{0.019894\cdots}{0.83741} = 2.53 - 0.02375\cdots$$

再取 $b_2 = 2.5063$，得出

$$f(2.5063) = 0.000089.$$

誤差可以估計得

$$|b_2 - \xi| < \frac{0.000089\cdots}{0.7} < 0.0002$$

(此处 $m = \min|f'(x)| > 0.7$)．所以我們所得的带有准确度的結果是

$$\xi = 2.5062(\pm 0.0001).$$

例 3. 試寻求一个求方程 $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = L(5 \leqslant L \leqslant 62)$的近似根(要求有三位准确)的快速解法．

这是計划工作者經常遇到的一个方程．例如，假定一九五二年机械工业投資額是 a，第一个五年計划期間总投資額是 b．問第一个五年計划期間的平均增长率是什么？設平均增长率是 y，那末

$$a[(1+y) + (1+y)^2 + (1+y)^3 + (1+y)^4 + (1+y)^5] = b$$

作代換 $1 + y = x$，$\frac{b}{a} = L$，就化为我們所要求的形式了．

命 $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$．我們就是要求 $f(x) = g(x) - L = 0$ 的根 ξ．

先造两个表，取分点間的距离为 0.01．

(I)

x	$g(x)$
1	5
1.01	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$
1.99	$\cdots$
2	62

(II)

x	$g'(x)$
1	15
1.01	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$
1.99	$\cdots$
2	136

对于 $5 \leqslant L \leqslant 62$ 中的 L，由(I)可以找到 a 满足

$$g(a) > L \geqslant g(a - 0.01). \tag{1}$$

命

$$\xi^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{g(a) - L}{g'(a)}, \tag{2}$$

我們可証：

$$0 < \xi^* - \xi < 0.00013. \tag{3}$$

因此 ξ^* 适合我們的要求．事实上由(1)可知

$$\xi = a + \eta, \ -0.01 < \eta \leqslant 0,$$

故由 Taylor 展开式得

$$0 = f(\xi) = f(a + \eta) = f(a) + f'(a)\eta + \frac{f''(a + \theta\eta)}{2}\eta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

由簡单計算,可知在 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f'''(x) > 0$, $\left(\frac{f''(x-0.01)}{f'(x)}\right)' < 0$. 因此

$$\xi^* - \xi = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - (a+\eta) = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \eta = \frac{f''(a+\theta\eta)}{2f'(a)}\eta^2 \geqslant 0,$$

$$\xi^* - \xi = \frac{f''(a+\theta\eta)}{2f'(a)}\eta^2 < \frac{f''(a-0.01)}{2f'(a)}\eta^2 < \frac{f''(1)}{2f'(1.01)}(0.01)^2 < 0.00013.$$

故得(3)式.

§6. 联 合 法

这是插值法与 Newton 法的結合,我們只討論下面这种情形,其他情形是类似的.

若 $f(a) < 0, f(b) > 0$. 在 (a, b) 之中, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 那末由 §4 与 §5 可知 $f(x) = 0$ 的根 ξ 一定满足

$$a < x_1 < \xi < x_1' < b,$$

此处

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

我們就用 x_1 与 x_1' 分别代替 a 与 b, 于是仿上又得到

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1'-x_1)f(x_1)}{f(x_1')-f(x_1)}, \quad x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}.$$

这样一步步做下去得到

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n'-x_n)f(x_n)}{f(x_n')-f(x_n)}, \quad x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f'(x_n')},$$

而

$$a < x_{n+1} < \xi < x_{n+1}' < b.$$

这一方法的好处是由 $|x_n' - x_n|$ 就能直接判断根的近似值已达到的精确度.

例 1. 求 $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$ 在区間 $[-2, -1]$ 中的根 ξ.

由于在 $[-2, -1]$ 中, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$, 而 $f(-2) = -1 < 0$, $f(-1) = 9 > 0$, 所以 Newton 法应該用于左端.

$$x_1' = -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} = -2 - \frac{-1}{21} = -1.952\cdots,$$

$$x_1 = -1 - \frac{f(-1)}{f(-1)-f(-2)} = -1 - \frac{9}{9-(-1)} = -1.9.$$

为簡单起見,我們都取两位小数,显然 $\xi > -1.96$. 又經試驗可知 $f(-1.95) = 0.01775 > 0$. 将 x_1' 与 x_1 改取如下:

$$x_1' = -1.96, \quad x_1 = -1.95.$$

同法得

$$x_2' = -1.96 + \frac{0.180672}{19.9696} = -1.96 + 0.00904 = -1.95096.$$

$$x_2 = -1.95 - \frac{0.01 \cdot 0.01775}{0.01775 + 0.180672} = -1.95 - 0.00089\cdots = -1.95089\cdots.$$

因此得到

$$\xi = -1.9509 \pm 0.0001.$$

例 2. 求 $f(x) = x\sin x - 0.5 = 0$ 的根.

作出曲綫

$$y = \sin x$$

与

$$y = \frac{0.5}{x}$$

的图形可知,方程有无穷多个零点.

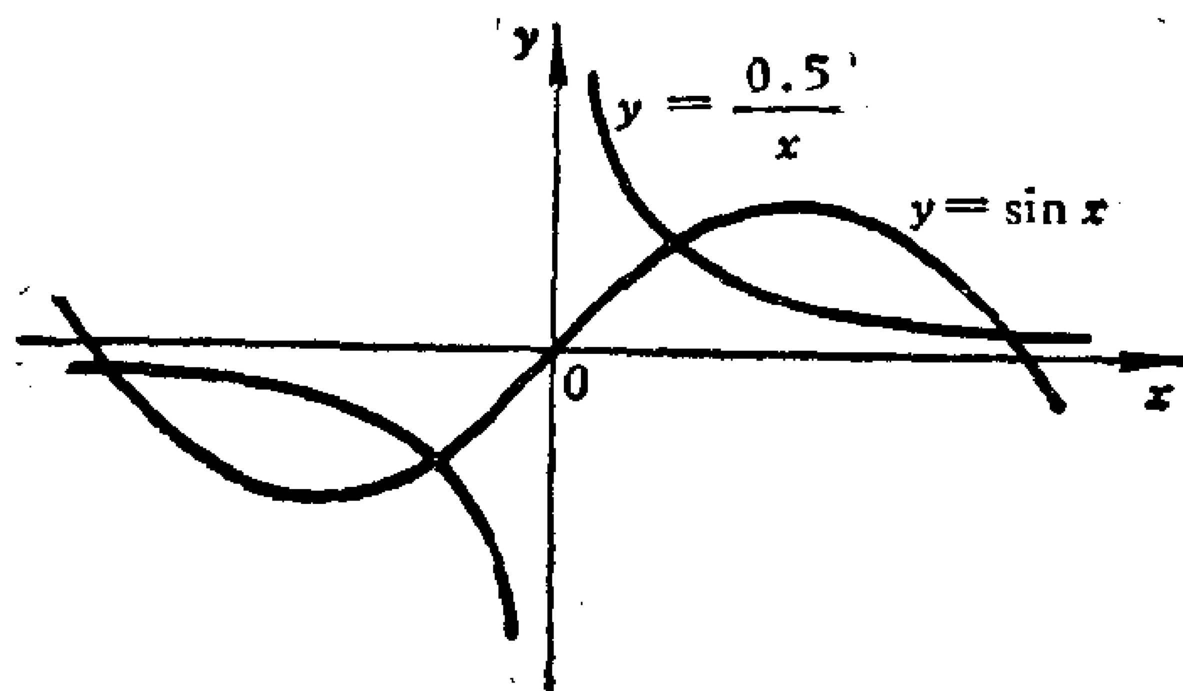


图 164

由图形可粗略看出最小正根大約是 0.7. 取

$$a = 0.6981317\cdots (=40^\circ),$$
$$b = 0.7853982\cdots (=45^\circ),$$

則

$$f(a) < 0, \ f(b) > 0;$$

又在 (a, b) 之中, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

現在将計算的概要写于下:

$$x_1 = 0.6981317\cdots + 0.04194908\cdots = 0.7400807\cdots (\doteq 42^\circ 24'),$$
$$x_1' = 0.7853982\cdots - 0.0438510\cdots = 0.741547\cdots (\doteq 42^\circ 29').$$

再算一次,得

$$x_2 = 0.7400196\cdots + 0.0008211\cdots = 0.7408407\cdots,$$
$$x_2' = 0.741547\cdots - 0.0006329\cdots = 0.7409143\cdots.$$

故得

$$\xi = 0.7409 \pm 0.0001.$$

§7. 霍 宪 法

命 a 为整数, $f(x)$ 是 $[a, a+1]$ 中的連續函数. 若 $f(a) < 0, f(a+1) > 0$, 則在 $[a, a+1]$ 中必定有 ξ, 滿足

$$f(\xi) = 0.$$

作代換 $x = a + y$. 記

$$f(a+y) = g(y),$$

則必定有整数 b, 滿足

$$0 \leqslant b \leqslant 9, \ g\left(\frac{b}{10}\right) < 0, \ \ g\left(\frac{b+1}{10}\right) > 0.$$

因此在 $\left[\frac{b}{10}, \frac{b+1}{10}\right]$ 中有 η 使

$$g(\eta) = 0,$$

即 ξ 滿足

$$a + \frac{b}{10} < \xi < a + \frac{b+1}{10}.$$

依次类推，可以逐步决定 ξ 的任意精确度的近似值.

特别当 $f(x)$ 为多項式时，計算还可以簡化.

例 1. 求方程

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

的根 ξ.

由 $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ 可知

$$2 < \xi < 3.$$

作代换 $x = 2 + y$, 得

$$f(x) = f(2 + y) = g(y) = y^3 + 6y^2 + 10y - 1.$$

又由 $g(0.09) < 0$, $g(0.1) > 0$, 可知 $g(y) = 0$ 的根 η 滿足

$$0.09 < \eta < 0.1,$$

即

$$2.09 < \xi < 2.1.$$

再用此法一次. 命 $\xi = 2.094 + z$, 則 z 是方程

$$h(z) = z^3 + 6.282z^2 + Az - B = 0, \quad A = 11.154508, \quad B = 0.006153416.$$

的根.

命 $C(z) = z^3 + 6.282z^2$, 显然 $C(z)$ 相对于 A, B 是較小的，所以 z 的近似值由 $Az - B = 0$ 来給出. 而 $\frac{B}{A}$ 在 $r = 0.0005$ 与 $s = 0.0006$ 之間. 由于

$$C(r) = 0.00000157, \quad C(s) = 0.00000226.$$

(以上两数的最后一位是正确的. 以后各数，除特殊声明外，亦然).

$$Ar - B = -0.000576, \quad As - B = 0.000539.$$

因此 $h(r) < 0$, $h(s) > 0$, 所以

$$0.0005 < z < 0.0006.$$

我們再来求 z 的更精确的近似值. 命

$$h(z) = Az - D, \quad D = B - C(z),$$

則得

$$D = 0.006151.$$

将 $z = D/A$ 算至六位小数如下:

```
**    **
11.  154  508 | 0.006151   | 0.0005514 = z
                  5577
                   574
                   558
                    16
                    11
                     5
```

注意，在此除数只用到 11.15，并适当注意进位. 因此

$$\xi = 2.0945514 + \cdots,$$

此处仅最后一位是 4 或 5，还无法肯定.

进而言之，由于

$$0.000551 < z < 0.000552,$$

要求$C(z)$的較精确的近似值. 显然z^3是可以忽略的，用对数:

$$\begin{array}{rl} 2\log_{10} 5.51 = 1.48230 & \quad 2\log_{10} 5.52 = 1.48388 \\ \log_{10} 6.282 = 0.79810 & \quad \log_{10} 6.282 = 0.79810 \\ \hline \log_{10} 190.72 = 2.28040 & \quad \log_{10} 191.42 = 2.28198 \end{array}$$

所以

$$0.000001907 < C(z) < 0.000001915, \quad D = 0.00615150.$$

計算 D/A 如下:

```
** ****
11.154508 | 0.00615150 | 0.00055148
          |  557725    |
          |   57425    |
          |   55773    |
          |    1652    |
          |    1115    |
          |     537    |
          |     446    |
          |      91    |
          |      89    |
          |       2    |
```

因此

$$\xi = 2.094551482,$$

此处仅最后一位 2 是可疑的.

續行此法，还可以求出 ξ 更精确的近似值来.

習題 1. 求方程 $x^3 + 18x - 30 = 0$ 的根(答: 1.4848066).

習題 2. 求方程 $x^4 - 12x^2 - 40x - 21 = 0$ 的两实根.

(答: 4.6457513, −0.6457513).

§ 8. Лобачевский 法

已給方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \tag{1}$$

我們假定这个方程有 n 个实根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 且滿足

$$|x_1| > |x_2| > \cdots > |x_n|.$$

显然

$$a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n = 0 \tag{2}$$

的根是 $-x_1, -x_2, \cdots, -x_n$. 将(1)与(2)相乘得到

$$a_0^2x^{2n} + (a_0a_1 - a_0a_1)x^{2n-1} + (-a_1^2 + 2a_0a_2)x^{2n-2} + (-a_0a_3 + \\ + a_1a_2 - a_1a_2 + a_0a_3)x^{2n-3} + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4)x^{2n-4} + \cdots = 0.$$

再将 x^2 写成 z, 于是得到

$$a_0^2z^n - (a_1^2 - 2a_2a_0)z^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4a_0)z^{n-2} + \cdots = 0, \tag{3}$$

但另一方面,(1)与(2)相乘得

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)(x + x_1)(x + x_2)\cdots(x + x_n) = \\ = (z - x_1^2)\cdots(z - x_n^2) = 0,$$

故(3)的根是 $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$. 将(3)中的 z 换为 $-z$, 則得

$$a_0^2z^n + (a_1^2 - 2a_2a_0)z^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4a_0)z^{n-2} + \cdots = 0. \tag{4}$$

方程(4)的根是 $-x_1^2, -x_2^2, \cdots, -x_n^2$. 这方程 z^h 的系数是(1)中 x^h 的系数的平方,減去2倍 x^{h+1} 与 x^{h-1} 的系数的积,再加上2倍 x^{h+2} 与 x^{h-2} 的系数的积,如此等等,一直到方程的第一项或最末一項为止.

經过 h 次这样的手續,我們得到

$$x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n = 0.$$

它的根都 $\leqslant 0$, 它的絕对值是所給方程(1)的根的絕对值的 2^h 次方, 即 $-x_1^{2^h}, -x_2^{2^h}, \cdots, -x_n^{2^h}$.

記 $m = 2^h$. 由于

$$x^n + b_1x^{n-1}\cdots + b_{n-1}x + b_n = (x + x_1^m)\cdots(x + x_n^m),$$

故得

$$\begin{cases} x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m = b_1 \\ (x_1x_2)^m + (x_2x_3)^m + \cdots + \cdots = b_2 \\ (x_1x_2x_3)^m + (x_1x_2x_4)^m + \cdots = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_1x_2\cdots x_n)^m = b_n. \end{cases}$$

将上式改写为

$$\begin{cases} x_1^m\left[1 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^m + \left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^m + \cdots + \left(\dfrac{x_n}{x_1}\right)^m\right] = b_1 \\ (x_1x_2)^m\left[1 + \left(\dfrac{x_3}{x_2}\right)^m + \cdots\right] = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (x_1x_2\cdots x_n)^m = b_n. \end{cases}$$

因为 $|x_1| > |x_2| > \cdots > |x_n|$, 故当 $m \to \infty$ 时, $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^m, \left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^m, \cdots, \left(\dfrac{x_n}{x_1}\right)^m; \left(\dfrac{x_3}{x_2}\right)^m\cdots$ 都趋于零,因此可以选取 m 充分大,使在許可的准确度之內,这些都可以略而不計. 故得

$$\left|\begin{aligned} & x_1^m = b_1, \\ & (x_1x_2)^m = b_2, \\ & (x_1x_2x_3)^m = b_3, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (x_1x_2\cdots x_n)^m = b_n, \end{aligned}\right.$$

卽

$$x_1^m = b_1,\ x_2^m = \frac{b_2}{b_1},\ x_3^m = \frac{b_3}{b_2},\ \cdots,\ x_n^m = \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

这样一来，我們就求得了原来方程根的絕对值，根的符号可以由直接检驗来确定.

在計算

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根之前，可以先行代換 $x = \sqrt[n]{a_n}\, y$，于是得到

$$y^n + c_1y^{n-1} + \cdots + c_{n-1}y + 1 = 0.$$

解后者有时比較方便.

例. 解方程 $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$.

我們将計算过程用表列出.

x^3 的系数	x^2 的系数	x 的系数	常数項	方程的根的方次数
$a_0 = 1$	$a_1 = -5$	$a_2 = -2$	$a_3 = 24$	1
$\log a_0 = 0$	$a_1^2 = (-5)^2 = 25$ $-2a_2a_0 = -2(-2)\times 1$ $= 4$ $a_1^2 - 2a_2a_0 = 25 + 4 = 29$ $\log 29 = 1.4624$	$(-2)^2 = 4$ $-2\times 24\times(-5) = 240$ $4 + 240 = 244$ $\log 244 = 2.3874$	$24^2 = 576$ $\log 576 = 2.7604$	
0	$\log b_1 = 1.4624$	$\log b_2 = 2.3874$	$\log b_3 = 2.7604$	2
	$b_1' = b_1^2 - 2b_0b_2 = 353.1$ $\log b_1' = 2.5479$	$b_2' = b_2^2 - 2b_1b_3 =$ 2.614×10^4 $\log b_2' = 4.4173$	$\log b_3' = 2\log b_3$ $= 5.5208$	
0	$\log b_1' = 2.5479$	$\log b_2 = 4.4173$	$\log b_3' = 5.5208$	4
0	$\log b_1'' = 4.8597$	$\log b_2'' = 8.6522$	$\log b_3'' = 11.0416$	8
0	$\log b_1^{(3)} = 9.6378$	$\log b_2^{(3)} = 17.2688$	$\log b_3^{(3)} = 22.0832$	16
0	$\log b_1^{(4)} = 19.2672$	$\log b_2^{(4)} = 34.5362$	$\log b_3^{(4)} = 44.1664$	32
0	$\log b_1^{(5)} = 38.5343$	$\log b_2^{(5)} = 69.0724$	$\log b_3^{(5)} = 88.3328$	64

由

$$\log |x_1^{64}| = 38.5343$$

得

$$|x_1| = 4.$$

同样可知 $|x_2| = 3$，$|x_3| = 2$. 經过直接检查可知 $x_1 = 4$，$x_2 = 3$，$x_3 = -2$.

补　　充

§9. 实数根的几个定理

給定实系数多項式

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

我們知道它有 n 个根.

在前面几节的討論中，都是限于找寻方程的近似实数解，但是 $P_n(x)$ 什么时候有实数解？有多少个实数解？在什么区間有多少个实数解？这些問題还未解决.

討論 $P_n(x)$ 的逐次微商組

$$P_n(x),\ P_n'(x),\ P_n''(x),\ \cdots,\ P_n^{(n)}(x). \tag{1}$$

如果实数 c 不为多項式組(1)中任一式的根，那么以 $S(c)$ 記下列序数的变号次数：

$$P_n(c),\ P_n'(c),\ P_n''(c),\ \cdots,\ P_n^{(n)}(c).$$

当 x 增大，不經过 (1) 中任一式的根时，$S(x)$ 不可能有变化. 因之，只要討論 x 經过 $P_n(x)$ 的根与 P 任一微商 $P_n^{(k)}(x)(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 的根时的情况.

設 α 为 $P_n(x)$ 的 l 重根，$l \geqslant 1$，即

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = \cdots = P_n^{(l-1)}(\alpha) = 0,\ P_n^{(l)}(\alpha) \neq 0.$$

取 ε 充分小，使在 $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ 中不含 $P_n(x),\ P_n'(x),\ \cdots,\ P_n^{(l-1)}(x)$ 的 α 以外的其他根，同时亦不含多項式 $P_n^{(l)}(x)$ 的任一根. 我們来証明，数組

$$P_n(\alpha-\varepsilon),\ P_n'(\alpha-\varepsilon), \cdots,\ P_n^{(l-1)}(\alpha-\varepsilon),\ P_n^{(l)}(\alpha-\varepsilon)$$

中任二相邻的数都是反号的，而所有的数

$$P_n(\alpha+\varepsilon),\ P_n'(\alpha+\varepsilon), \cdots,\ P_n^{(l-1)}(\alpha+\varepsilon),\ P_n^{(l)}(\alpha+\varepsilon)$$

都是同号的. 因为組(1)除 $P_n(x)$ 外，每一个多項式都是它的前一个多項式的微商，所以我們只要証明，如果 x 經过多項式 $P_n(x)$ 的根 α，那么和这一根的重数无关，在經过以前，$P_n(x)$ 与 $P_n'(x)$ 反号，而在經过之后它們是同号的. 如果 $P_n(\alpha-\varepsilon) > 0$，那末在 $(\alpha-\varepsilon, \alpha)$ 中 $P_n(x)$ 是減少的，因而 $P_n'(\alpha-\varepsilon) < 0$；如果 $P_n(\alpha-\varepsilon) < 0$，那么 $P_n(x)$ 是增加的，因而 $P_n'(\alpha-\varepsilon) > 0$. 故在这二种情形，它們的符号都是相反的. 同样可以証明，$P_n(\alpha+\varepsilon)$ 与 $P_n'(\alpha+\varepsilon)$ 是同号的. 这就証明，当 x 經过 $P_n(x)$ 的 l 重根时，組

$$P_n(x),\ P_n'(x), \cdots,\ P_n^{(l-1)}(x),\ P_n^{(l)}(x)$$

失去 l 个变号.

設 α 为微商

$$P_n^{(k)}(x),\ P_n^{(k+1)}(x),\ \cdots,\ P_n^{(k+l-1)}(x),\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ l \geqslant 1$$

的根，但不是 $P_n^{(k-1)}(x)$ 及 $P_n^{(k+l)}(x)$ 的根. 从上面証明推知，当 x 經过 α 时，組

$$P_n^{(k)}(x),\ P_n^{(k+1)}(x), \cdots,\ P_n^{(k+l-1)}(x),\ P_n^{(k+l)}(x)$$

将丧失 l 个变号，但在 $P_n^{(k-1)}(x)$ 与 $P_n^{(k)}(x)$ 間可能得出一个新的变号. 由 $l \geqslant 1$，当 x

經过 α 时

$$P_n^{(k-1)}(x),\ P_n^{(k)}(x),\cdots,\ P_n^{(k+l)}(x)$$

的变号数可能不变亦可能減少，因为当 x 經过值 α 时，多项式 $P_n^{(k-1)}(x)$ 与 $P_n^{(k+l)}(x)$ 的符号不变，如其变号数減少，則必減少一个正偶数.

因之得到：如果 a 与 $b(a<b)$ 都不是多項式組(1)中任一式的根，那末在 a, b 間多項式 $P_n(x)$ 的实根数（l 重根以 l 个計算）等于差 $S(a)-S(b)$ 或比这个数少一正偶数. 后者对应于在 a,b 間存在 c,c 不是 $P_n(x)$ 的根，但是 $P_n^{(k)}(x)\ (k\geqslant 1)$ 的根的情况.

为了減輕加在 a 与 b 上的限制，設 c 不是 $P_n(x)$ 的根，但可能是(1)中其他多項式的根. 以 $S_+(c)$ 表这些数

$$P_n(c),\ P_n'(c),\cdots,\ P_n^{(n-1)}(c),\ P_n^{(n)}(c) \tag{2}$$

的变号数，其計算法如次：如

$$P_n^{(k)}(c)=P_n^{(k+1)}(c)=\cdots=P_n^{(k+l-1)}(c)=0, \tag{3}$$

但

$$P_n^{(k-1)}(c)\neq 0,\ P_n^{(k+l)}(c)\neq 0, \tag{4}$$

那么視 $P_n^{(k)}(c),\ P_n^{(k+1)}(c),\cdots,\ P_n^{(k+l-1)}(c)$ 与 $P_n^{(k+l)}(c)$ 同号，以 $S_-(c)$ 表(2)的另一变号数：如有(3)与(4)的情形，若 $l-i$ 是一个偶数，那么視 $P_n^{(k+i)}(c),\ 0\leqslant i\leqslant l-1$ 与 $P_n^{(k+l)}(c)$ 同号，若 $l-i$ 是一个奇数，則視为反号.

取 ε 充分小，使 $(a,a+2\varepsilon)$ 不含 $P_n(x)$ 的根且亦不含(1)中所有其余多項式的不等于 a 的根，取 η 充分小，使 $(b-2\eta,b)$ 中不含 $P_n(x)$ 的根，亦不含組(1)中其他多項式的不等于 b 的根. 于是 $S(a+\varepsilon)=S_+(a)$, $S(b-\eta)=S_-(b)$，我們有：

Budan 定理. 如果实数 $a<b$, a 和 b 都不是实系数多項式 $P_n(x)$ 的根，那末多項式 $P_n(x)$ 在 a 与 b 間的实根数（l 重根以 l 个計算）等于差 $S_+(a)-S_-(b)$ 或比这个数少一正偶数.

x 很大时，可使(1)中多項式对应于这个值的符号都与首項符号相同，而这些系数順次为 $a_0,\ na_0,\ n(n-1)a_0,\cdots n!a_0$，它們的符号相同，故 $S(x)=S_-(x)=0$. 另一方面

$$f(0)=a_n,\ f'(0)=a_{n-1},\ f''(0)=a_{n-2}2!,\cdots,\ f^{(n)}(0)=a_0\cdot n!.$$

故得：

Descartes 定理. 多項式 $P_n(x)$ 的正根个数（l 重根以 l 个計算），等于这一多項式的系数組(等于零的系数不予計入)的变号数或比这一个数少一个正偶数.

为了定出負根个数，考虑 $P_n(-x)$ 易得：

如果 $P_n(x)$ 沒有等于零的系数，那么它的負根个数（重根以其重数来計算）等于其系数組中的同号数，或比这个数少一正偶数.

§ 10. Sturm 定理

上一节中給出了一些簡便的方法定出多項式 $P_n(x)$ 的实根个数的上限，但并未得到根的个数的确切数字. 这个問題为以下的 Sturm 定理所完全解决.

設 $P_n(x)$ 沒有重根，記 $Q_1(x)=P'_n(x)$ 以 $Q_1(x)$ 除 $P_n(x)$，得

$$P_n(x)=Q_1(x)q_1(x)-Q_2(x).$$

同样的定义

$$Q_{k-1}(x)=Q_k(x)q_k(x)-Q_{k+1}(x).$$

考慮

$$Q_0(x)=P_n(x),\ Q_1(x),\ \cdots Q_s(x), \tag{1}$$

由于 $P_n(x)$ 无重根，所以 $P_n(x)$ 与 $P'_n(x)$ 互素(即无公因式)，因而 $Q_s(x)$ 是一个不等于零的实数，而且(1)中相邻二个多項式沒有公根. 如果 $Q_k(x)$ 与 $Q_{k+1}(x)$ 有公根α，那末 α 也是 $Q_{k-1}(x)$的根，也是 $Q_{k-2}(x)$的根，…，最后得到 $Q_0(x)$ 与 $Q_1(x)$ 有公根，这导出 $P_n(x)$ 有重根，这与假設矛盾. 如果 $Q_k(\alpha)=0$，那末 $Q_{k-1}(\alpha)=-Q_{k+1}(\alpha)$，即如果 α 是(1)中某一个多項式 $Q_k(x)$ 的根，那末它們相邻二个多項式的値反号. 最后，可以看出，如果 α 是 $P_n(x)$ 的实根，那末 $P_n(x)P'_n(x)$ 在 $x=\alpha$ 处为增加函数. 因为：如果 $P_n(x)$ 在 $x=\alpha$ 时增加，那末 $P'_n(\alpha)>0$，所以 $P_n(x)P'_n(x)$ 是增加的；如果 $P_n(x)$ 在 $x=\alpha$ 是减少的，那么 $P'_n(\alpha)<0$，因而 $P_n(x)P'_n(x)$仍然是增加的.

如果 c 不是 $P_n(x)$ 的根，考慮

$$P_n(c),\ Q_1(c),\ Q_2(c),\cdots,\ Q_s(c)$$

删去它里面等于零的数，以 $W(c)$記余下来这組数的变号数；称 $W(c)$ 为当 $x=c$ 的多項式 $P_n(x)$ 的 Sturm 組(1)的变号数，于是我們有

Sturm 定理. 如果实数 $a<b$，a 与 b 都不是多項式 $P_n(x)$ 的根，且 $P_n(x)$ 沒有重根，那么 $W(a)\geqslant W(b)$，而且差数 $W(a)-W(b)$ 等于 $P_n(x)$ 在 a 与 b 間的实根个数.

証. 当 x 增大而不經过 Sturm 組(1)中任一多項式的根时，其序列中多項式的符号都沒有变更，因而 $W(x)$ 无变动. 由于 $Q_s(x)$ 是一个常数，所以我們只要討論 x 經过 $Q_k(x)$，$1\leqslant k\leqslant s-1$ 的某一个多項式的根与 x 經过 $P_n(x)$ 的根.

設 α 是 $Q_k(x)(1\leqslant k\leqslant s-1)$ 的根，那末由 $Q_k(x)$ 的定义，$Q_{k-1}(\alpha)$ 与 $Q_{k+1}(\alpha)$ 都不为零. 取适当小的 $\varepsilon>0$，使 $Q_{k-1}(x)$ 与 $Q_{k+1}(x)$ 在 $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ 中无根，因而符号不变，但是我們已知它們的符号是相反的，因此，每一組数

$$Q_{k-1}(\alpha-\varepsilon),\ Q_k(\alpha-\varepsilon),\ Q_{k+1}(\alpha-\varepsilon)$$

与

$$Q_{k-1}(\alpha+\varepsilon),\ Q_k(\alpha+\varepsilon),\ Q_{k+1}(\alpha+\varepsilon)$$

都恰好有一个变号，且与 $Q_k(\alpha-\varepsilon)$，$Q_k(\alpha+\varepsilon)$的符号无关，因为当 x 經过 Sturm 組中多項式的某一个多項式的根时，只是这組的符号有所变动，但是变号数旣无增多亦未减少，故这种变动不使 $W(x)$ 改变.

另一方面，如 α 是 $P_n(x)$ 的根，由于 $P_n(x)$ 无重根，所以 α 不是 $Q_1(x)$ 的根，所以有 $\varepsilon>0$，使 $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ 內不含有 $Q_1(x)$ 的根，因而 $Q_1(x)$ 在这一区間內符号不变. 如果符号是正的，那末由于 $P_n(x)Q_1(x)$ 在 $x=\alpha$ 是增加函数，所以 $P_n(\alpha-\varepsilon)<0$，$P_n(\alpha+\varepsilon)>0$. 故数列

$$P_n(\alpha-\varepsilon),\ P'_n(\alpha-\varepsilon) \text{ 与 } P_n(\alpha+\varepsilon),\ P'_n(\alpha+\varepsilon) \tag{2}$$

各有符号

$$-,+,\ 与\ +,+,$$

亦即 Sturm 組失去一个变号．如果 $P'_n(x)$在$(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$中$<0$，那末(2)的符号为

$$+,-,\ 与 -,-,$$

也失去了一个符号，因此

$W(x)$ 在 x 經过多項式 $P_n(x)$ 的根，而且只在这一情形，$W(x)$ 才減少一个单位数。

例． $h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3.$

我們不必先去判断 $h(x)$ 有无重根，因为在构造 Sturm 組时，同时也驗証了 $h(x)$ 与 $h'(x)$ 之間是否互素。

$$\begin{aligned}
h(x) &= x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,\\
h'(x) &= 5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,\\
h_2(x) &= 66x^3-150x^2+172x+61,\\
h_3(x) &= -464x^2+1135x+723,\\
h_4(x) &= -32599457x-8486093,\\
h_5(x) &= -1.
\end{aligned}$$

造表

	$h(x)$	$h'(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	变号数
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1

因之，$h(x)$ 有三个实根。

第九章 不定积分

§1. 换变数法則

在第六章已經得出一批簡单的积分公式，本章的目的在于較詳尽地介紹一些求原函数的方法，幷且算出一些常見函数的积分.

首先我們介紹換变数法. 有时用新变量 t 代替 x，可以使积分 $\int f(x)dx$ 簡化. 設旧变量和新变量的关系是

$$x=\varphi(t), \tag{1}$$

則

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt+C. \tag{2}$$

要証明这个式子十分容易，对 x 求微分得

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right),$$

卽得所証.

例 1. 求 $\int\frac{dx}{ax+b}$.

命 $ax+b=t$, 則

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\log t+C=\frac{1}{a}\cdot\log(ax+b)+C.$$

例 2. 求 $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

命 $\frac{x}{a}=t$, 則

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

也可以命 $x=a\operatorname{tg}t$, 則

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{a\sec^2 t}{a^2\sec^2 t}dt=\frac{1}{a}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

例 3. 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

命 $\frac{x}{a}=t$, 同上例可知

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} t + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

也可以命 $x = a\sin\theta$，则得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

例 4. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

命 $\sqrt{x^2+a} = t - x$，则

$$x^2 + a = t^2 + x^2 - 2tx,$$

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{a}{t}\right), \qquad dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{t^2}\right)dt.$$

因此

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{2t}{t^2+a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2+a}{t^2} dt = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log t + C = \log(\sqrt{x^2+a} + x) + C.$$

例 5. 求 $\int \sin^3 x \cos x\, dx$.

命 $\sin x = t$，则

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d\sin x = \int t^3 dt$$

$$= \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

例 6. 求 $\int \frac{\log x}{x} dx$.

命 $\log x = t$，则

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\log^2 x}{2} + C.$$

例 7. 求 $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

命 $\cos x = t$，则

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\int \frac{dt}{t} = -\log t + C = -\log\cos x + C.$$

例 8. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\ (\alpha < x < \beta)$.

命 $x = \alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta$，则

$$x - \alpha = \alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta - \alpha(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (\beta-\alpha)\sin^2\theta,$$

$$\beta - x = (\beta - \alpha)\cos^2\theta,$$

$$dx = 2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta d\theta.$$

因此

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 2\int d\theta = 2\theta + C = 2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C.$$

习题 1. 求 $\int (ax+b)^m dx \quad (m \neq -1)$.

习题 2. 求 $\int \sin^3 x dx$.

习题 3. 求 $\int \operatorname{ctg} x dx$.

习题 4. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

习题 5. 求 $\int e^{x^2} x dx$.

习题 6. 求 $\int \frac{dx}{A^2\sin^2 x + B^2\cos^2 x}$.

提示：作变数代换 $\operatorname{tg} x = t$.

习题 7. 求 $\int \frac{dx}{\sin x}$.

§2. 分部积分法

分部积分法所根据的公式是

$$d(uv) = udv + vdu,$$

由此可以得出

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

如果 $u = f(x)$, $v = g(x)$ 都是 x 的函数,则

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

例 1. 求积分 $\int x\cos x dx$.

命 $u = x$, $dv = \cos x\, dx$, 则

$$du = dx, \quad v = \sin x$$

(此处没有必要写上常数项). 因此

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

这个方法,使原来求 $x\cos x$ 的积分的較难問題一变而为求 $\sin x$ 的积分的較易問題.

分部积分的公式,还可以做以下的推广:假定 u 与 v 各有 $(n+1)$ 級的微商

$$u', v', u'', v'', \cdots, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}.$$

运用分部积分法可知

$$\int uv^{(n+1)}dx = \int udv^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)}du = uv^{(n)} - \int v^{(n)}u'\, dx,$$

同样地,得到

$$\int u'v^{(n)}dx = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}dx,$$

$$\int u''v^{(n-1)}dx = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}dx,$$

....

$$\int u^{(n)}v'dx = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}vdx.$$

逐步代入，即得

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots +$$

$$+ (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx.$$

如果 u 是一个 x 的 n 次多项式，则 $u^{(n+1)} = 0$，左端的式子就表达了右端的积分。

例 2. 求 $\int x^3 \log x\, dx$.

命 $u = \log x$, $dv = x^3\, dx$，则

$$du = \frac{dx}{x},\quad v = \frac{x^4}{4}.$$

因此

$$\int x^3 \log x\, dx = \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

例 3. 求 $\int \operatorname{tg}^{-1} x\, dx$.

命 $u = \operatorname{tg}^{-1} x$, $dv = dx$，则

$$\int \operatorname{tg}^{-1} x\, dx = x \operatorname{tg}^{-1} x - \int x d \operatorname{tg}^{-1} x = x \operatorname{tg}^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x \operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$$

例 4. 求 $\int x^2 \sin x\, dx$.

命 $u = x^2$, $dv = \sin x\, dx$，则由例 1 可知

$$\int x^2 \sin x\, dx = \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x)\, dx^2$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

例 5. 求 $\int xe^{ax} dx$.

命 $u = x$, $dv = e^{ax} dx$，则

$$\int xe^{ax} dx = \frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} xe^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + C.$$

例 6. 求 $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ 及 $\int e^{ax} \sin bx\, dx$.

分别命 $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}\, dx$ 及 $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}\, dx$，则得

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin bx\, dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

这样一来，两个积分中的每一积分都能用另一积分来表达，因此由这两个式子解出

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C'.$$

例 7. 求 $J_n = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

命 $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv = dx$, 则

$$J_n = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx.$$

由于

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$= \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2J_{n+1},$$

因此

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(J_n - a^2J_{n+1}),$$

即

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n.$$

这一公式称为所要求的积分 J_n 的循环公式，它把积分 J_{n+1} 的計算化为 J_n 的計算. 由例 1.2 可知

$$J_1 = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

故由循环公式可知

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} + C',$$

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} + C''.$$

等等.

附記. 分部积分法可以用来处理一般的反函数积分問題，因为

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xdf(x).$$

由 $f(x) = y$, 得到反函数 $x = g(y)$, 則得

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int g(y)dy.$$

習題 1. 求 $\int \sin^{-1}x\,dx$.

習題 2. 命 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, 求

$$\int P(x)e^{ax}\,dx,\ \int P(x)\sin ax\,dx,\ \int P(x)\cos bx dx.$$

習題 3. 命 $J_{k,m} = \int x^k \log^m x\,dx (k \neq -1)$,

求証:

$$J_{k,m} = \frac{1}{k+1} x^{k+1}\log^m x - \frac{m}{k+1} J_{k,m-1}.$$

并具体算出 $J_{3,2}$.

習題 4. 命 $I_n = \int x^n e^{ax} \sin bx\,dx$, $J_n = \int x^n e^{ax} \cos bx\,dx$,

求証:

$$I_n = x^n \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} - \frac{na}{a^2+b^2} I_{n-1} + \frac{nb}{a^2+b^2} J_{n-1},$$

$$J_n = x^n \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2} e^{ax} - \frac{nb}{a^2+b^2} I_{n-1} - \frac{na}{a^2+b^2} J_{n-1}.$$

并具体算出 I_1 及 J_1.

§3. 分項积分法

先从一个例題說起.

例 1. 求积分

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}.$$

由于

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a),$$

我們引进以下的分項分数法. 定出 A 与 B 使

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

通分后比較分子的系数可知,

$$a(A-B) = 1,\ A+B = 0.$$

卽得

$$A = -B = \frac{1}{2a},$$

因此

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

所求的积分就是

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

更一般些,有

例 2. 求积分

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\,dx.$$

配平方得

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

命 $t=x+\frac{p}{2}$, $A=m$, $B=n-\frac{1}{2}mp$ 及 $\pm a^2=q-\frac{p^2}{4}$, 則

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx=\int\frac{At+B}{t^2\pm a^2}dt.$$

积分

$$A\int\frac{tdt}{t^2\pm a^2}=\frac{A}{2}\int\frac{d(t^2\pm a^2)}{t^2\pm a^2}=\frac{A}{2}\log|t^2\pm a^2|+C.$$

由例 1.2 可知

$$B\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{B}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{t}{a}+C.$$

由例 1 知

$$B\int\frac{dt}{t^2-a^2}=\frac{B}{2a}\log\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C,$$

因而得到:如果 $p^2>4q$, 則

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx=\frac{m}{2}\log|x^2+px+q|+$$

$$+\frac{2n-mp}{2\sqrt{p^2-4q}}\log\left|\frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}}\right|+C.$$

如果 $p^2<4q$, 則

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx=\frac{m}{2}\log(x^2+px+q)+\frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

为了配合以下两节的目的,我們概括一下我們已經得到的一些結果。

我們已經会求以下五种函数的积分:

I. 多項式,

II. $\frac{A}{x-a}$,

III. $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2, 3, \cdots\cdots)$,

IV. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$,

V. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$ $(m=2, 3, \cdots\cdots)$, $(p^2-4q<0)$.

关于V, 乃用代换 $t=x+\frac{p}{2}$, 于是

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

右端第一个积分可以直接算出：

$$\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + C = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + C.$$

右端第二个积分的算法見例 2.7.

以下两节的目的，在于証明用分項分数法，任何有理函数的积分都可以成为以上五种函数的积分之和.

§4. 有理分式的积分

若 $F(x)$ 与 $G(x)$ 为实系数的多項式，則 $F(x)/G(x)$ 就称为有理分式，特别当 $F(x)$ 的次数低于 $G(x)$ 的次数时，就称为真分式. 由除法可知，任一有理分式可以写成

$$\frac{F(x)}{G(x)} = H(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

此处 $H(x)$ 是实系数的多項式，而 $P(x)/Q(x)$ 是既約的真分式（卽 $P(x)$ 的次数小于 $Q(x)$，且不存在次数大于 0 的多項式，同时除尽 $P(x)$ 与 $Q(x)$）.

因此，有理分式的积分問題化为真分式的积分問題了.

定理 1. 任一真分式

$$P(x)/Q(x)$$

是 §3 型 II, III, IV, V 的真分式的和.

証： 命 $Q(x) = (x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots$.

1）若 $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, $Q_1(a) \neq 0$, $k \geqslant 1$, 要証明存在 A 及 $P_1(x)$, 使

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}.$$

等式双方乘以 $Q(x)$ 得

$$P(x) = AQ_1(x) + (x-a)P_1(x).$$

由 $Q_1(a) \neq 0$ 得

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

卽取这样的 A, 則 $P(x) - AQ_1(x)$ 一定可为 $x-a$ 除尽，因而定出 $P_1(x)$ 来，卽得所証.

2）若 $Q(x) = (x^2+px+q)^m Q_1(x)$, $(p^2 < 4q)$, 而 $Q_1(x)$ 不含有因子 x^2+px+q, 要証明存在常数 M, N 及多項式 $P_1(x)$ 使

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)}.$$

双方乘以 $Q(x)$ 得

$$P(x) = (Mx+N)Q_1(x) + (x^2+px+q)P_1(x).$$

确定 M 与 N 使 $P(x) - (Mx+N)Q_1(x)$ 是 x^2+px+q 的倍数. 命以 x^2+px+q 除 $P(x)$ 与 $Q_1(x)$ 后的余式分别是 $\alpha x+\beta$ 与 $\gamma x+\delta$, 因此間題化为确定 M 与 N 使 x^2+px

$+q$ 整除

$$\alpha x+\beta-(Mx+N)(\gamma x+\delta).$$

以 x^2+px+q 除此式得余式

$$[(p\gamma-\delta)M-\gamma N+\alpha]x+[q\gamma M-\delta N+\beta],$$

因此必須

$$\begin{cases}(p\gamma-\delta)M-\gamma N+\alpha=0,\\ q\gamma M-\delta N+\beta=0.\end{cases}$$

由这組方程解出 M 与 N，必須行列式

$$\begin{vmatrix}p\gamma-\delta & -\gamma\\ q\gamma & -\delta\end{vmatrix}=\delta^2-p\gamma\delta+q\gamma^2$$

异于零.

当 $\gamma\neq 0$，則 $\delta^2-p\gamma\delta+q\gamma^2=\gamma^2\left[\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)^2+p\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)+q\right]\neq 0$，否則三項式 x^2+ $+px+q=0$ 有一实根 $-\frac{\delta}{\gamma}$，这是不可能的；当 $\gamma=0$ 时，δ 必非零，否則 $Q_1(x)$ 是 x^2+ $+px+q$ 的倍数了，亦不可能.

$P_1(x)$ 可以看作是 x^2+px+q 除 $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ 后所得的商.

3) 綜合 1) 与 2) 逐步做去可知

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots$$
$$+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}+\frac{M_{m-1}x+N_{m-1}}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots. \tag{1}$$

定理証完(对 $Q(x)$ 的每一实根，每一对虛根都得入算).

但如何将眞分式 $P(x)/Q(x)$ 表示成形式(1)呢？除掉以上所說的逐步做的方法，还有以下的待定系数法. 若 $Q(x)$ 的次数是 n，将(1)式右方的 $A_k, A_{k-1}, \cdots, A_1, \cdots, M_m, N_m, \cdots, M_1, N_1$ 看成待定系数，则一共 n 个. (1)式双方乘以 $Q(x)$，比較系数，共得 n 个关于待定系数的綫性方程(因 $P(x)$ 的次数低于 n). 由此可以确定这 n 个待定系数，由于分解为形狀(1)的可能性已由定理 1 建立，所以方程組是不会矛盾的. 又无論方程組的常数項如何(即 $P(x)$ 的系数)，都是可解的，所以这 n 个方程的系数行列式必异于零，因此解答是唯一的，也就是說，将 $P(x)/Q(x)$ 分解为形狀(1)的表示法是唯一的.

例. 分解

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

命

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

由恆等式

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2)$$

得

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2B+C=0, \\ 2A+B-2C+D=2, \\ -2B+C-2D+E=2, \\ A-2C-2E=13. \end{cases}$$

因此

$$A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

所以

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

§5. M. B. Остроградский 方法

定理（Остроградский）．任一真分式 $P(x)/Q(x)$ 的积分可以写为

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{1}$$

此处 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$，$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 为真分式，$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots$，$Q_2(x)=$ $=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots$，$Q_1Q_2=Q$.

证．当 $k>1$ 时

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx=-\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C. \tag{2}$$

又当 $m>1$，$4q-p^2>0$ 时

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\alpha\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

其中 α，M'，N' 都是常数(见§3末)．

若 $m>2$，则

$$\alpha\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}=\frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}}+\beta\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}},$$

等等．最后得到

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\lambda\int \frac{dx}{x^2+px+q}. \tag{3}$$

由(2)、(3)及(4.1)可知

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

此处 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是由上法，即[(2)与(3)]分离出来的真分式的和，故为真分式．而

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots,$$

$\frac{P_2}{Q_2}$ 是§3型 II 与 IV 的真分式的和，故亦为真分式，且

$$Q_2(x) = (x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots.$$

显然 $Q = Q_1Q_2$，明所欲証.

但如何确定 $P_1(x)$ 与 $P_2(x)$ 的系数呢？微分(1)式得

$$\frac{P}{Q} = \left[\frac{P_1}{Q_1}\right]' + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{Q_1P_1' - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1}{Q},$$

此处

$$H = \frac{Q_1'Q_2}{Q_1}.$$

由恆等式

$$P = P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1$$

可以得出 n 个待定系数的綫性方程組（因恆等双方的次数都为 $n-1$），与 §4 的理由一样，可知这方程組的系数行列式非零，故解答是唯一的，也就是說，表达成(1)的表示法是唯一的.

例. 求

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx.$$

由 $Q_1, Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1$ 及

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2} = \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]' + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1}.$$

得

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8 = (2ax+b)(x^3+x^2+x+1) -$$
$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1) + (dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1).$$

比較系数后有

$$\begin{cases} d = 0, \\ -a+e = 4, \\ -2b+c+f = 4, \\ a-b-3c+e+f = 16, \\ 2a-2c+e+f = 12, \\ b-c+f = 8, \end{cases}$$

所以

$$a = -1,\ b = 1,\ c = -4,\ d = 0,\ e = 3,\ f = 3.$$

因此

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx = -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + 3\int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + 3\operatorname{tg}^{-1}x + C.$$

習題 1. 求 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$.

習題 2. 求 $\displaystyle\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}dx$.

习题 3. 求 $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

习题 4. 求 $\int \frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}\,dx$.

习题 5. 求 $\int \frac{x^6-x^5+x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$.

§6. 某些含有根式的函数的积分

A) 形如 $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ 的积分，此处 $R(x, y)$ 是 x, y 的有理函数，也即它能表成两个以 x, y 为变量的实系数多项式的商，m 为自然数，$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$.

命

$$t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\quad x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m},$$

则积分变为

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt.$$

这是有理函数的积分了。

例 1. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

命 $t=\sqrt{x+1}$，于是

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx=2\int\frac{t+2}{t^3-1}\,dt=\int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\log\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\log\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

例 2. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}$.

由

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1},$$

命

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},\ 则\ x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\quad dx=\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}.$$

因此

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=-3\int\frac{dx}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right|+\sqrt{3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})^2}\right)+\sqrt{3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x-1}}+C.$$

B) 二項式 $x^m(a+bx^n)^p$ 的积分，a, b 是常数，m, n, p 是有理数。

命 $x^n = z$，则得

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q dz,$$

此处

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

再命 $z = \frac{a}{b}w$，就变为形如

$$\int (1+w)^p w^q dw$$

的积分了. 如果 p 是整数，而 q 的分母是 l，命 $w = u^l$，我們的积分就是 u 的有理函数的积分了. 又如果 q 是整数，而 p 的分母是 l，则命 $1 + w = v^l$，也把上式化为 v 的有理函数的积分.

如果 $p+q$ 是整数，而 p 的分母是 l，命

$$\frac{1+w}{w} = t^l,$$

也把上式化为 t 的有理函数的积分.

总結起来，若数 p，$\frac{m+1}{n}$，$\frac{m+1}{n}+p$ 中有一个是整数，则二項式 $x^m(a+bx^n)^p$ 的积分可以化为有理函数的积分. 除此之外的情况，П. Л. Чебышев 已經証明我們无法找出初等函数的表达式来.

例 3. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

由于

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx,$$

在此 $m = -\frac{1}{2}$，$n = \frac{1}{4}$，$p = \frac{1}{3}$. 因为

$$\frac{m+1}{n} = 2$$

是整数，所以可以化为有理函数的积分.

命 $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$，则 $x = (t^3-1)^4$，$dx = 12t^2(t^3-1)^3dt$.

因此

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = 12\int (t^6 - t^3)dt = \frac{3}{7}t^4(4t^3-7) + C$$

$$= \frac{3}{7}(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}(4\sqrt[4]{x}-3) + C.$$

例 4. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$,

在这里，$m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}$. 因为

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0,$$

所以可以化为有理函数的积分.

命 $t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$, 則 $x=(t^4-1)^{-1/4}$, $dx=-t^3(t^4-1)^{-5/4}dt$,

因此

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int \frac{t^2dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

例 5. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$,

在这里 $m=-1, n=5, p=-\frac{1}{3}$. 因为

$$\frac{m+1}{n}=0,$$

所以可以化为有理函数的积分.

命 $t=\sqrt[3]{1+x^5}$, 則 $x=(t^3-1)^{1/5}$, $dx=\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-4/5}dt$. 因此

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\frac{3}{5}\int \frac{t\,dt}{t^3-1}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{10}\log\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{10}\log\left|\frac{(\sqrt[3]{1+x^5}-1)^2}{\sqrt[3]{(1+x^5)^2}+\sqrt[3]{1+x^5}+1}\right|+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

習題 1. 命

$$J_{p,q}=\int(1+z)^pz^qdz,$$

試証

$$J_{p+1,q}=J_{p,q}+J_{p,q+1}$$

$$(1+z)^{p+1}z^{q+1}=(p+1)J_{p,q+1}+(q+1)J_{p+1,q},$$

并以此証明

$$J_{p,q}=-\frac{(1+z)^{p+1}z^{q+1}}{p+1}+\frac{p+q+2}{p+1}J_{p+1,q}\quad(p\neq-1);$$

$$J_{p,q}=\frac{(1+z)^{p+1}z^{q+1}}{q+1}-\frac{p+q+2}{q+1}J_{p,q+1}\ (q\neq-1).$$

習題 2. 命 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 表实数且 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, 試将习題 1 的公式推广到积分

$$J_{p,q}=\int(\alpha+\beta z)^p(\gamma+\delta z)^q dz.$$

習題 3. 命 m 是一整数, 求

$$H_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

§7. 求积分 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

先配平方,得

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

因此我們不妨假定所要討論的情况是 $b=0$.

再换变数

$$x=\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\,y,$$

则

$$\sqrt{ax^2+c}=\begin{cases}\sqrt{c}\sqrt{y^2+1} & 若\ a>0,\ c>0,\\ \sqrt{|c|}\sqrt{y^2-1} & 若\ a>0,\ c<0,\\ \sqrt{c}\sqrt{1-y^2} & 若\ a<0,\ c>0.\end{cases}$$

第四种情况 $a<0$, $c<0$ 在实数范圍内是不存在的.

当 $a>0$, $c>0$, 命

$y=\frac{2t}{1-t^2}$, 则 $\sqrt{1+y^2}=\frac{1+t^2}{1-t^2}$, 因而所求的积分变为 t 的有理函数的积分.

当 $a>0$, $c<0$, 命 $y=\frac{1+t^2}{1-t^2}$, 则得 $\sqrt{y^2-1}=\frac{2t}{1-t^2}$. 也化为求有理函数的积分問題.

又当 $a<0$, $c>0$, 命 $y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, 则 $\sqrt{1-y^2}=\frac{2t}{1+t^2}$. 也化为求有理函数的积分問題.

这三种情况, 我們也可以各以 $y=\operatorname{tg}\theta$, $y=\sec\theta$ 及 $y=\sin\theta$ 代入而化为三角函数的积分.

例 1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

(見 §1).

例 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| ax + \frac{b}{2} + \sqrt{a(ax^2+bx+c)} \right| + C, \text{若 } a > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C, \text{若 } a < 0, \ b^2 - 4ac > 0. \end{cases}$$

先凑平方，再由例 1 可得此二式.

例 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$, $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$, $\int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{3/2}}$

都可以用簡单替換 $x = \frac{1}{t}$ 化为已知的积分.

例 4. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

命 $\sqrt{x^2-x+1} = t - x$, 則 $x = \frac{t^2-1}{2t-1}$, $dx = 2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt$. 因此

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2} dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t-1} + 2\log|t| -$$

$$-\frac{3}{2}\log|2t-1| + C = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1} +$$

$$+ 2\log\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| - \frac{3}{2}\log\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right| + C.$$

習題 1. 命 $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ 及

$$V_m = \int \frac{x^m dx}{y} \quad m = 0, 1, 2, \cdots,$$

試証

$$x^{m-1}y = maV_m + \left(m - \frac{1}{2}\right)bV_{m-1} + (m-1)cV_{m-2},$$

并由此証明

$$V_m = p_{m-1}(x)y + \lambda_m V_0,$$

此处 $p_{m-1}(x)$ 是 x 的 $m-1$ 次多項式，λ_m 是常数.

这习題建議了以下的求积分方法：命 $P(x)$ 表 n 次多項式 $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, 由上式可知

$$\int \frac{P(x)}{y} dx = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu V_\nu = Q(x)y + \lambda V_0,$$

此处 $Q(x)$ 是一个 $n-1$ 次多項式，λ 是常数.

微分此式立得

$$P(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax+b) + \lambda.$$

我們可以用比較系数法来求出 $Q(x)$ 及 λ.

習題 2. 試用此法証明

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}$$
$$+ \frac{5}{2}\log(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + C.$$

習題 3. 在积分

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (m \geqslant 1)$$

中换变数 $x - a = \frac{1}{t}$, 使它化为习题 1 的形式.

習題 4. 証明

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 - 2x - 1}} = \frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{x-1} + C.$$

§8. Abel 积分

考慮形如

$$\int R(x, y) dx \tag{1}$$

的积分,其中 $R(x, y)$ 是 x, y 的有理函数,而 x 与 y 之間滿足代数方程:

$$P(x, y) = 0. \tag{2}$$

这样的积分称为 Abel 积分,我們已經研究过的就有

$$(\gamma x + \delta) y^m - (\alpha x + \beta) = 0$$

及

$$y^2 - (ax^2 + bx + c) = 0.$$

二特例,积分(1)能否表为已知函数,主要是以曲綫(2)的性質为轉移. 除掉十分特殊的情况以外,(1)是不能用本书以往所說的函数表出来的.

如果曲綫(2)有参变数的有理函数表达法

$$x = r_1(t), \quad y = r_2(t), \tag{3}$$

則

$$\int R(x, y) dx = \int R(r_1(t), r_2(t)) r_1'(t) dt$$

就是 t 的有理函数的积分.

有理式(3)表达的曲綫是一种十分特殊的曲綫,称为有理曲綫. 本书中不能說明有理曲綫的条件,但仅准备指出

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

都不是有理曲綫(如果右边沒有重因子),但任意一条二次曲綫,都是有理的,即

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 2f = 0$$

一定能够表成某一参变数的有理函数.

如果曲綫上有一点 (x_0, y_0)，即

$$ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + 2f = 0.$$

換变数 $x' = x - x_0, y' = y - y_0$，就可把 x_0, y_0 变为原点，即不失普遍性，我們可以假定 $f = 0$. 命

$$y = tx,$$

則得

$$x^2(a + 2bt + ct^2) + (2d + 2et)x = 0,$$

即我們有参变数表达法

$$x = -\frac{2d + 2et}{a + 2bt + ct^2}, \quad y = tx.$$

例 1. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 是有理曲綫.

命 $y = tx$，則得参变数表示法

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

例 2. 双紐綫

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

有参变数表示法

$$x = \frac{a^2t(t^2 + a^2)}{t^4 + a^4}, \quad y = \frac{a^2t(t^2 - a^2)}{t^4 + a^4}.$$

例 3. 求积分

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta.$$

这一积分也是 Abel 积分的一个特例，就是

$$\int R(x, y)x^{-1}dy,$$

此处

$$x^2 + y^2 = 1.$$

由参变数表示法

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2},$$

我們立刻就把所要求的积分变为有理函数的积分. 这种换变数的方法，也就是命

$$t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$$

的方法，因为

$$\sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

例 4. 求

$$T_1=\int\frac{\sin x dx}{a\cos x+b\sin x},\ T_2=\int\frac{\cos x dx}{a\cos x+b\sin x}.$$

我們可以用代換 $t=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ 分别求 T_1 与 T_2，但还有更簡单的方法.

$$bT_1+aT_2=\int dx=x+C_1,$$

$$-aT_1+bT_2=\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx=\int\frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}=$$

$$=\log|a\cos x+b\sin x|+C_2,$$

由此立刻得到

$$T_1=\frac{1}{a^2+b^2}[bx-a\log|a\cos x+b\sin x|]+C,$$

$$T_2=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\log|a\cos x+b\sin x|]+C'.$$

例 5. 求

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x},$$

其中 $|a|>\sqrt{b^2+c^2}$ 或 $|a|<\sqrt{b^2+c^2}$.

命 $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},\ \sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$，則

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}=\int\frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}.$$

若 $|a|>\sqrt{b^2+c^2}$，則先命 $x-\alpha=t$，然后命 $\operatorname{tg}\frac{t}{2}=z$，則

$$\int\frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)}=\int\frac{dt}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos t}=$$

$$=\int\frac{2dz}{(a+\sqrt{b^2+c^2})\left(1+\frac{a-\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{b^2+c^2}}z^2\right)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\int\frac{d\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{b^2+c^2}}}z\right)}{1+\frac{a-\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{b^2+c^2}}z^2}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{a-\sqrt{b^2+c^2}}}{\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}+C.$$

若 $|a|<\sqrt{b^2+c^2}$，作同样变换可知

$$\int \frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)} = 2\int \frac{dz}{(\sqrt{b^2+c^2}+a)-(\sqrt{b^2+c^2}-a)z^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}} \log \left| \frac{\sqrt{\sqrt{b^2+c^2}+a} + \sqrt{\sqrt{b^2+c^2}-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{x-\alpha}{2}}{\sqrt{\sqrt{b^2+c^2}+a} - \sqrt{\sqrt{b^2+c^2}-a}\,\mathrm{tg}\,\frac{x-\alpha}{2}} \right| + C.$$

習題 1. 求积分

$$\int y dx,$$

其中 y 的定义如例 1.

習題 2. 求积分

$$\int \frac{dx}{y},$$

此处 y 的定义如例 2.

習題 3. 命

$$I_{\nu,\mu} = \int \sin^\nu x \cos^\mu x dx.$$

試証明

$$I_{\nu,\mu} = -\frac{\sin^{\nu+1}x\cos^{\mu+1}x}{\mu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\mu+1} I_{\nu,\mu+2} (\mu \neq -1),$$

$$I_{\nu,\mu} = \frac{\sin^{\nu+1}x\cos^{\mu+1}x}{\nu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\nu+1} I_{\nu+2,\mu} (\nu \neq -1),$$

$$I_{\nu,\mu} = \frac{\sin^{\nu+1}x\cos^{\mu-1}x}{\nu+\mu} + \frac{\mu-1}{\nu+\mu} I_{\nu,\mu-2} (\nu+\mu \neq 0),$$

$$I_{\nu,\mu} = -\frac{\sin^{\nu-1}x\cos^{\mu+1}x}{\nu+\mu} + \frac{\nu-1}{\nu+\mu} I_{\nu-2,\mu} (\nu+\mu \neq 0).$$

習題 4. 用习題 3 求

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x}, \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

習題 5. 求积分

$$\int \frac{1-r\cos x}{1-r\cos x+r^2} dx.$$

§9. 一些不能用已知函数表达的积分

和微分学不同，要求出一个函数的原函数是比較困难的. 不但困难，有时还不可能用有限步驟来表示我們已經知道的一些函数.

最常遇到的有以下一些：

$$\int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{dx}{\log x},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+k\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

如果遇到这样的积分，不要枉費心机地去寻找用我們現在所知道的函数来表达他們，但是这并不是說，我們不能用无穷形式来表达。

例如，我們常有

$$\int e^{-x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

又如

$$\int \sin x^2 dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)} + C,$$

等等。

§10. 微分方程．分离变量法

已往我們所研究的問題，实际上就是求 x 的函数 y，使

$$y' = f(x).$$

更一般的問題就是求 x 的函数 y，使

$$F(x, y, y') = 0,$$

这称为一級微分方程．如果可以解出 y'，則得

$$y' = f(x, y),$$

其中 $f(x, y)$ 是 x 与 y 的已知函数。

我們現在介紹几个簡单情况。

如果

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)},$$

則微分方程可以写成为

$$\psi(y)dy = \varphi(x)dx,$$

因而得出

$$\int \psi(y)dy = \int \varphi(x)dx + C.$$

例 1. 假定某物質原来的質量是 a，在时刻 t 到 $t + dt$ 这时間內起反应的物質的量 dx 可以算作与 dt 及在时刻 t 尚未起反应的物質量的积成正比例：

$$dx = c(a - x)dt,$$

即

$$\frac{dx}{a - x} = c\,dt,$$

因而得出

$$-\log(a-x)=ct+C_1,$$

即

$$a-x=e^{-ct-C_1}=Ce^{-ct},\quad C=e^{-C_1}.$$

如果 $t=0$ 就是开始起反应的时刻，即当 $t=0$ 时，$x=0$，則得出

$$a=C,$$

所以我們的公式就是

$$x=a(1-e^{-ct}).$$

例 2. 設一种溶液中有两种物質，在反应开始时，两种物質的量，各用克分子 a、b 来表达。再設在时刻 t 时，两种物質已起反应的量相等，記之为 x，于是剩余的量各是 $a-x$，$b-x$。如果反应速率与这些剩余的量的乘积成正比，即

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x),$$

这种化学反应称为二級反应。方程可以改写为

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=kdt,$$

即

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\int kdt+C_1.$$

如果 $b>a$，則得

$$\frac{1}{b-a}\log\frac{b-x}{a-x}=kt+C_1,$$

$$\frac{b-x}{a-x}=Ce^{(b-a)kt},\ C=e^{(b-a)C_1}.$$

又如果取刚起反应的时刻是 $t=0$，則 $x=0$，因而得 $C=b/a$，即

$$\frac{b-x}{a-x}=\frac{b}{a}e^{(b-a)kt}.$$

讀者試自己研究 $b=a$ 的情况。

例 3. 設一桶中盛水，在距水面 h 的地方、水从一个直径为 1 吋（1 呎 = 12 吋）的小孔射出。若无摩擦等原因，則水从孔中流出的速度，等于自由落体下落 h 距离所产生的速度，即 $\sqrt{2gh}$，但实际速度要小一些，約为

$$v=0.6\sqrt{2gh}=4.8\sqrt{h}\ \text{呎/秒},$$

故在 dt 时間內流出的水量是 vdt 乘孔的面积，即

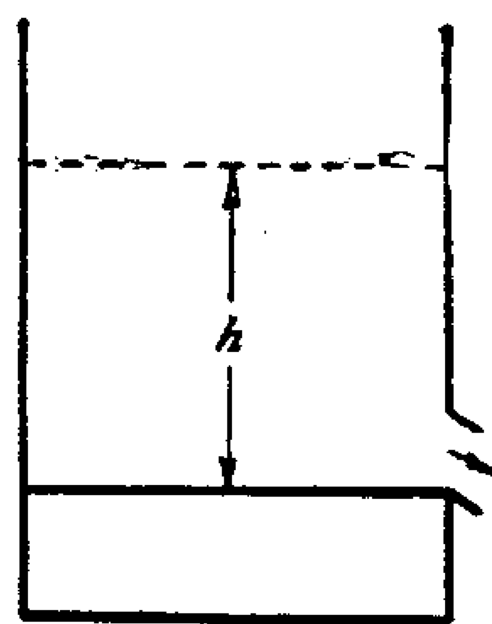


图 165

$$\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2 vdt.$$

設这个桶的横截面为16平方呎，高为 6 呎，又設在dt时間內失去的高度为 dh，故有

$$-16dh=\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2 vdt=\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2 4.8\sqrt{h}\,dt.$$

分离变数得

$$dt = -611\frac{dh}{\sqrt{h}},\ t = -1222\sqrt{h} + C.$$

当 $t=0$ 时，$h=6$，故

$$C = 1222\sqrt{6}.$$

故当 $h=0$ 时

$$t = 1222\sqrt{6}\text{秒}=49.9\text{ 分鈡}.$$

因而約 50 分鈡流完.

§11. 换 变 数 法

有些方程虽然不是 §10 的形式，但經过变换之后就变为 §10 的形式.

齐次方程. 解方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

由 $y = xu$ 引进新变量，則

$$y' = u + xu',$$

由此得

$$u + xu' = f(u),$$

因而得出

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - f(u)} = 0.$$

由此可解得

$$\log x + \int\frac{du}{u - f(u)} = C_1,$$

从而

$$x = Ce^{-\int\psi_1(u)du},$$

此处

$$C = e^{C_1},\ \psi_1(u) = \frac{1}{u - f(u)}.$$

代回原来的 y，則得

$$x = C\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式.

例 1. 求曲綫，使 x 軸上点与这曲綫的切綫距离，等于这点到原点的距离.

切綫的方程是

$$Y - y = y'(X - x),$$

此处 (X, Y) 是切綫上的动点的坐标，这切綫与 X 軸的交点是

$$\left(x - \frac{y}{y'},\ 0\right);$$

另一方面，切点与这交点的距离的平方是

$$\left(x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right)^2+(y-0)^2=\frac{y^2}{y'^2}+y^2.$$

由条件可知

$$\frac{y^2}{y'^2}+y^2=\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2,$$

即得

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

这就是齐次方程.

命 $y=xu$，則得

$$\frac{dx}{x}-\frac{1-u^2}{u+u^3}du=0,$$

即

$$\frac{dx}{x}-\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{u^2+1}\right)du=0,$$

所以

$$\log x-\log u+\log(u^2+1)=\log C,$$

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C.$$

代回原来的变量得

$$x^2+y^2-Cy=0,$$

这是在原点与 x 軸相切的圓.

在变化方程时，我們曾經以 $(u+u^3)$ 除等式两边，这可能失去一个解 $u=0$，也就是 $y=0$，代进原方程中这确是一个解，但这个解可以說是对应于 $C=\infty$ 的解.

以下我們介紹一些可变为齐次方程的例子，例如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

若直綫 $ax+by+c=0$ 与 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 有公共交点 (α,β)，則由代换

$$x=\xi+\alpha,\ \ y=\eta+\beta$$

得

$$\frac{d\xi}{d\eta}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right),$$

此为 (ξ,η) 的齐次方程.

若直綫 $ax+by+c=0$ 与 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 平行而不重合，此时 $a_1x+b_1y+c_1\equiv k(ax+by+c_2)(c_2\neq c_1)$. 由代换 $ax+by=z$ 得

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{z+c}{k(z+c_2)}\right),$$

a 与 b 中至少有一个非零. 不妨假定 $b\neq 0$，則

$$y=\frac{1}{b}(z-ax),$$

故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right).$$

因此

$$\frac{dz}{dx}=bf\left(\frac{z+c}{k(z+c_2)}\right)+a.$$

所以可以由分离变数求解.

若直綫 $ax+by+c=0$ 与 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 重合,则方程化为簡单形状:

$$\frac{dy}{dx}=f(k).$$

§ 12. 积分因子法

微分方程

$$d(f(x,y))=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

显然有一解

$$f(x,y)=C. \tag{1}$$

如果一个微分方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{2}$$

其中 $M(x,y)$ 及 $N(x,y)$ 恰好是一个函数 $f(x,y)$ 对 x 及 y 的偏微分,则这个方程显然有解(1). 称这种方程为全微分方程(或恰当方程).

显然可分离变数的微分方程都是全微分方程.

定理 1. 若 $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ 存在且連續,则方程(2)为全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

証. 1) 若方程是全微分方程,则有 $F(x,y)$ 使 $dF(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$; 另一方面,

$$dF(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy,$$

故

$$M(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x},\ N(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

2) 若 $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$, 命

$$F_1(x,y)=\int M(x,y)dx,$$

则

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} = M(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x, y) - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}\right) = 0.$$

因此 $N - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ 仅为 y 的函数,命之为 $\varphi(y)$, 即

$$N(x, y) - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = \varphi(y).$$

取

$$F(x, y) = F_1(x, y) + \int \varphi(y) dy,$$

则

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} + \varphi(y) = N(x, y),$$

而

$$M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(F_1(x, y) + \int \varphi(y) dy\right) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,y).$$

因此

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

故方程(2)为全微分方程.

例 1. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$

由于

$$\frac{\partial(3x^2 + 6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2y + 4y^3)}{\partial x} = 12xy,$$

故为全微分方程. 用定理 1 的記号

$$F_1(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2,$$

$$\varphi(y) = 6x^2y + 4y^3 - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4y^3,$$

$$\int \varphi(y) dy = y^4,$$

故解答为 $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$

例 2. $(\sec x \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - e^x)dx + (\sec x \sec^2 y)dy = 0.$

由于

$$\frac{\partial(\sec x \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - e^x)}{\partial y} = \frac{\partial \sec x \sec^2 y}{\partial x} = \sec x \operatorname{tg} x \sec^2 y,$$

故为全微分方程. 其解答为

$$\sec x \operatorname{tg} y - e^x = C.$$

有时，方程(1)不是全微分方程，如果有这样的函数 $\mu(x, y)$ 使

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mu(x, y)M(x, y),\ \frac{\partial f}{\partial y}=\mu(x, y)N(x, y),$$

则方程(2)也有(1)为其解．这样的函数 $\mu(x, y)$ 称为积分因子．

如果(2)有解，则显然有积分因子．从理論上說，如果方程(2)是可以由初等函数解出的，我們一定可以找到一个合适的积分因子，来用积分因子法解出它．但实际上，求积分因子并不容易．

由定理 1 及积分因子的定义可知

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

或

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{3}$$

以 μ 除之得

$$N\frac{\partial \log \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \log \mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

故积分因子满足(3)或(4)．

解(3)或(4)并不容易（虽然我們只要求出一个特解即可）．但特别当 $\frac{\partial \mu}{\partial y}=0$ 时，则

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{5}$$

由此可知，(5)式右端仅为 x 的函数是存在仅依賴于 x 的积分因子的充要条件．倘(5)式右端为仅依賴于 x 的函数，则

$$\log \mu=\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx. \tag{6}$$

例 3. $\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)dy=0.$

由于

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1,$$

因此

$$\frac{d\log \mu}{dx}=1,$$

$$\mu=e^x$$

方程

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+e^x(x^2+y^2)dy=0$$

是全微分方程，其解为

$$ye^{x}\left(x^{2}+\frac{y^{2}}{3}\right)=C.$$

如果方程(2)有积分因子 $\mu(x, y)$，其通解是 $f(x, y)=C$，则 $\mu(x, y)\varphi(f(x, y))$ 显然都是积分因子．在实际求解时，有时将微分方程分成两組，每一組都很容易求出积分因子，然后写各积分因子的普遍形式．最后求出一个共同的积分因子来．

例 4. $(x-y^{2})dx+2xydy=0.$

把方程分成两組

$$(xdx)+(-y^{2}dx+2xydy)=0.$$

第一个括弧的积分因子是 $\mu_{1}=\varphi(x)$，第二个括弧有积分因子 $\frac{1}{xy^{2}}$，其通解为

$$\frac{y^{2}}{x}=C.$$

故其积分因子的一般表达式为

$$\mu_{2}=\frac{1}{xy^{2}}\psi\left(\frac{y^{2}}{x}\right).$$

现在只要选取 ψ，使 μ_{2} 仅为 x 的函数即可．因此取 $\psi(t)=t$，故得原来方程的积分因子

$$\mu=\frac{1}{x^{2}}.$$

方程

$$\frac{dx}{x}+\frac{2xydy-y^{2}dx}{x^{2}}=0$$

为全微分方程，其解为

$$\log x+\frac{y^{2}}{x}=C.$$

例 5. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{x^{2}}+\frac{2y}{x}-y^{2}.$

命 $y=\frac{c}{x}$，则

$$-\frac{c}{x^{2}}=-\frac{2}{x^{2}}+\frac{2c}{x^{2}}-\frac{c^{2}}{x^{2}}$$

或

$$c^{2}-3c+2=0.$$

由此得出 $c=1$ 是一个解，因此原方程有一个特解

$$y_{1}=\frac{1}{x}.$$

用变换

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{W}$$

代入方程后得

$$\frac{dW}{dx} = 1,$$

故

$$W = x + C.$$

因此方程的解为

$$yx(x + C) = 2x + C.$$

§13. 一阶綫性方程

形状为

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = a(x) \tag{1}$$

的微分方程,称之为 n 阶綫性方程.

我們現在来解一阶綫性方程

$$y' + P(x)y + Q(x) = 0. \tag{2}$$

先研究方程

$$y' + P(x)y = 0, \tag{3}$$

这是一个可分离变量的方程

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0,$$

积分得

$$\log y + \int P(x)dx = \log C,$$

即得

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

从这个解答,我們可以知道方程(3)有一个积分因子

$$e^{\int P(x)dx},$$

即

$$e^{\int P(x)dx}(dy + P(x)ydx) = 0$$

及

$$d(e^{\int P(x)dx}y) = 0.$$

把这积分因子乘(2)可知

$$e^{\int P(x)dx}(dy + P(x)ydx + Q(x)ax) = 0,$$

$$d(e^{\int P(x)dx}y) + e^{\int P(x)dx}Q(x)dx = 0,$$

即得

$$e^{\int P(x)dx}y + \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx = C,$$

即

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(-\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right). \tag{4}$$

注意. 在求积分

$$\int P(x)dx$$

时，我們不一定要添上积分常数，因为由

$$y = e^{-\left(\int P(x)dx+C_1\right)}\left(-\int e^{\int P(x)dx+C_1}Q(x)dx + C\right) =$$

$$= e^{-\int P(x)dx}\left(-\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + e^{-C_1}C\right)$$

可以看出，添 C_1 是不必要的。

例 1. 設 i 为电流強度，R 为电路的电阻，L 为自感系数，v 为电压，且 R, L, v 是常数，求有自感的电路中，变动电流的暂态过程。

我們有关系式

$$v = Ri + L\frac{di}{dt},$$

即

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i - \frac{v}{L} = 0.$$

用公式(4)，由

$$\int P\,dt = \int \frac{R}{L}\,dt = \frac{R}{L}t + C_1$$

及

$$\int Qe^{\int P dt}dt = -\frac{v}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\,dt = -\frac{v}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C_2$$

得到

$$i = e^{-\frac{R}{L}t}\left(C + \frac{v}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right).$$

如果当 $t = 0$ 时，$i = i_0$，則得 $C = i_0 - \frac{v}{R}$，所以

$$i = \left(i_0 - \frac{v}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{v}{R}.$$

因为 t 增加时，$e^{-\frac{R}{L}t}$ 很快趋于零，所以电流強度可以由 Elm 定律 $i = \frac{v}{R}$ 来計算。

当 $v = 0$ 时，就得到断开电路时，电流消失的公式

$$i = i_0e^{-\frac{R}{L}t},$$

其中 $\frac{L}{R}$ 称为电路的时間常数。

例 2. 考虑电压是正弦函数的情形，即 $v = A\sin\omega t$. 用与上例相同的方法，得到

$$i = e^{-Rt/L}\left(C + \frac{A}{L}\int e^{Rt/L}\sin\omega t\,dt\right)$$

$$= e^{-Rt/L}\left[C + \frac{A}{L}e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2 + R^2}\sin\omega t - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2 + R^2}\cos\omega t\right)\right].$$

假定开始时的电流強度等于 i_0，即当 $t = 0$ 时 $i = i_0$，則得

$$i_0 = C - \frac{A}{L}\frac{\omega L^2}{\omega^2 L^2 + R^2}.$$

因此得出公式

$$i = \left(i_0 + \frac{\omega L A}{\omega^2 L^2 + R^2}\right) e^{-Rt/L} + \frac{RA}{\omega^2 L^2 + R^2}\sin\omega t - \frac{\omega L A}{\omega^2 L^2 + R^2}\cos\omega t =$$

$$= \left(i_0 + \frac{\omega L A}{\omega^2 L^2 + R^2}\right) e^{-Rt/L} + A\sin(\omega t - \theta),$$

此处 $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega L}{R}$.

当 t 較大时，$e^{-\frac{R}{L}t}$ 很快趋近于零，所以电流强度亦由一个正弦量来表示，且频率与 v 相同.

例 3. 当电路断开时，有火花发生，这时电阻 R 不能看作常量，对断路的一刹那間 τ 来說，电阻由 R_0 增加到 $+\infty$. 这时我們可以設 R 依賴于时間 t 的关系是

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{t}{\tau}} = \frac{R_0\tau}{\tau - t}.$$

因此得到微分方程

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_0\tau}{L(\tau - t)}i - \frac{v}{L} = 0.$$

命

$$t = \tau x,$$

则

$$\frac{di}{dx} + \frac{R_0\tau}{L(1 - x)}i - \frac{v\tau}{L} = 0.$$

用公式(4)，由于

$$\int P\,dx = \int \frac{R_0\tau}{L(1 - x)}\,dx = -\frac{R_0\tau}{L}\log(1 - x) + C_1,$$

故得

$$i = (1 - x)^{\frac{R_0\tau}{L}}\left[\frac{v\tau}{L}\int (1 - x)^{-\frac{R_0\tau}{L}}\,dx + C\right].$$

当 $\frac{L}{R_0} \neq \tau$ 时

$$i = \frac{v\tau}{R_0\tau - L}(1 - x) + C(1 - x)^{\frac{R_0\tau}{L}}.$$

当 $x = 0$ 时，$i = i_0$, 故

$$C = i_0 - \frac{v\tau}{R_0\tau - L}.$$

故得

$$i = \frac{v\tau}{R_0\tau - L}(1 - x) + \left(i_0 - \frac{v\tau}{R_0\tau - L}\right)(1 - x)^{\frac{R_0\tau}{L}}.$$

同样的方法可以求出当 $\frac{L}{R_0}=\tau$ 时

$$i=(1-x)\left[i_0-\frac{v\tau}{L}\log(1-x)\right].$$

現在介紹可以化为一阶綫性方程的 Bernoulli 方程:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad n\neq 0,1. \tag{5}$$

用 y^n 除之,得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x).$$

命

$$z=y^{-n+1},$$

則得

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)P(x)z=(-n+1)Q(x).$$

这样一来,就化为綫性方程了

例 4. $\frac{dy}{dx}-xy=-e^{-x^2}y^3.$

命

$$u=y^{-2},$$

則得

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}+xu=e^{-x^2}.$$

此为綫性方程,解之得

$$u=e^{-x^2}(2x+c).$$

将 u 換为 y^{-2}, 即得原方程的解.

例 5. $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}.$

命 $z=\sqrt{y}$, 則得

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=\frac{x}{2},$$

故得

$$z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left(\int e^{-\int\frac{2}{x}dx}\frac{x}{2}dx+C\right)=x^2\left(\frac{1}{2}\log x+C\right).$$

将 z 換为 $\sqrt{y}$,即得原方程的解.

下面我們介紹 Riccati 方程:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2. \tag{6}$$

这类方程一般不能用求积法以求出它的解,但如果知道它的任何一个特解,就可以把它化

为 Bernoulli 方程.

若 $y_1(x)$ 是(6)的特解,作变换

$$y(x) = y_1(x) + Z(x),$$

则得

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dZ}{dx} = P + Q(y_1 + Z) + R(y_1 + Z)^2$$
$$= P + Qy_1 + Ry_1^2 + QZ + 2y_1ZR + RZ^2,$$
$$\frac{dZ}{dx} = (Q + 2y_1R)Z + RZ^2.$$

此为 Bernoulli 方程.

再用代换 $Z = \frac{1}{w}$, 即化为 w 的一阶綫性方程.

§14. 二阶綫性方程

解二阶綫性方程:

$$u(x)y'' + v(x)y' + w(x)y = 0. \tag{1}$$

比起解一阶綫性方程来要难得多. 在应用数学中不少特殊函数都是某一二阶綫性微分方程的解,例如

$$x(1-x)y'' + (c - (a+b+1)x)y' - aby = 0 \text{ (超越几何函数)},$$

$$y'' + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0 \quad \text{(Weber 函数)},$$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \text{ (Bessel 函数)},$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \text{ (Legendre 函数)},$$

$$y'' + (a + (6q\cos 2x))y = 0 \quad \text{(Mathieu 函数)},$$

$$y'' + \left(\sum_{r=1}^{3} \frac{\frac{1}{2}}{x - a_r}\right)y' - \frac{n(n+1)x + h}{4\prod_{r=1}^{3}(x - a_r)}y = 0 \text{ (Lamé 函数)}.$$

这些函数性质的討論都成为专門著作,本书将择要介紹一、二. 因此,幷无希望可以有一个象解一阶綫性方程那样的办法. 本章中仅举些最簡单的与二級方程有关的結果.

1) 如果微分算子

$$u(x)\frac{d^2}{dx^2} + v(x)\frac{d}{dx} + w(x)$$

刚好可以分解为

$$\left(p\frac{d}{dx} + q\right)\left(r\frac{d}{dx} + s\right), \tag{2}$$

即

$$\left(p\frac{d}{dx}+q\right)\left(r\frac{d}{dx}+s\right)y=\left(p\frac{d}{dx}+q\right)\left(r\frac{dy}{dx}+sy\right)=$$

$$=pr\frac{d^2y}{dx^2}+\left(qr+ps+p\frac{dr}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\left(p\frac{ds}{dx}+qs\right)y,$$

亦即

$$pr=u,\ qr+ps+p\frac{dr}{dx}=v,\ p\frac{ds}{dx}+qs=w. \tag{3}$$

在这样的情况下，解方程(1)就等于解两个一阶方程：

$$p\frac{dz}{dx}+qz=0,\ r\frac{dy}{dx}+sy=z. \tag{4}$$

前一式的解是

$$z=Ae^{-\int q/p\,dx},$$

因而求解

$$r\frac{dy}{dx}+sy=Ae^{-\int q/p\,dx},$$

这是一个一阶方程了。

例 1. 解

$$(x^2+x-2)y''+(x^2-x)y'-(6x^2+7x)y=0.$$

由

$$pr=x^2+x-2$$

可假定

$$p=x+2,\quad r=x-1.$$

如果

$$q=Ex+F,\quad s=E'x+F',$$

则得

$$\left.\begin{array}{l}E+E'=1\\ -E+F+2E'+F'=-2\\ F-2F'=2\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}EE'=-6\\ E'F+EF'+E'=-7\\ FF'+2F'=0,\end{array}\right\},$$

求出 $E=3,\ E'=-2;\ F=4,\ F'=1$. 因此原方程是

$$\left((x+2)\frac{d}{dx}+3x+4\right)\left((x-1)\frac{d}{dx}-(2x-1)\right)y=0.$$

方程

$$(x+2)\frac{dz}{dx}+(3x+4)z=0$$

的解是 $A(x+2)^2e^{-3x}$，而

$$(x-1)\frac{dy}{dx}-(2x-1)y=A(x+2)^2e^{-3x}$$

的解是

$$y=(x-1)e^{2x}\left\{B+A\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2e^{-5x}dx\right\}.$$

附記． 1) 可以换变数把(1)中的 $v(x)$ 消去．命 $y=p'z$，则

$$u(x)(p''z+2p'z'+pz'')+v(x)(p'z+pz')+w(x)pz=0.$$

如能取 p 使

$$2p'u + vp = 0,$$

则 z' 的系数等于 0. 这方程的解是

$$p = e^{-\frac{1}{2}\int v/u dx}.$$

即得所求.

2) 方程組(3)似乎不难解,实则大不然! 先由第一式定 p, r, 再由

$$rq + ps = v - p\frac{dr}{dx}$$

$$p\frac{ds}{dx} + qs = w$$

解出 q, s 来. 由前式

$$q = \frac{1}{r}\left(v - p\frac{dr}{dx} - ps\right),$$

代入后式得

$$p\frac{ds}{dx} + \frac{1}{r}\left(v - p\frac{dr}{dx} - ps\right)s = w.$$

这是一个 s 的 Riccati 方程,并不簡单. 虽无所得,但建立起一个二阶方程与 Riccati 方程的关系.

3) 綫性方程的解也有綫性性质,即如果 y_1, y_2 是解,则 $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ 也是解. 二阶方程的解有两个任意常数,因此二阶綫性方程有两个解 y_1, y_2, 使其他的解一定可以表成为 $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. 如果 y_1^*, y_2^* 是另两个有这样性質的解,则有常数 α, β, γ, δ 使

$$y_1^* = \alpha y_1 + \beta y_2,\quad y_2^* = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

而 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. 命 $y_1/y_2 = s$, $y_1^*/y_2^* = s^*$ 则

$$\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = \frac{s^{*'''}}{s^{*'}} - \frac{3}{2}\left(\frac{s^{*''}}{s^{*'}}\right)^2.$$

这不变量称为 Schwarzian.

習題. 解

(i) $axy'' + (3a + bx)y' + 3by = 0.$

(ii) $(x - 1)(x - 2)y'' - (2x - 3)y' + 2y = 0.$

(iii) $(2x - 1)y'' - (3x - 4)y' + (x - 3)y = 0.$

(iv) $(x^2 + 3x + 2)y'' + \left(5x^2 + \frac{21}{2}x + 4\right)y' + \left(6x^2 + \frac{17}{2}x + 4\right)y = 0.$

(v) $(x^2 - 1)y'' - (3x + 1)y' - (x^2 - x)y = 0.$

(vi) $x^2(a - bx)y'' - 2x(2a - bx)y' + 2(3a - bx)y = 6a^2.$

§15. 常系数綫性方程

从上节中求解方程組(14.3)来解二阶微分方程虽然没有多大价值,但对处理常系数方程还是十分有用的,即如果 u, v, w 是常数时,我們假定 p, q, r, s 是常数,则

$$pr = u,\quad qr + ps = v,\quad qs = w.$$

并且不失去普遍性，我們假定 $u=1$，并設 $p=r=1$，于是問題变为求

$$q+s=v,\ qs=w$$

的解，卽 q，s 是方程

$$\lambda^2-v\lambda+w=0$$

的解，命 λ_1，λ_2 是其二解，則

$$\frac{d^2y}{dx^2}+v\frac{dy}{dx}+wy=\left(\frac{d}{dx}-\lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\lambda_2\right)y$$

我們現在分三种情况来討論：(i)二实根，(ii)重根，(iii)二虛根。

例 1. 命 λ_1 与 λ_2 是二不相等的实数，解

$$\frac{d^2y}{dx^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{dy}{dx}+\lambda_1\lambda_2y=f(x).$$

由

$$\frac{dz}{dx}-\lambda_1z=f(x)$$

解得

$$z=e^{\lambda_1x}\left(\int^x e^{-\lambda_1t}f(t)dt+c_1\right),$$

再由

$$\frac{dy}{dx}-\lambda_2y=e^{\lambda_1x}\left(\int^x e^{-\lambda_1t}f(t)dt+c_1\right)$$

解得

$$y=e^{\lambda_2x}\left(\int^x e^{(\lambda_1-\lambda_2)u}du\int^u e^{-\lambda_1t}f(t)dt+c_1\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1-\lambda_2}+c_2\right).$$

$$=\frac{e^{\lambda_1x}\int^x e^{-\lambda_1t}f(t)dt-e^{\lambda_2x}\int^x e^{-\lambda_2t}f(t)dt}{\lambda_1-\lambda_2}+ae^{\lambda_1x}+be^{\lambda_2x}.$$

例 2. 解

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\lambda\frac{dy}{dx}+\lambda^2y=f(x).$$

同法得

$$\frac{dy}{dx}-\lambda y=e^{\lambda x}\left(\int^x e^{-\lambda t}f(t)dt+c_1\right),$$

卽得

$$\frac{d}{dx}(e^{-\lambda x}y)=\int^x e^{-\lambda t}f(t)dt+c_1,$$

$$y=e^{\lambda x}\int^x(x-t)e^{-\lambda t}f(t)dt+c_1xe^{-\lambda x}+c_2e^{-\lambda x}.$$

例 3. 假定 $p^2-q<0$，求解

$$y''+2py'+qy=f(x).$$

仍用例 1 来推导，其中

$$\lambda_1=-p+\sqrt{p^2-q},\quad \lambda_2=-p-\sqrt{p^2-q}.$$

命 $\lambda_1-\lambda_2=2\sqrt{p^2-q}=i\Delta$，而

$$\Im\int^x e^{\lambda_1(x-t)}f(t)dt=\int^x e^{-p(x-t)}\sin\Delta(x-t)f(t)dt,$$

因此例 3 的解答是

$$y = \int^x e^{-p(x-t)} \sin \Delta(x-t) f(t) dt + c_1 e^{-px} \cos \Delta x + c_2 e^{-px} \sin \Delta x.$$

現在我們会解一切的常系数綫性方程了. 命

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \tag{1}$$

把方程

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

左端的多項式分解为

$$(\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_r)(\lambda^2 - p_1 \lambda + q_1) \cdots = 0,$$

此处 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, p_1, q_1 \cdots$ 为实数. 解方程(1)的問題一变而为解方程

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_r\right) \left(\frac{d^2}{dx^2} - p_1 \frac{d}{dx} + q_1\right) \cdots y = f(x)$$

的問題,也就变为陆續解出

$$\frac{dy_1}{dx} - \alpha_1 y_1 = f(x),$$

$$\frac{dy_2}{dx} - \alpha_2 y_2 = y_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_r}{dx} - \alpha_r y_r = y_{r-1},$$

$$\frac{d^2 y_{r+1}}{dx^2} - p_1 \frac{dy_{r+1}}{dx} + q_1 y_{r+1} = y_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

的問題了. 而每一步都是我們所确知的.

習題 1. 解出

(i) $y''' - by'' + ay' - by = \sin x,$

(ii) $y''' + 2y'' + y = x^2 \cos ax,$

(iii) $\dfrac{d^6 y}{dx^6} + y = \sin \dfrac{3}{2} x \sin \dfrac{1}{2} x.$

習題 2. 方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + by = c e^{px} \sin(qx + \alpha)$$

(此处 a, b, c, p, q, α 是常数)在动力学上是很重要的,試分各种情况来分析其解答.

習題 3. 試解

$$x \frac{dy}{dx} + \lambda y = f(x)$$

及

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = g(x).$$

看能不能推广!

第十章　定 积 分

§1. 求 面 积

假定 $c<a<b$，求在 $x=a$，$x=b$ 之間，x 軸与曲綫

$$y=f(x) \tag{c}$$

之間的面积. 为方便起見，我們暫时假定曲綫(C)在 x 軸的上方.

命 $F(x)$ 表 c，x 之間及 x 軸与曲綫(C)之間的面积，

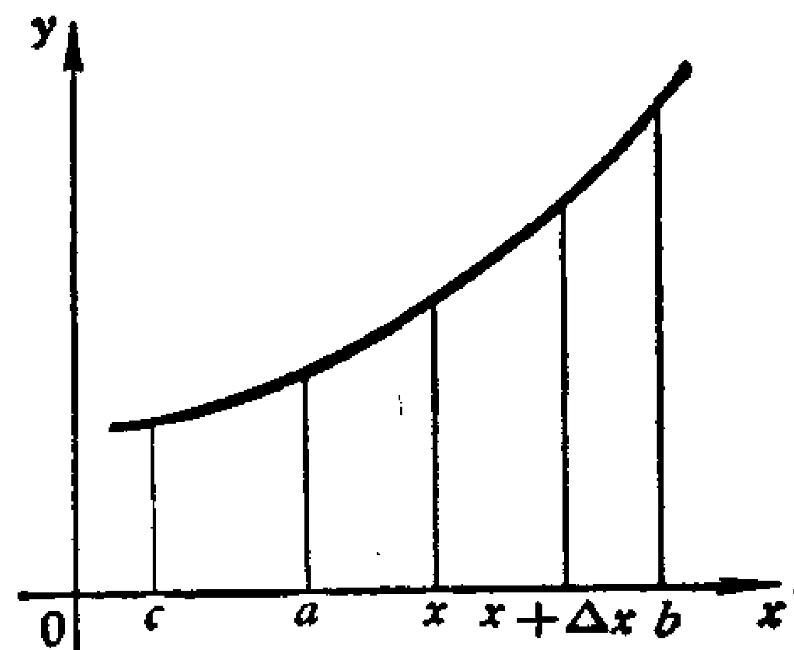


图 166

命

$$M=\max_{x\leqslant t\leqslant x+\Delta x} f(t),\quad m=\min_{x\leqslant t\leqslant x+\Delta x} f(t), \tag{1}$$

考虑面积大小显然有

$$m\Delta x\leqslant F(x+\Delta x)-F(x)\leqslant M\Delta x, \tag{2}$$

也就是

$$m\leqslant \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\leqslant M. \tag{2'}$$

假定 $f(x)$ 是連續的，由(2')，当 $\Delta x\to 0$，可知 $F'(x)$ 存在，且

$$F'(x)=f(x),$$

也就是

$$F(x)=\int f(x)dx+C,$$

这个 C 是待定常数.

在 $x=a$，$x=b$ 之間的面积等于

$$F(b)-F(a).$$

我們就記之为

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b,$$

这称为函数 $f(x)$ 的定积分，a，b 各称为定积分的下限与上限.

例如，$f(x)=\lambda x^2$，則在 $(0,x)$ 之間，并在拋物綫与 x 軸之間的面积等于

$$\int_0^x \lambda t^2 dt=\frac{\lambda x^3}{3}.$$

如果曲綫在 x 軸的下方，这方法所求出的数值是面积的負値；如果有一部分在 x 軸的上方，一部分在 x 軸的下方，我們所得出的积分值是在 x 軸上部的面积与 x 軸下部的面积的差.

例如，$f(x)=x^3$. 在 $(-a,a)$ 之間的定积分等于

$$\int_{-a}^{a} x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big]_{-a}^{a} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} = 0.$$

这并不是說面积等于 0. 因为从 0 到 a 积分

$$\int_0^a x^3dx = \frac{a^4}{4}.$$

而从 $-a$ 到 0，积分等于

$$\int_{-a}^{0} x^3 = -\frac{a^4}{4}.$$

如果要求的是 x 軸与曲綫 $y = x^3$ 之間在 $-a$ 与 a 間的面积的絕对値，应当是$\frac{1}{2}a^4$.

如果曲綫是由若干个連續曲綫所組成的，我們也可以算出面积. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

則

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 x^3dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}(2^4 - 1) = \frac{1}{3} + \frac{15}{4} = 4\frac{1}{12}.$$

例 1. 求界于拋物綫

$$y = ax^2 + bx + c$$

与 x 軸之間，及距离是 h 的两个縱坐标之間的面积等于

$$\frac{h}{6}(y_1 + y_2 + 4y_0),$$

此处 y_1, y_2 是两端的縱坐标，y_0 是中点的縱坐标.

命左端的横坐标是 x_1，面积等于

$$\int_{x_1}^{x_1+h}(ax^2 + bx + c)dx$$

$$= \frac{a}{3}((x_1 + h)^3 - x_1^3) + \frac{1}{2}b((x_1 + h)^2 - x_1^2) + ch$$

$$= \frac{1}{3}ah(3x_1^2 + 3x_1h + h^2) + \frac{1}{2}bh(2x_1 + h) + ch$$

$$= \frac{h}{6}\Big[a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c + ax_1^2 + bx_1 + c +$$

$$+ 4a\left(x_1 + \frac{h}{2}\right)^2 + 4b\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + 4c\Big].$$

明所欲証.

例 2. 求椭圓面积，椭圓的方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

椭圓的总面积等于第一象限內面积的四倍，即

$$S = 4\int_0^a ydx = 4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$$

$$= 4ab\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\,dt = 2ab\left(t\sqrt{1 - t^2} + \sin^{-1}t\right)\Big|_0^1 = \pi ab.$$

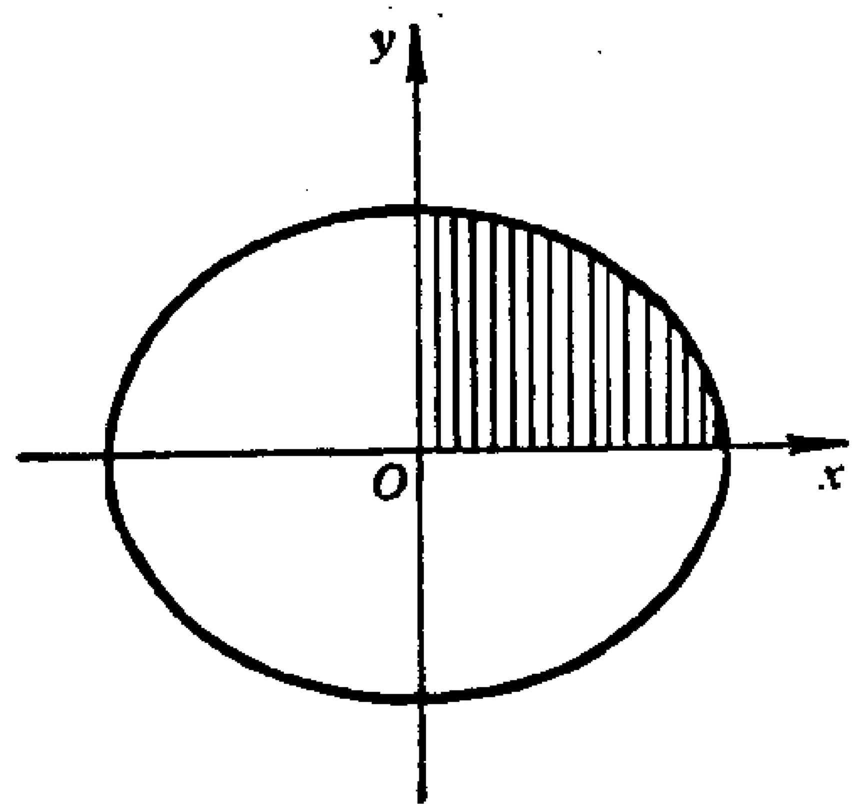


图 167

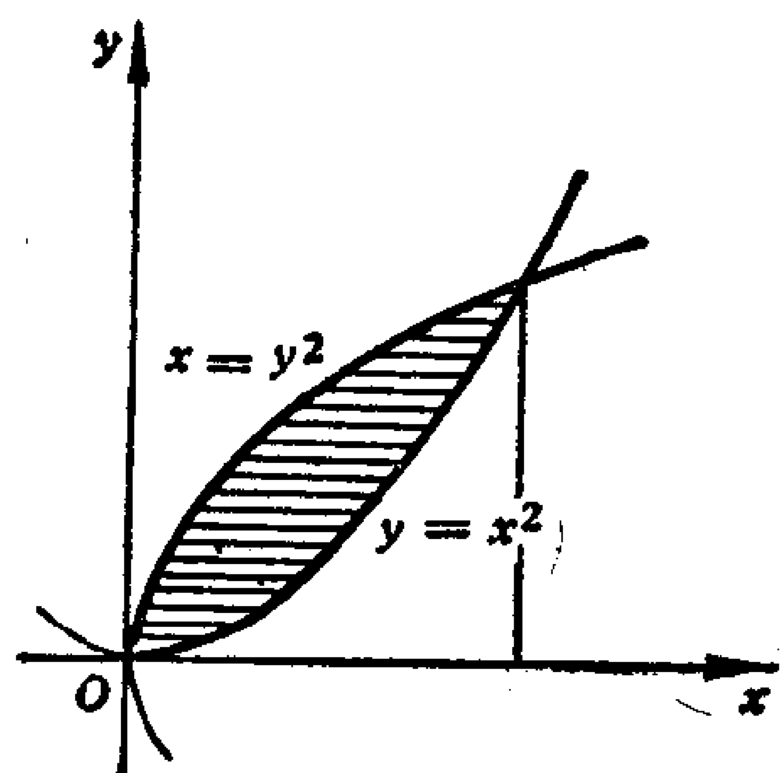


图 168

例 3. 計算在两条曲綫

$$y = x^2, \quad x = y^2$$

間的面积.

解这两个方程得交点(0,0),(1,1),因为在区間(0,1)上

$$\sqrt{x} \geqslant x^2.$$

由此所求的面积等于

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

§ 2. 定积分的概念

現在我們可以把定积分的概念抽象化. 如果

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x),$$

我們就定义

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

为 $f(x)$ 由 a 到 b 的定积分.

我們假定 $a < b$, 并且假定在 a, b 中添上一批分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

则由 Lagrange 公式得出

$$F(b) - F(a) = \sum_{v=1}^{n} (F(x_v) - F(x_{v-1})) = \sum_{v=1}^{n} (x_v - x_{v-1}) f(x_v'),$$

这儿 $x_v > x_v' > x_{v-1}$.

我們現在从任意的 $f(x)$ 出发,考虑更一般的和

$$\sigma_n = \sum_{v=1}^{n} (x_v - x_{v-1}) f(\xi_v), \tag{1}$$

这儿 ξ_v 是区間 (x_{v-1}, x_v) 中的任意一点. 我們的問題是当添入任意分点 x_v, 使

$$\lambda = \max_{v=1,2,\cdots,n} (x_v - x_{v-1}) \to 0$$

时，对任意的 $\xi_v(x_{v-1}\leqslant\xi_v\leqslant x_v)$ 是否 σ_n 皆有相同的极限存在. 如果存在，我們称之为 $f(x)$ 由 a 到 b 的定积分，或称为 Riemann 定积分，而 $f(x)$ 称为 Riemann 可积函数.

如果 $f(x)$ 不是有界的，在和 (1) 中至少有一次沒有意义. 因此现在我們所討論的函数常假定它們适合于

$$m<f(x)<M,$$

即有有限的上下界.

命

$$M_v=\overline{Bd}_{x_{v-1}\leqslant x\leqslant x_v} f(x),\quad m_v=\underline{Bd}_{x_{v-1}\leqslant x\leqslant x_v} f(x)$$

分别表示 $f(x)$ 在区間 $[x_{v-1}, x_v]$ 中的确上界与确下界，并以

$$S_n=\sum_{v=1}^{n} M_v(x_v-x_{v-1}) \tag{2}$$

与

$$s_n=\sum_{v=1}^{n} m_v(x_v-x_{v-1}) \tag{3}$$

分别表示上和数与下和数.

由于和 (2) 恆大于 $m(b-a)$，和 (3) 恆小于 $M(b-a)$，故对于一切可能的分点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$，和(2)的确下界与和(3)的确上界是存在的，分别記之为 I^* 与 I_*.

定理 1. 对于任何 $\varepsilon>0$，皆存在 $\delta>0$，当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant v\leqslant m}(y_v-y_{v-1})<\delta$ 时

$$\left|\sum_{v=1}^{m}\overline{M}_v(y_v-y_{v-1})-I^*\right|<\varepsilon,$$

此处 $\overline{M}_v=\overline{Bd}_{y_{v-1}\leqslant y\leqslant y_v} f(y)$, $y_0=a$, $y_n=b$.

証. 对于任何 $\varepsilon>0$，存在一种分点 $D(x_0,\cdots,x_n)$ 使

$$\sum_{v=1}^{n} M_v(x_v-x_{v-1})<I^*+\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 δ 满足 $2\delta nM<\frac{\varepsilon}{2}$. 当分点 $D'(y_0, y_1,\cdots, y_m)$ 的相邻分点間最大距离为 λ，而 $\lambda<\delta$ 时，D' 的点所成的小区間 $[y_i, y_{i+1}]$ 有两种，一种包有 D 的点，另一种則不含有 D 的点. 前一种区間最多 $2n$ 个，其全体記之为 I_1，其余都是后一种，其全体記之为 I_2. 則

$$\sum_{[y_{i-1},y_i]\in I_1}\overline{M}_i(y_i-y_{i-1})<2\delta nM<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{[y_{i-1},y_i]\in I_2}\overline{M}_i(y_i-y_{i-1})\leqslant\sum_{v=1}^{n} M_v(x_v-x_{v-1})<I^*+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{M}_i(y_i-y_{i-1})<I^*+\varepsilon;$$

另一方面

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{M}_i(y_i - y_{i-1}) \geqslant I^*,$$

故明所欲証.

同法可証

定理 2. 对于 $\varepsilon > 0$, 皆存在 $\delta > 0$, 当 $\lambda = \max_{1 \leqslant v \leqslant m} (y_v - y_{v-1}) < \delta$ 时

$$\left| \sum_{v=1}^{m} \overline{m}_v(y_v - y_{v-1}) - I_* \right| < \varepsilon,$$

此处 $\overline{m}_v = \underset{y_{v-1} \leqslant y \leqslant y_v}{\underline{Bd}} f(y)$.

由于当 $\xi \in [x_{v-1}, x_v]$ 时,

$$m_v \leqslant f(\xi) \leqslant M_v,$$

故

$$s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n.$$

因此 σ_n 有极限的充要条件是

$$\lim_{\lambda \to 0} s_n = \lim_{\lambda \to 0} S_n.$$

命 $\omega_v = M_v - m_v$, 称 ω_v 为 $f(x)$ 在区間 $[x_{v-1}, x_v]$ 上的振幅, 因此 $f(x)$ 可积的充要条件又可以写为 $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{v=1}^{n} \omega_v(x_v - x_{v-1}) = 0$.

我們先看一看哪些函数有此性質:

1) 在閉区間 $[a, b]$ 中連續的函数, 因为連續函数是一致連續的, 所以在給了 $\varepsilon > 0$ 之后, 我們可以找到 δ 使

$$|x_v - x_{v-1}| < \delta$$

时,

$$|f(x_v) - f(x_{v-1})| < \varepsilon.$$

因此得出

$$M_v - m_v < \varepsilon.$$

卽得

$$\sum_{v=1}^{n} (M_v - m_v)(x_v - x_{v-1})$$

$$< \varepsilon \sum_{v=1}^{n} (x_v - x_{v-1}) = \varepsilon(b - a).$$

卽合所求.

2) 任何一个有有限个間断点的有界函数是可积的. 假定 $|f(x)| \leqslant P$. 为了明确起見, 我們考慮仅有一个間断点的情况, $a < c < b$. 其他情况可以同样考慮. 在某一次分法中小于 c 的最大的分点, 命之为 a', 大于 c 的最小分点命之为 b'. 当分点增加, 使所有相邻分点的距离趋于 0 时,



$$|(b' - a')f(\xi)| \leqslant (b' - a')P \to 0.$$

所以并不影响我們的和，由 a 到 a'，由 b' 到 b 的求和部分与 1) 的情况一样.

3) 任一单調有界函数都是可积的. 为明确起見，我們假定函数 $f(x)$ 是不下降的，就是

$$f(x_{v-1}) \leqslant f(x_v),$$

即

$$M_v = f(x_v), \quad m_v = f(x_{v-1}).$$

和(2)就是

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{v=1}^{n} [f(x_v) - f(x_{v-1})][x_v - x_{v-1}] \\ \leqslant \sum_{v=1}^{n} (f(x_v) - f(x_{v-1})) \max_{v=1,\cdots,n} (x_v - x_{v-1}) \\ = (f(b) - f(a)) \max_{v=1,\cdots,n} (x_v - x_{v-1}). \end{aligned}$$

即得所証.

例 1. 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 + \frac{1}{n-1}, & \text{当} 1 - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n+1}, \ n = 2, 3, 4, \cdots. \end{cases}$$

这是一个有无数个間断点的单調函数，它的由 0 到 1 的积分是

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) dx \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

例 2. Dirichlet 函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

不是可积的，原因是对任一区間皆有 $M - m = 1$，即得和(2)等于

$$\sum_{v=1}^{n} (x_v - x_{v-1}) = b - a.$$

不趋于 0.

§ 3. 可积函数的性質

1) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，則 $|f(x)|$ 也在这区間上可积.

对函数 $|f(x)|$ 加以証明，在区間 $[a, b]$ 上任何两点 x', x''，我們有

$$||f(x'')| - |f(x')|| \leqslant |f(x'') - f(x')|,$$

所以函数$|f(x)|$在任一区間的振幅ω_i^*不超过$f(x)$的振幅ω_i. 因此

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^*(x_i-x_{i-1})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1}).$$

后面的和当$\lambda\to 0$时趋于0,所以第一个和也必定趋于0,这就說明了$|f(x)|$的可积性.

2) 如果$f(x)$与$g(x)$在$[a, b]$上可积,則它們的和、差与乘积都是可积的.

我們仅討論乘积的情形:假定$|f(x)|\leqslant K$, $|g(x)|\leqslant L$, 在区間$[x_{v-1}, x_v]$上任取二点x', x'', 考虑差数

$$f(x'')g(x'')-f(x')g(x')=(f(x'')-f(x'))g(x'')+(g(x'')-g(x'))f(x').$$

如果ω_v, ω_v'分别是$f(x)$, $g(x)$在$[x_{v-1}, x_v]$上的振幅,則

$$|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')|\leqslant L\omega_v+K\omega_v',$$

即$f(x)g(x)$在$[x_{v-1}, x_v]$上的振幅ω_v''适合于

$$\omega_v''\leqslant L\omega_v+K\omega_v',$$

即

$$\Sigma\omega_v''(x_v-x_{v-1})\leqslant L\Sigma\omega_v(x_v-x_{v-1})+K\Sigma\omega_v'(x_v-x_{v-1}).$$

当$\lambda\to 0$时,后二項都趋于0, 所以第一項也趋于0.

3) 如果$f(x)$在$[a, b]$上是可积的,則在它的任一部分区間$[\alpha, \beta]$上也是可积的,又如果把$[a, b]$分割为若干个部分区間,并且在每一部分区間上$f(x)$是可积的,那末在区間$[a, b]$上, $f(x)$也是可积的.

証. 先作$\Sigma\omega_v(x_v-x_{v-1})$, 并假定分点中包括$\alpha$与$\beta$, 則在这和中略去一些正項,就是$f(x)$在$[\alpha, \beta]$上的和数. 如果第一个和数趋于0,則这个和数也趋于0.

假定$[a, b]$分成为$[a, c]$与$[c, b]$$(a<c<b)$, 取$f(x)$在$[a, b]$上的和数$\Sigma\omega_v(x_v-x_{v-1})$. 如果$c$在这些分点中,則所举出的和数是由区間$[a, c]$与$[c, b]$的两个和数所組成的,并且这两个和数都趋于0. 如果c不是分点,这結論仍然正确. 因为添上这一分点之后,仅改变了一項,且这一項显然趋于0.

4) 如果改变可积函数在有限个(数目$=k$)点上的数值,它的可积性并不会被破坏.

証. 和数$\sum_{v=1}^{?}\omega_v(x_v-x_{v-1})$受影响的項数不超过$k$, 而每項都趋于0, 明所欲証.

§4. 定积分的基本性質

已往我們总是假定了$a<b$, 把定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

看成为形如

$$\sum_{v=1}^{n}f(\xi_v)(x_v-x_{v-1})\quad(x_{v-1}\leqslant\xi_v\leqslant x_v)$$

的和的极限. 实质上,如果$a>b$, 我們可以用下面的方法来定义积分. 插入分点:

$$a=x_0>x_1>x_2>\cdots x_{v-1}>x_v>\cdots>x_n=b,$$

而积分的和数就是

$$\sigma = \sum_{v=1}^{n} f(\xi_v)(x_v - x_{v-1}), \quad x_{v-1} \geqslant \xi_v \geqslant x_v.$$

这样所引出来的积分，比以往的积分仅差一个符号. 切实些說，我們有性質：

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

我們还有

$$\int_a^b dx = b - a.$$

在式中当 $a = b$ 时，可知

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

現在可以不管次序，我們常有下述性質.

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

証. 首先考慮 $a < c < b$ 的情况. 函数在区間 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上是可积的，因而得出以上的等式. 又如 $a < b < c$，且 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上可积，則

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

移項并改变积分方向，即得所要求的关系式.

3) 显然可以推广为：若有一列数 $a, b, \cdots, k, l$ 依任何順序排列，則

$$\int_a^l f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \cdots + \int_k^l f(x)dx.$$

4) 积分的綫性关系.

定理 1. 对任意的实数 α, β 及 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是在 $[a, b]$ 上可积的函数，可得

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

証. 任意分割区間 $[a, b]$，各作积分和数得

$$\sum_{v=1}^{n} (\alpha f(\xi_v) + \beta g(\xi_v))(x_v - x_{v-1})$$

$$= \alpha \sum_{v=1}^{n} f(\xi_v)(x_v - x_{v-1}) + \beta \sum_{v=1}^{n} g(\xi_v)(x_v - x_{v-1}).$$

命 $\lambda \to 0$，求极限即得所求.

这定理有两个重要特例：

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

及

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

由这两特例显然也能推出定理 1.

5）正函数的积分取正值。

定理 2. 如果 $f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上是可积的，并且 $f(x) \leqslant g(x)$ [或 $f(x) < g(x)$]，则当 $a < b$ 时，

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx \left[\text{或} \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx\right].$$

証. 1) 先研究 $f(x)=0$ 的情况。 由 $g(x) \geqslant 0$, 可知对 $g(x)$ 的积分和都是 $\geqslant 0$，所以得到

$$\int_a^b g(x)dx \geqslant 0.$$

較难証明的是：当 $g(x) > 0$ 时，

$$\int_a^b g(x)dx > 0.$$

用反証法，假如

$$\int_a^b g(x)dx = 0.$$

于是当 $\lambda \to 0$ 时

$$\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) \to 0.$$

即取任意 $\varepsilon_1 > 0$，可使这和数比 $\varepsilon_1(b-a)$小，即至少有一个 M_ν 比 ε_1 小，即在$[a, b]$上可以找到一个分区間 $[a_1, b_1]$，在这区間上 $g(x) < \varepsilon_1$。

又因为

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx = 0,$$

即

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)dx = 0,$$

所以 $[a_1, b_1]$ 中有一部分区間 $[a_2, b_2]$，在其上 $g(x) < \varepsilon_2$，这 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$。

取一正数列 $\varepsilon_h \to 0$，这样便得出一串区間，前者套有后者，使

$$0 < g(x) < \varepsilon_h, \quad a_h \leqslant x \leqslant b_h.$$

所以存在这些区間的一个公共点 c，使

$$0 < g(c) < \varepsilon_h, \quad h = 1, 2, 3, \cdots.$$

因为 $\varepsilon_h \to 0$，这是不可能的，故得定理。

2) 把 1) 用到

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx,$$

即得定理。

特別可以推得

定理 3. 在区間 $[a, b]$ 上，如有

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \leqslant M,$$

則

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx \leqslant M(b-a),\ (b>a).$$

証. 由定理的条件可知

$$-M \leqslant -\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant M.$$

由上定理 2 得

$$-M(b-a) \leqslant -\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx \leqslant M(b-a).$$

这就是所要証明的不等式.

定理 3 有一个重要的特例

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

且仅当 $f(x)$ 不变号时取等号.

附記. 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的复値函数, 又若 $f(x)=u(x)+iv(x)$, 此处 $u(x)$ 与 $v(x)$都是实值可积函数,則定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

以上不少性質在此仍对,例如当 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 皆可积时,有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

証. 引进分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

命 ξ_ν 为 $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ 中的一点,則

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_\nu)(x_{\nu+1}-x_\nu)\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} |f(\xi_\nu)|(x_{\nu+1}-x_\nu).$$

命 $\max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant n-1}(x_{\nu+1}-x_\nu)\to 0$,即明所欲証.

§5. 中値公式及积分基本定理

定理 1 (中値定理). 假定 $f(x)$ 是区間$[a, b]$上的連續函数. 如果函数 $\varphi(x)$ 在区間$[a, b]$上不变号且可积,則在$[a, b]$中有一点 ξ, 使

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

証. 我們不妨假定 $\varphi(x) \geqslant 0$ 及 $a < b$, 用m与M分别代表$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小値与最大値,于是

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

可得

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)dx.$$

因为 $f(x)$ 是連續函数,所以在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 取m与M之間的所有値,当然也取

$$f(\xi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \Big/ \int_a^b \varphi(x)dx.$$

即得定理(但須特别考虑 $\int_a^b \varphi(x)dx=0$ 的情况,在这种情况下,定理显然成立). 重要的特例是 $\varphi(x)=1$, 即

定理 2. 在 $[a, b]$ 中有一点 ξ, 使

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

命

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx,$$

则

$$\int_a^x f(x)dx=f(\xi)(x-a),\ a\leqslant\xi\leqslant x.$$

这就是上限的一个函数.

定理 3. 若 $f(x)$ 連續, 則

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x).$$

証. 由微商的定义

$$\frac{dF(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

我們由定理 2 可知

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_x^{x+h}f(t)dt=hf(\xi),\ x\leqslant\xi\leqslant x+h.$$

命 $h\to 0$, 則得

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x).$$

注意当 $x=a$ 时,我們可以限制 h 只取正值.

由此也显然可見 $F(x)$ 是一个連續函数,这也是我們定义 $F(a)=0$ 的道理. 並可見任意一个連續函数 $f(x)$ 一定有一个原函数 $F(x)$. 又如果 $F_1(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数,則由

$$F_1(x)=F(x)+C$$

可知

$$\int_a^b f(t)dt=F_1(b)-F_1(a).$$

以上所得出的公式称为积分学基本公式. 更一般些,我們可以叙述为

定理 4. 假定 $f(x)$ 在 $[a, b]$上可积,及在$[a, b]$上的連續函数 $F(x)$, 它在 (a, b) 上处处有微商 $f(x)$:

$$F'(x)=f(x)$$

(甚至于可以允許有有限个点例外),則得

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

證. 把 $[a, b]$ 用点

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu < \cdots < x_n = b$$

分为若干部分,显然有

$$F(b) - F(a) = \sum_{\nu=1}^{n} (F(x_\nu) - F(x_{\nu-1}))$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} F'(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

此处 ξ_ν 在 x_ν 与 $x_{\nu-1}$ 之間. 把 $F'(\xi_\nu)$ 写成为 $f(\xi_\nu)$, 則得

$$F(b) - F(a) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

右端就是函数 $f(x)$ 的积分和数 σ, 我們已經假定对和数 σ, 当 $\lambda \to 0$ 时,不依賴于 ξ_i 的选取,存在唯一的极限,因此得出

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

如果我們用 x 代 b, 以 $F'(x)$ 代 $f(x)$, 則得

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

这是还原公式.

§6. 第二中值公式

定理 1 (Abel). 命 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p$ 表一遞減的正数列, $u_0, u_1, \cdots, u_p$ 表实数. 如果 $s_0 = u_0, s_1 = u_0 + u_1, \cdots, s_p = u_0 + \cdots + u_p$ 都在 A 与 B 之間,則和

$$S = \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \cdots + \varepsilon_p u_p$$

在 $A\varepsilon_0$ 与 $B\varepsilon_0$ 之間.

證. 把 S 改写为

$$S = \varepsilon_0 s_0 + \varepsilon_1(s_1 - s_0) + \varepsilon_2(s_2 - s_1) + \cdots + \varepsilon_p(s_p - s_{p-1}) =$$
$$= s_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cdots + s_{p-1}(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + s_p\varepsilon_p.$$

由于 ε_ν 的遞減性,所以 $\varepsilon_{\nu-1} - \varepsilon_\nu$ 都是正的,因此

$$S > A(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p + \varepsilon_p) = A\varepsilon_0,$$

同法可証 $S < B\varepsilon_0$.

定理 2 (第二中值公式). 在区間 $[a, b]$ $(a < b)$上, 如果 $f(x)$ 是单調遞減非負函数, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的,則有一数 ξ, $a \leqslant \xi \leqslant b$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx.$$

證. 左边的积分就是和

$$I = f(a)g(a)(x_1 - a) + f(x_1)g(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots$$

的极限,这和在二和

$$I' = \sum_v M_v f(x_{v-1})(x_v - x_{v-1}), \quad I'' = \sum_v m_v f(x_{v-1})(x_v - x_{v-1})$$

之間，此处 M_v 与 m_v 分别表示 $g(x)$ 在 $[x_{v-1}, x_v]$ 上的上、下界．差数 $I' - I''$ 小于

$$f(a)\sum_v (M_v - m_v)(x_v - x_{v-1}) \to 0,$$

所以对任意在 $m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$ 之間的 μ_i，和 $I_1 = \Sigma\mu_v f(x_{v-1})(x_v - x_{v-1})$ 的极限都是 $\int_a^b f(x)g(x)dx$.

由上节的中值公式，我們可以选得 μ_v 使

$$\mu_v(x_v - x_{v-1}) = \int_{x_{v-1}}^{x_v} g(x)dx.$$

由于 $f(x)$ 是单調递减非負的，所以由引理$\left(S_v = \int_a^{x_v} g(x)dx\right)$可知 I_1 之值在

$$Af(a) \text{ 与 } Bf(a)$$

之間，此处

$$A = \min_{a\leqslant c\leqslant b}\int_a^c g(x)dx, \; B = \max_{a\leqslant c\leqslant b}\int_a^c g(x)dx.$$

I_1 的极限 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 也在 $Af(a)$ 与 $Bf(a)$ 之間，因为 $\int_a^c g(x)dx$ 是 c 的連續函数，所以有 ξ 存在使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

类似地，如果 $f(x)$ 是单調递增非負的函数，則有公式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx, \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

如果保留 $f(x)$ 的单調性，而不假定它的非負性，則有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx,$$

此处 $a \leqslant \xi \leqslant b$.

証．假定 $f(x)$ 是递减的，我們考虑 $f(x) - f(b)$ 是非負递减的，因此

$$\int_a^b (f(x) - f(b))g(x)dx = (f(a) - f(b))\int_a^\xi g(x)dx,$$

即得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

同法，考虑 $f(x)$ 是递增的情况．

以后我們可以看到，在研究非絕对收斂的积分中，第二中值公式有很重要的用处．

§7. 例　子

例 1. $\int_a^b x^\mu dx = \left.\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu \neq -1),$

而

$$\int_a^b x^{-1}dx = \log x\Big|_a^b = \log b - \log a \quad (a>0, b>0).$$

習題. 考虑 $a<0$, $b<0$ 的情况.

例 2. $\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b$

$$\int_a^b \cos x dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$

例 3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

(如果 $n \neq m$);

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \neq m, \\ \pi, & \text{若 } n = m. \end{cases}$$

例 4. 对自然数 m, n 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{(Dirichlet)};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = \frac{n\pi}{2} \quad \text{(Fejér)}.$$

因为

$$\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{m-1} \cos 2lx = \frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x}.$$

逐項求积分,卽得所示.

又

$$\sum_{m=1}^{n} \sin(2m-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$

再利用 Dirichlet 公式卽得 Fejér 公式.

如果对任一 x, $a<x<b$. 在 (a, x) 中 $f(x)$ 可以求积,則我們用以下的定义:

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

例 5. $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon} = \frac{\pi a^2}{2}.$

例 6. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} dx \quad (0<r<1).$

这积分函数的原函数等于

$$F(x) = 2\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right),$$

但在 $x = \pm\pi$ 时这函数没有意义．可是，极限

$$\lim_{x\to-\pi+0} F(x) = -\pi, \quad \lim_{x\to\pi-0} F(x) = \pi$$

显然存在，因而得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} = 2\pi.$$

例 7. 在計算积分

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$$

时，如果在算出来的原函数

$$F(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$$

中以 $x=0$ 与 $x=1$ 代入，則积分之值为 0．这是不可能的，因为一个正函数的积分不可能为 0.

錯誤在于原函数有一个間断点 $x_0 = \sqrt{2-\sqrt{3}}$，如果将原函数画下图来，很明显当 $0 < x < \sqrt{2-\sqrt{3}}$ 时，这原函数所給的值是代表积分

$$\int_0^x \frac{t^4+1}{t^6+1}\,dt$$

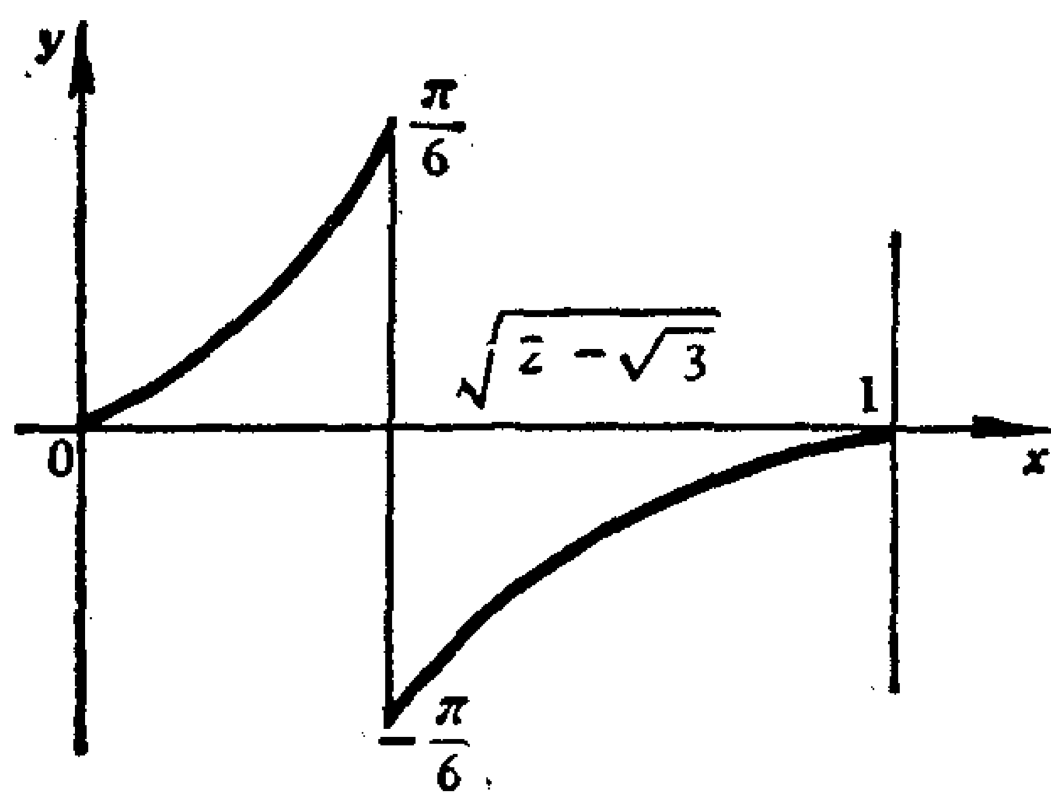


图 169

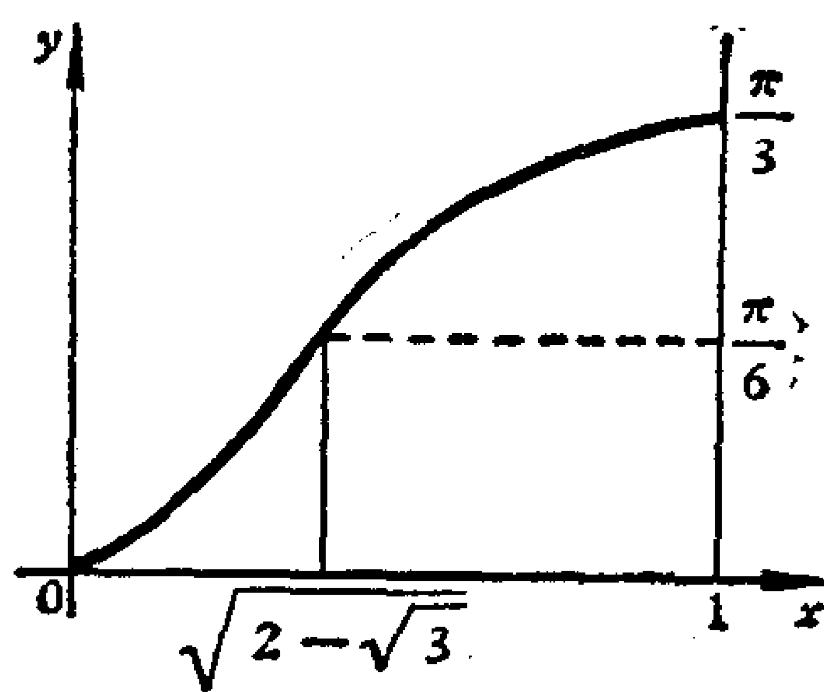


图 170

的，但是当 $x > \sqrt{2-\sqrt{3}}$，显然 $F(x)$ 是不能代表这积分值的．正确地說，我們的原函数应当是

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}, & \text{若 } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2-\sqrt{3}}, \\ -\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1} + \dfrac{\pi}{3}, & \text{若 } \sqrt{2-\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

它的图形如图 170.

在实际計算时，我們用

$$\int_0^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^1\right] = \frac{\pi}{3}.$$

例 8. 命 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 为 $[a, b]$ 上的两个連續函数，且有連續微商及 $f(x) = P/Q$. 我們現在考虑

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \int_a^b \frac{P'Q - PQ'}{P^2+Q^2}dx.$$

这积分的原函数是 $\operatorname{tg}^{-1}f(x)$. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中不变为无穷，則原函数是連續的. 因而得出

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \operatorname{tg}^{-1}f(b) - \operatorname{tg}^{-1}f(a).$$

如果 $f(x)$ 在 (a, b) 中变为无穷了，命 c 为这样的一点，如果經过这一点 $f(x)$ 由 $+\infty$ 变为 $-\infty$，則我們有

$$F(c-0) - F(c+0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

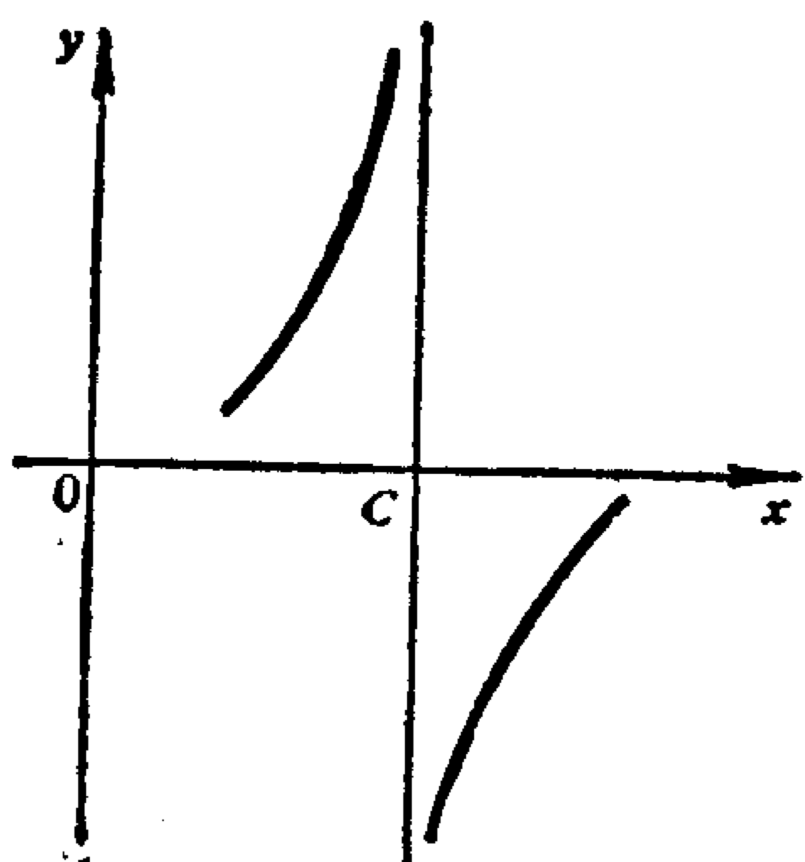


图 171

如果 $f(x)$ 由 $-\infty$ 变为 $+\infty$，則我們有

$$F(c-0) - F(c+0) = -\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$$

如果 $f(x)$ 虽然变为无穷而不变号，則

$$F(c-0) - F(c+0) = 0.$$

假定在 a, b 中 $f(x)$ 有 k 次由 $+\infty$ 变为 $-\infty$，有 k' 次 $f(x)$ 由 $-\infty$ 变为 $+\infty$，則得

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \operatorname{tg}^{-1}f(b) - \operatorname{tg}^{-1}f(a) + \pi(k-k').$$

習題 1. 求积分

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)}}, \quad 0<\alpha, \beta<1.$$

習題 2. 若 $A>0$, $AC-B^2>0$, 則

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\cos x\sin x + C\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

§8. 换变数公式

命 $\varphi(t)$ 是一个函数，适合于

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

我們現在的問題是，在怎样的条件下，有等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

定理 1. 在以下的一組条件下，(1)式成立：

1) 在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 是連續的；

2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上是連續的，而且当 t 在 $[\alpha, \beta]$ 上时，$\varphi(t)$ 的数值不超出 $[a, b]$ 的范围；

3) 在 $[\alpha, \beta]$ 上 $\varphi(t)$ 有連續微商.

証. 命 $F(x)$ 表 $f(x)$ 的原函数，則函数

$$\Phi(t) = F(\varphi(t))$$

的微分等于

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此同时有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

及

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$
$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

这就是我們所要証明的等式.

定理 2. 在以下的一組条件下，(1)式成立：

1) $f(x)$ 是可积的；

2) 当 t 从 α 变到 β 时，$\varphi(t)$ 从 $a = \varphi(\alpha)$ 单調地变到 $b = \varphi(\beta)$；

3) $\varphi'(t)$ 是連續的.

証. 我們不妨假定 $a < b$ 及 $\alpha < \beta$. 函数 $\varphi(t)$ 現在是单調增加. 与分点

$$t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_{\nu-1} < t_\nu < \cdots < t_n = \beta$$

对应的有 $x_\nu = \varphi(t_\nu)(\nu = 0, 1, 2, \cdots n)$，这些点分区間 $[a, b]$ 为

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu < \cdots < x_n = b.$$

命

$$\lambda = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |t_\nu - t_{\nu-1}|.$$

由于 $x = \varphi(t)$ 的(一致)連續性，当 $\lambda \to 0$ 时

$$\max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |x_\nu - x_{\nu-1}| = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1})|$$

也趋于 0.

在 $[t_{\nu-1}, t_\nu]$ 中任取一点 τ_ν，作对应于(1)式右边的和数

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{n} f(\varphi(\tau_\nu))\varphi'(\tau_\nu)(t_\nu - t_{\nu-1}).$$

命 $\xi_\nu = \varphi(\tau_\nu)$，于是 $x_{\nu-1} \leqslant \xi_\nu \leqslant x_\nu$. 用 Lagrange 公式

$$x_\nu - x_{\nu-1} = \varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1}) = \varphi'(\bar{\tau}_\nu)(t_\nu - t_{\nu-1}),$$

此处 $t_{\nu-1} < \bar{\tau}_\nu < t_\nu$. 但現在的 $\bar{\tau}_\nu$ 可能与 τ_ν 是不同的，作对应于(1)式左边的积分和数

$$\sigma_1 = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} f(\varphi(\tau_\nu))\varphi'(\bar{\tau}_\nu)(t_\nu - t_{\nu-1}),$$

当 $\lambda \to 0$ 时，这和数的极限就是积分 $\int_a^b f(x)dx$. 为了要証明 σ 也要趋于这一极限，我們只要証明 $\sigma - \sigma_1 \to 0$ 就够了.

給任一 $\varepsilon > 0$，由于 $\varphi'(t)$ 的(一致)連續性，可以找到 $\delta > 0$ 使 $\lambda < \delta$ 时

$$|\varphi'(\tau_\nu) - \varphi'(\bar{\tau}_\nu)| < \varepsilon.$$

于是

$$|\sigma - \sigma_1| \leqslant \sum_\nu |f(\varphi((\tau_\nu)))||\varphi'(\tau_\nu) - \varphi'(\bar{\tau}_\nu)|(t_\nu - t_{\nu-1}) < L(\beta - \alpha)\varepsilon,$$

此处 L 表示 $|f(x)|$ 的上界，$\beta - \alpha = \Sigma(t_\nu - t_{\nu-1})$.

这就說明 σ 趋于 $\int_a^b f(x)dx$，定理就完全証明了.

例 1. 在求积分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ 时，用变换 $x = a\sin t$，这儿当 t 由 0 变为 $\frac{1}{2}\pi$ 时，x 由 0 变为 a，所以

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

例 2. $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi.$

替換 $x = \pi - t$ 把最后的积分变为

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}dt.$$

因此所求的积分

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}dt = -\pi\,\mathrm{tg}^{-1}(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 3. 計算积分 $J = \int_0^1 \frac{\log(1 + x)}{1 + x^2}dx$.

作变换 $x = \frac{1 - t}{1 + t}$，则得

$$J = \int_1^0 \frac{\log\frac{2}{1 + t}}{1 + \left(\frac{1 - t}{1 + t}\right)^2} \cdot \frac{-2dt}{(1 + t)^2} = \int_0^1 \frac{\log 2 - \log(1 + t)}{1 + t^2}dt = \log 2\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} - J.$$

所以

$$J = \frac{\log 2}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\log 2}{2}\mathrm{tg}^{-1} t\Big|_0^1 = \frac{\pi\log 2}{8}.$$

例 4. 求 $I(r) = \int_0^\pi \log(1 - 2r\cos x + r^2)dx \quad (|r| \neq 1).$

由不等式

$$(1 - |r|)^2 \leqslant 1 - 2r\cos x + r^2 \leqslant (1 + |r|)^2$$

得

$$2\pi\log(1-|r|)\leqslant I(r)\leqslant 2\pi\log(1+|r|).$$

因此

$$\lim_{r\to 0} I(r)=0.$$

命 $x=\pi-t$, 则

$$I(-r)=\int_0^\pi \log(1+2r\cos x+r^2)dx$$

$$=\int_\pi^0 \log(1+2r\cos(\pi-t)+r^2)d(\pi-t)$$

$$=\int_0^\pi \log(1-2r\cos t+r^2)dt=I(r).$$

故

$$2I(r)=I(r)+I(-r)=$$

$$=\int_0^\pi \log[(1-2r\cos x+r^2)(1+2r\cos x+r^2)]dx=$$

$$=\int_0^\pi \log(1-2r^2\cos 2x+r^4)dx.$$

命 $2x=t$, 则

$$2I(r)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log(1-2r^2\cos t+r^4)\,dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi+\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}.$$

在后一积分中命 $t=2\pi-u$, 则得

$$I(r)=\frac{1}{2}I(r^2).$$

因此,一步步用上式可知

$$I(r)=\frac{1}{2}I(r^2)=\frac{1}{4}I(r^4)=\cdots=\frac{1}{2^n}I(r^{2^n}).$$

故当 $|r|<1$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty} r^{2^n}=0$$

得

$$I(r)=0.$$

当 $|r|>1$ 时,由

$$\log(1-2r\cos x+r^2)=\log r^2\left(1-\frac{2}{r}\cos x+\frac{1}{r^2}\right)$$

得

$$I(r)=2\pi\log|r|+I\left(\frac{1}{r}\right)=2\pi\log|r|.$$

习题 1. 算出 $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{1+x}dx$.

习题 2. 若 $f(x)$ 是 $[0, a]$ 上的連續函数,则

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-t)dt.$$

习题 3. 若 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 內的連續函数,则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(t)dt & \text{若 } f(x) \text{ 为偶函数,}\\ 0 & \text{若 } f(x) \text{ 为奇函数.}\end{cases}$$

習題 4. 若 $f(x)$ 是周期为 ω 的連續函数，即

$$f(x+\omega)=f(x),$$

則

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx=\int_0^{\omega} f(x)dx.$$

習題 5. 若 $f(x)$ 是$[0,1]$上的連續函数，則

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

習題 6. 若 $\varphi(u)$ 是 $[-\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{a^2+b^2}]$上的連續函数，則

$$\int_0^{2\pi}\varphi(a\cos\theta+b\sin\theta)d\theta=2\int_0^{\pi}\varphi(\sqrt{a^2+b^2}\cos\lambda)d\lambda.$$

習題 7. 若 $g(u)$ 是$[0,1]$上的連續函数，則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin 2u)\cos u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\cos^2 v)\cos v\,dv.$$

§9. 分 部 积 分

我們运用公式

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

或推广公式

$$\int_a^b uv^{(u+1)}\,dx=[uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+\cdots+$$

$$+(-1)^n u^{(n)}v]_a^b+(-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx,$$

当然必須假定所有出現的各級微商都是連續的.

例 1. 命 m 为自然数，及

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx,\quad J'_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx.$$

分部积分得

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}x\,d(-\cos x)$$

$$=-\sin^{m-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi}+(m-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx.$$

以 $1-\sin^2 x$ 代 $\cos^2 x$，即得

$$J_m=(m-1)J_{m-2}-(m-1)J_m,$$

因得遞推公式

$$J_m=\frac{m-1}{m}J_{m-2}.$$

因得

$$J_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

及

$$J_{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx=\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1}.$$

命 $x=\frac{\pi}{2}-y$，立得

$$J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^m ydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m ydy=J'_m.$$

例 2. 命 m 表整数，則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cos(m+2)xdx=0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin(m+2)xdx=\frac{1}{m+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos(m+2)xdx=-\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\sin(m+2)xdx=\frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}.$$

以第一积分为例，分部积分两次，得

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{m+2}x\cos(m+2)xdx=$$

$$=\frac{1}{m+2}\Big(\cos^{m+2}x\sin(m+2)x-\cos^{m+1}x\sin x\sin(m+2)x\Big)_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\frac{1}{m+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-(m+1)\cos^m x\sin^2 x+\cos^{m+2}x)\cos(m+2)xdx.$$

已經积出的部分經代入 $\frac{\pi}{2}$ 及 0 都等于 0，在后一积分中以 $1-\cos^2 x$ 代 $\sin^2 x$，卽得

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{m+2}x\cos(m+2)xdx=-\frac{m+1}{m+2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^m x\cos(m+2)xdx+$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{m+2}x\cos(m+2)xdx.$$

因此推出第一式.

其他各式可用同法証明.

例 3. 命 n 表任一自然数，积分

$$K_n=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^n x\sin nxdx,\quad L_n=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^n x\cos nxdx.$$

由分部积分得

$$K_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{n-1}x \sin x \cos nx dx.$$

两端各加以K_n，并注意

$$\sin(n-1)x = \cos x \sin nx - \sin x \cos nx.$$

可得

$$2K_n = \frac{1}{n} + K_{n-1},$$

即

$$K_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + K_{n-1}\right).$$

用此递推公式得

$$K_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right).$$

类似地可以求出

$$L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

例 4. 命$k > 0$及m为自然数，则

$$H_{k,m} = \int_0^1 x^k \log^m x dx = (-1)^m \frac{m!}{(k+1)^{m+1}}.$$

分部积分得

$$H_{k,m} = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \log^m x \Big|_0^1 - \frac{m}{k+1}\int_0^1 x^k \log^{m-1} x dx = -\frac{m}{k+1} H_{k,m-1}.$$

因此推出欲求的数值.

例 5. 如果p与q是自然数，则

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

用分部积分得

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = -\frac{x^q(1-x)^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 (1-x)^{p+1} x^{q-1} dx =$$

$$= \frac{q}{p+1}\int_0^1 (1-x)^p x^{q-1} dx - \frac{q}{p+1}\int_0^1 (1-x)^p x^q dx,$$

即得

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{q}{p+q+1}\int_0^1 (1-x)^p x^{q-1} dx.$$

續用此式，可得

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+q+1)(p+q)\cdots(p+2)}\int_0^1 (1-x)^p dx$$

$$= \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

例 6. 在上例中取$x = \sin^2\theta$，则得$dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$.

因此得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}\theta \sin^{2q+1}\theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

§ 10. 瑕　积　分

假定 $a < b$.

虽然函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中是不可以求积分的,但是对任一适合于 $a < \xi < b$ 的 ξ, 函数 $f(x)$ 在 $[a, \xi]$ 中是可以求积分的,而且极限

$$\lim_{\xi \to b} \int_a^\xi f(x) dx = F(b-0) - F(a)$$

是存在的. 我們称这极限是函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的瑕积分,就用

$$\int_a^b f(x) dx$$

来表它,而点 b 称为瑕点.

例如

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}} = \lim_{\xi \to 1} \int_0^\xi \frac{dx}{(1-x)^{1/2}} = \lim_{\xi \to 1} 2(1-(1-\xi)^{\frac{1}{2}}) = 2,$$

不但上下限可能是瑕点, 并且 a, b 間的点 c 也可能是瑕点, 即对任意 ε 与 η, $f(x)$ 在 $[a, c-\varepsilon]$ 与 $[c+\eta, b]$ 为可积,我們定义

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx \right) + \lim_{\eta \to 0} \left(\int_{c+\eta}^b f(x) dx \right) \\ &= F(b) - F(c+0) + F(c-0) - F(a).\end{aligned}$$

例如

$$\int_{-1}^1 x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\eta \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{2}{3}} dx = 6.$$

还有一种情况,对任一有限数 b, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的. 如果极限存在, 我們定义

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x) dx = F(\infty) - F(a).$$

同法定义

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

与

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx.$$

例如

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{tg}^{-1} x \Big|_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

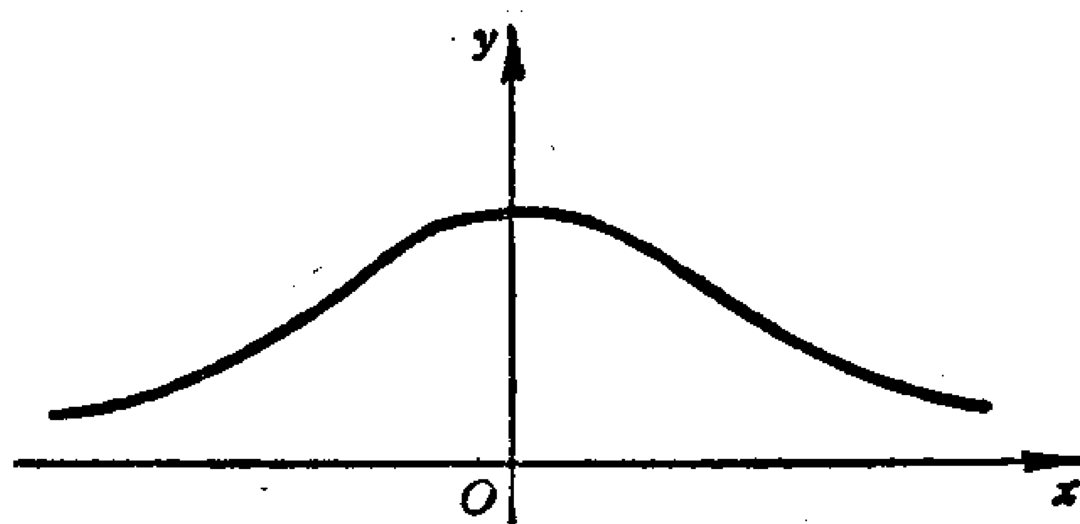


图 172

注意. $\operatorname{tg}^{-1} x$ 不能随意取多值函数的值,我們只取在 $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 之間的唯一值. 关于无穷积分有些与无穷級数相仿的性质, 我們現在不加証明地叙述

于下:

現在假定对任一 $\xi > a$, $f(x)$ 在 $[a, \xi]$ 中是可积的.

定理 1. 如果 $f(x) \geqslant 0$, 而且

$$\int_a^\xi f(t)dt \leqslant M,$$

則积分

$$\int_a^\infty f(t)dt$$

是收斂的.

定理 2. 积分 $\int_a^\infty f(t)dt$ 收斂的必要且充分条件是:給与任一 $\varepsilon > 0$, 我們有一数 X 存在,使 x 与 $x' > X$ 时

$$\left|\int_x^{x'} f(t)dt\right| < \varepsilon.$$

定义. 如果

$$\int_a^\infty |f(t)|dt < \infty,$$

則 $\int_a^\infty f(t)dt$ 称为絕对收斂.

定理 3. 絕对收斂的积分一定收斂.

例 1. (Dirichlet) 积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

非絕对收斂,但是它是收斂的$\left(\text{我們将在 § 13.3 中进一步証明积分值为 } \frac{\pi}{2}\right)$.

先証明

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$$

不收斂, 取一批区間 $\left[n\pi + \frac{1}{4}\pi, n\pi + \frac{3}{4}\pi\right]$, 在这些区間中

$$|\sin x| \geqslant \sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{(n+\frac{1}{4})\pi}^{(n+\frac{3}{4})\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(n+1)\pi} \to \infty$$

可知,原来的积分不絕对收斂.

另一方面,由第二中值定理

$$\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{1}{x}\int_x^\xi \sin t\, dt = \frac{-1}{x}(\cos\xi - \cos x), \quad x < \xi < x',$$

卽

$$\left|\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t} dt\right| \leqslant \frac{2}{x}.$$

此趋于 0，所以原积分是收敛的.

定理 4. 命 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x \geqslant a$ 时的非負函数，且 $f(x) \leqslant g(x)$. 若 $\int_a^\infty g(x)dx$ 收斂，则 $\int_a^\infty f(x)dx$ 亦收斂；若 $\int_a^\infty f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^\infty g(x)dx$ 亦发散.

应用第二中值公式与定理 2 可得下面二定理.

定理 5. 命 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为当 $x \geqslant a$ 时定义的函数. 若对任一常数 A，积分

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx$$

皆存在，且 $|F(A)| < M$，此处 M 为一絕对常数，又 $g(x)$ 为 x 的遞減函数，且当 $x \to \infty$ 时趋于零，则积分

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

收斂.

定理 6. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为当 $x \geqslant a$ 时定义的函数，又若 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收斂，$g(x)$ 单調有界，则积分

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

收斂.

§11. 定积分的一些应用

1) Taylor 展开式.

在推广的分部积分中，命 $v = (b-x)^n$，则

$$v' = -n(b-x)^{n-1},\quad v'' = n(n-1)(b-x)^{n-2}, \cdots,$$
$$v^{(n)} = (-1)^n n!,\quad v^{(n+1)} = 0.$$

当 $x = b$ 时，所有的 $v, v', v'', \cdots, v^{(n-1)}$ 都等于零. 把 $u, u', u'', \cdots$ 写成 $f(x), f'(x), f''(x), \cdots$，則得

$$0 = (-1)^n[n!f(b) - n!f(a) - n!f'(a)(b-a) - \frac{n!}{2!}f''(a)(b-a)^2 - \cdots$$
$$- f^{(n)}(a)(b-a)^n] + (-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx,$$

卽得

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

換記号得

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

这个 Taylor 展开式的余項与以往的有所不同，其中不含有任何未知数。利用这样的余項，可以推导出我們以往所知道的一些余項。例如由第一中值公式可知

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

此处 c 在 $[x_0, x]$ 之内。

2) Wallis 公式。

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，n 为自然数时，

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x,$$

則

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x dx.$$

由例9.1 可知

$$\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1}<\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}<$$
$$<\frac{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1},$$

即

$$\left[\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}\right]^2\frac{1}{2n}.$$

由

$$\left[\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}\right]^2\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}\to0,$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots(2n)(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

这就是 Wallis 公式。

§ 12. 求定积分的特殊方法

以往的方法都是用求原函数法来算出定积分(包括有瑕点和无瑕定的情况)。我們現在介紹几个虽然无法算出原函数，但仍能計算积分值的方法。但这些都是特殊的方法，无法系統叙述，所以我們只能用例題的形式来叙述。

1°. Euler 积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x dx.$$

用分部积分

$$u=\log\sin x\quad dv=dx$$

可知

$$du = \frac{\cos x}{\sin x}dx, \ v = x.$$

因而

$$I = x\log\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}dx.$$

原来的积分在 $x = 0$ 有瑕点，但是經过分部积分之后，第一項当 $x \to 0$ 时有数值，而第二項就是一个普通积分，并无瑕点了．所以积分 I 是存在的，但是

$$\int x\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

也是不能用普通方法积分得出来的．

計算出这一积分主要是利用变数替换，命 $x = 2t$，即

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\sin 2t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(2\sin t\cos t)dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\sin t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\cos t\,dt.$$

在后一积分中换变数 $t = \frac{\pi}{2} - u$，即得

$$2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\log\sin u\,du.$$

因此得出

$$I = \frac{\pi}{2}\log 2 + 2I,$$

即

$$I = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

同时，我們也得出了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\operatorname{tg} x}dx = \frac{\pi}{2}\log 2, \quad \int_0^1\frac{\sin^{-1}x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\log 2.$$

又用替换 $x = \pi - t$ 我們可以算出

$$\int_0^{\pi}x\log\sin x\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin t\,dt = -\frac{\pi^2}{2}\log 2.$$

習題 1. 算出

$$\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int_0^\infty\frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

$\left(\text{提示，用替换 } x = \sin t \text{ 与 } x = \log\frac{1}{\sin t}\right).$

習題 2. 求証当 $a^2 \leqslant 1$ 时积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\ |\sin^2\theta - a^2|\,d\theta = -\pi\log 2.$$

2°. Euler-Poisson 积分

$$K = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

这是概率論中常用的积分。

假定 $x \neq 0$。由

$$1 + x^2 < 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots = e^{x^2} < 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

可知

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}.$$

注意。前者仅对 $0 < x < 1$ 正确，而后者对任一 $x > 0$ 都对。由此立得

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} \qquad (0 < x < 1),$$

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n} \qquad (x > 0).$$

取积分

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \int_0^1 e^{-nx^2}dx < \int_0^\infty e^{-nx^2}dx < \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

但用替換 $u = \sqrt{n}\,x$ 可得

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}K.$$

又

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}t\,dt = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}$$

及

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}t\,dt = \frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\sqrt{n}\,\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)} < K < \sqrt{n}\,\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\frac{\pi}{2}.$$

平方之，即得

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{(2\cdot4\cdots(2n-2)(2n))^2}{(1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1))^2(2n+1)} < K^2 < \frac{n}{2n-1}\times$$

$$\times\frac{(1\cdot3\cdots(2n-3))^2(2n-1)}{(2\cdot4\cdots(2n-2))^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

由 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot4\cdots(2n-2)(2n))^2}{(1\cdot3\cdots(2n-1))^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

可知，当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} \leqslant K^2 \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2},$$

即

$$K^2 = \frac{\pi}{4}.$$

因此

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

習題．求当 $a>0$、$b>0$ 时

$$\int_0^\infty e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}$$

提示．在証明这結果之前，先証明一个一般性的結果：

$$\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx = \frac{1}{A}\int_0^\infty f(y^2)dy, \quad A>0, \quad B>0,$$

这等式在右边积分存在的条件下成立。

由替換 $y = Ax - \dfrac{B}{x}$ 得出

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y^2)\,dy = \int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\left(A+\frac{B}{x^2}\right)dx$$

$$= A\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx + B\int_0^\infty f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]\frac{dx}{x^2}.$$

后一积分中用 $x = -\dfrac{B}{At}$，即可推出以上的等式。

这等式把习題中的积分变为积分 K。

3°．Froullani 积分

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx, \quad a>0, \quad b>0.$$

首先，我們假定 $f(x)$ 当 $x \geqslant 0$ 时定义且連續，并假定当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 有有限的极限。

当 $0<\delta<\Delta<\infty$ 时

$$\int_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}\,dx$$

$$= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz$$

$$= \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\,dz - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

因此得

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\,dz - \lim_{\Delta\to\infty}\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

由中值公式

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z}=f(\xi)\log\frac{b}{a}\quad a\delta\leqslant\xi\leqslant b\delta,$$

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\eta)\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{dz}{z}=f(\eta)\log\frac{b}{a},\quad a\Delta\leqslant\eta\leqslant b\Delta.$$

显然当 $\delta\to 0$ 时 $\xi\to 0$，当 $\Delta\to\infty$ 时，$\eta\to\infty$ 所以

$$\int_0^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\log\frac{b}{a}.$$

例 1. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\log\frac{b}{a}.$

例 2. $\displaystyle\int_0^\infty\log\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\frac{dx}{x}=\log\left(1+\frac{q}{p}\right)\log\frac{b}{a}.$

例 3. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\operatorname{tg}^{-1}ax-\operatorname{tg}^{-1}bx}{x}dx=-\frac{\pi}{2}\log\frac{b}{a}.$

其次，有时虽然当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 沒有有窮极限，但积分

$$\int_A^\infty\frac{f(z)}{z}dz$$

却存在．如是我們直接知道

$$\lim_{\Delta\to\infty}\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=0,$$

所以

$$\int_0^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\log\frac{b}{a}.$$

例 4. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\log\frac{b}{a}.$

同理，如果当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 沒有有限极限，但

$$\int_0^A\frac{f(z)}{z}dz,\quad A<\infty$$

却存在，則

$$\int_0^\infty\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(+\infty)\log\frac{a}{b}.$$

習題 1. 計算积分 $(a,b>0)$

$$(a)\int_0^\infty\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx,\quad(b)\int_0^\infty\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx\,dx,$$

$$(c)\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\log x}dx$$

（答数：$(a)\log\sqrt{\dfrac{a+b}{|a-b|}}$，$(b)\log\dfrac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b}$，$(c)\log\dfrac{a}{b}$）．

習題 2. 計算积分 $(a,b>0)$

(a) $\int_0^\infty \frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2}dx$,

(b) $\int_0^\infty \frac{b\log(1+ax) - a\log(1+bx)}{x^2}dx$

(用分部积分法).

習題 3. 求积分

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2} \quad \left(\text{答数} -\frac{1}{2}\log 2\right)$$

(提示:用恆等式

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2x}(e^{-x} - e^{-2x})$$
$$+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}e^{-x}\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg).$$

習題 4. 求积分 $(a, b > 0)$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx$$

(提示:从証明对任一 $\eta > 0$,

$$\int_\eta^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx} + x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx =$$
$$= \frac{e^{-a\eta} - e^{-b\eta}}{\eta} + a\int_\eta^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}dx$$

入手).

計算定积分的方法,以上不过举例而已,将来再介紹其他方法. 如利用积分号下求微分,利用微分方程,利用重积分等. 較有普遍性的是利用复变数函数求留数法及利用 Fourier 变换的方法等.

§ 13. 面积原理的应用

定理 1. 若 $x \geqslant a$, $f(x)$ 是一个非負递增函数,则当 $\xi \geqslant a$ 时有

$$\left|\sum_{a\leqslant n\leqslant \xi} f(n) - \int_a^\xi f(x)dx\right| \leqslant f(\xi).$$

証. 取 $[\xi] = b$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=a}^{b-1}\int_i^{i+1} f(x)dx \begin{cases} \geqslant \sum_{i=a}^{b-1} f(i) \\ \leqslant \sum_{i=a}^{b-1} f(i+1), \end{cases}$$

即

$$f(a) + \cdots + f(b-1) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant$$
$$\leqslant f(a+1) + \cdots + f(b).$$

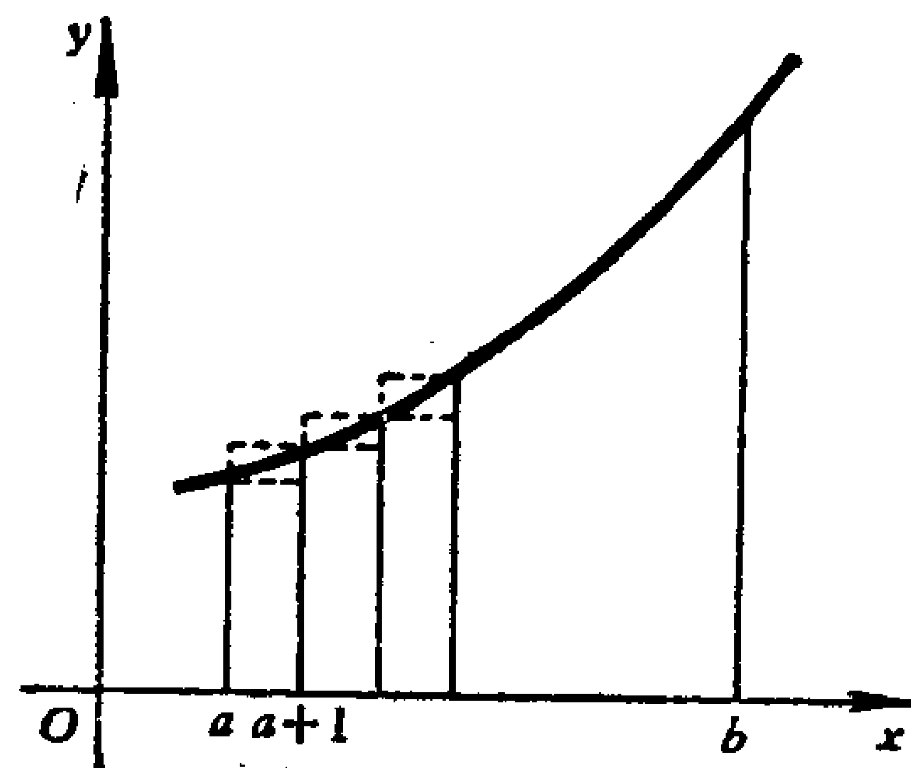


图 173

又

$$0 \leqslant \int_b^\xi f(x)dx \leqslant f(\xi),$$

并起来即得定理.

例 1. 命 $\lambda \geqslant 0, f(x) = x^\lambda$, 则

$$\left| \sum_{a \leqslant n \leqslant \xi} n^\lambda - \frac{\xi^{\lambda+1} - a^{\lambda+1}}{\lambda + 1} \right| \leqslant \xi^\lambda,$$

即

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant \xi} n^\lambda = \frac{\xi^{\lambda+1} - a^{\lambda+1}}{\lambda + 1} + O(\xi^\lambda).$$

例 2. 命 $f(x) = \log x$, $\xi \geqslant 1$, 及 $T(\xi) = \sum_{n \leqslant \xi} \log n$,

则得

$$\left| T(\xi) - \int_1^\xi \log xdx \right| \leqslant \log \xi,$$

即

$$|T(\xi) - \xi \log \xi + \xi - 1| \leqslant \log \xi.$$

特别当 ξ 是整数时,则

$$n \log n - n + 1 - \log n \leqslant \log n! \leqslant n \log n - n + 1 + \log n,$$

即

$$n^{n-1} e^{-n+1} \leqslant n! \leqslant n^{n+1} e^{-n+1}.$$

定理 2. 若 $x \geqslant a$, $f(x)$ 是一个非負遞減函数,則极限

$$\lim_{N \to \infty} \left[\sum_{n=a}^N f(n) - \int_a^N f(x)dx \right] = \alpha$$

存在,且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(a)$. 进而言之,当 $x \to \infty$ 时,若 $f(x) \to 0$, 则

$$\left| \sum_{a \leqslant n \leqslant \xi} f(n) - \int_a^\xi f(x)dx - \alpha \right| \leqslant f(\xi - 1) \quad (\text{若 } \xi \geqslant a + 1).$$

証. 命

$$g(\xi) = \sum_{a \leqslant n \leqslant \xi} f(n) - \int_a^\xi f(x)dx,$$

則

$$g(n) - g(n+1) = -f(n+1) + \int_n^{n+1} f(x)dx \geqslant$$
$$\geqslant -f(n+1) + f(n+1) = 0.$$

又

$$g(N) = \sum_{n=a}^{N-1} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx \right) + f(N) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=a}^{N-1} (f(n) - f(n)) + f(N) = f(N) \geqslant 0,$$

故 $g(n)$ 为一个非負遞減函数,且

$$0 \leqslant g(n) \leqslant g(a) = f(a).$$

故 $g(n)$ 之极限存在,命之为 α, 且 $0\leqslant\alpha\leqslant f(a)$.

今更假定当 $x\to\infty$ 时, $f(x)\to 0$, 则

$$g(\xi)-\alpha=\sum_{a\leqslant n\leqslant\xi}f(n)-\int_a^\xi f(x)dx-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=a}^N f(n)-\int_a^N f(x)dx\right)$$

$$=\sum_{n=a}^{[\xi]}f(n)-\int_a^{[\xi]}f(x)dx-\int_{[\xi]}^\xi f(x)dx-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=a}^N f(n)-\int_a^N f(x)dx\right)$$

$$=-\int_{[\xi]}^\xi f(x)dx-\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=[\xi]+1}^N f(n)-\int_{[\xi]}^N f(x)dx\right)$$

$$=-\int_{[\xi]}^\xi f(x)dx+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=[\xi]+1}^N\int_{n-1}^n(f(x)-f(n))dx$$

$$\begin{cases}\leqslant\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=[\xi]+1}^N\int_{n-1}^n(f(n-1)-f(n))dx=f([\xi])\leqslant f(\xi-1),\\ \geqslant-\int_{[\xi]}^\xi f(x)dx\geqslant-(\xi-[\xi])f([\xi])\geqslant-f(\xi-1).\end{cases}$$

故得定理.

由定理 2 可以立得某种級数收斂与发散的判别条件.

假定給了一个級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

是正項的,且为递降的,即

$$u_1\geqslant u_2\cdots\geqslant u_n\geqslant\cdots\geqslant 0.$$

如果有一个函数 $f(x)$, 有以下的性質: 1) $f(x)$是一个在 $(1,\infty)$ 中連續的非負递降函数, 2) $f(n)=u_n$, 則由定理 2 立刻得知,如果

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$$

存在,則級数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收斂,不然則級数发散.

不但如此,級数的和在

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ 与 } u_1+\int_1^\infty f(x)dx$$

之間.

例 1. 由于

$$\int_1^x t^{-\alpha}dt=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1), & (\alpha\neq 1);\\ \log x, & (\alpha=1).\end{cases}$$

所以当 $\alpha>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n^\alpha}$ 收斂,当 $\alpha\leqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{n^\alpha}$发散.

又由于

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\log t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\log x)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}(\log 2)^{1-\alpha} & (\alpha \neq 1); \\ \log\log x - \log\log 2 & (\alpha = 1). \end{cases}$$

所以当 $\alpha > 1$ 时，級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ 收斂，当 $\alpha \leqslant 1$ 时，这級数发散。

例 2. 取 $a = 1, f(x) = \frac{1}{x}$，則由定理 2 可知

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant \xi} \frac{1}{n} = \log \xi + \gamma + O\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

此处之 γ 名为 Euler 常数。

由此得出

$$\sum_{n \leqslant \alpha N} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n \leqslant \alpha N} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \log \alpha N + \frac{1}{2}\gamma + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$\sum_{n \leqslant \beta N} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \log \beta N + \frac{1}{2}\gamma + \log 2 + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

例 3. 求級数

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

之和。

記上面級数的一般項为 u_m，則

$$\sum_{m \leqslant n} u_m = \sum_{m \leqslant \frac{n}{3}} \frac{1}{2m+1} - \sum_{m \leqslant \frac{2n}{3}} \frac{1}{2m} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\log\frac{n}{3} + \frac{\gamma}{2} + \log 2\right) - \left(\frac{1}{2}\log\frac{2n}{3} + \frac{\gamma}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

故得級数之和为 $\frac{1}{2}\log 2$。

習題 1. 設 ξ 是整数，求証当 $\lambda \geqslant 1$ 时，存在 c，使

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant \xi} n^\lambda = \frac{\xi^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c\xi^\lambda + O(\xi^{\lambda-1}).$$

習題 2. 研究和

$$\sum_{3 \leqslant n \leqslant \xi} \log\log n.$$

習題 3. 研究級数

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log\log n)^\alpha}$$

收斂何时发散.

習題 4. A 为一个給定常数,試改变級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\cdots$$

之次序,使之收斂于 A.

§ 14. Euler 求和公式及 Euler 函数

定理 1 (Euler). 命 $\varphi(x)$ 是有限閉区間 $[a, b]$ 內有連續微商的函数,則

$$\sum_{a<n\leqslant b}\varphi(n)=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

此处$[\xi]$代表实数ξ的整数部分.

証. 1)如果$[a]+1>[b]$,則$[a]=[b]$,这公式变为

$$0=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

即

$$\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)+$$
$$+\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)-\int_a^b\varphi(x)dx.$$

这就是分部积分公式的直接推理.

2) 假定 $[a]+1\leqslant[b]$, 則

$$\int_a^b[x]\varphi'(x)\,dx=\int_{[a]+1}^{[b]}[x]\varphi'(x)\,dx+\int_a^{[a]+1}[x]\varphi'(x)\,dx+\int_{[b]}^b[x]\varphi'(x)dx=$$
$$=\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}n\int_n^{n+1}\varphi'(x)dx+\int_a^{[a]+1}[a]\varphi'(x)dx+\int_{[b]}^b[b]\varphi'(x)dx=$$
$$=\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}n(\varphi(n+1)-\varphi(n))+[a](\varphi([a]+1)-\varphi(a))+$$
$$+[b](\varphi(b)-\varphi([b]))=$$
$$=-\sum_{n=[a]+1}^{[b]}\varphi(n)-[a]\varphi(a)+[b]\varphi(b).$$

又由分部积分可知

$$\int_a^b\left(x-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=\left(b-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\int_a^b\varphi(x)dx,$$

因此

$$\int_a^b \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx = \sum_{n=[a]+1}^{[b]} \varphi(n) - \int_a^b \varphi(x)dx -$$

$$-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a) + \left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b).$$

即明所欲証.

我們現在用 Euler 求和公式来研究,当 n 充分大时, $n!$ 的漸近情況.

1) 命 $\varphi(x) = \log x$, $a = 1$, $b = n$ (整数),則得

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \log m = \int_1^n \log x dx + \int_1^n \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\log n. \tag{1}$$

由于

$$\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

及

$$\int_\xi^{\xi+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx = 0 \quad (\xi \text{ 为实数}),$$

故由第二中值公式可知积分

$$\int_1^\infty \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}$$

收斂,因此由(1)可知

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + C + \gamma_n,$$

此处

$$C = 1 + \int_1^\infty \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x},$$

$$\gamma_n = -\int_n^\infty \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{e^{-n}n^{n+1/2}} = e^C = C_1. \tag{2}$$

我們称公式(2)为 Stirling 公式.

2) 現在我們来进一步定出 C. 由 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots(2n)\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

可知

$$\frac{(2^n n!)^4}{(2n)!^2(2n+1)}(1+o(1)) = \frac{\pi}{2}.$$

以(2)式代入得

$$\frac{C_1^4(2^n n^{n+1/2}e^{-n})^4}{C_1^2((2n)^{2n+1/2}e^{-2n})^2(2n+1)}(1+o(1)) = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{C_1^2 n}{2(2n+1)}(1+o(1)) = \frac{\pi}{2}.$$

命 $n \to \infty$ 得

$$C_1 = \sqrt{2\pi}.$$

同时我們也算出了

$$\int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log 2\pi - 1.$$

因为經常用到,我們引进符号

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2},$$

并且用归納法来定义 Euler 函数 $b_l(l = 1, 2, \cdots)$.

定义. (i) $b_l(x)$ 是以 1 为周期的函数,也就是

$$b_l(x+1) = b_l(x).$$

(ii) $$\int_0^x b_l(y)dy = b_{l+1}(x) - b_{l+1}(0).$$

由周期性显然得出

$$\int_0^1 b_l(y)dy = 0.$$

我們得先說明一下,这样,函数 $b_l(x)$ 就完全定义了. 由(ii)可知,如果 $b_l(x)$ 完全定义了,$b_{l+1}(x)$ 仅差一常数,这一常数可由 $b_{l+2}(x)$ 的周期性来决定. 因之 $b_l(x)$ 也就完全定义了.

我們現在算出前几个 $b_l(x)$ 来. 周期既然是 1,我們不妨假定 $0 < x < 1$, 由

$$b_2(x) - b_2(0) = \int_0^x \left(t - \frac{1}{2}\right)dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

即

$$b_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + b_2(0).$$

由

$$0 = \int_0^1 b_2(x)dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + b_2(0)x\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{12} + b_2(0),$$

即当 $0 < x < 1$ 时,

$$b_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

由于 $b_2(x)$ 的周期性,可一般地有

$$b_2(x) = \frac{(x-[x])^2}{2} - \frac{x-[x]}{2} + \frac{1}{12}.$$

同法可以推得

$$b_3(x) = \frac{1}{6}(x-[x])^3 - \frac{1}{4}(x-[x])^2 + \frac{1}{12}(x-[x]),$$

$$b_4(x) = \frac{1}{24}(x-[x])^4 - \frac{1}{12}(x-[x])^3 + \frac{1}{24}(x-[x])^2 - \frac{1}{720}.$$

讀者可以再算一两个例子以資熟練.

§ 15. 梯形法，矩形法与 Simpson 法

假定 $f(x)$ 是一个在 $[\alpha,\beta]$ 內定义了的函数，以后如果用到几次微商，便假定 $f(x)$ 有几次微商. 我們用 Euler 求和公式来推出普通数值积分的梯形法、矩形法与 Simpson 法.

1. 梯形法

在 Euler 求和公式中取

$$\varphi(x)=f\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right),\ a=0,\ b=n\ (n \text{ 是自然数}).$$

如此則得

$$\sum_{0<l\leqslant n} f\left(\alpha+l\frac{\beta-\alpha}{n}\right)=\int_0^n f\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx+\frac{1}{2}f(\beta)-$$

$$-\frac{1}{2}f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

換变数 $\alpha+x\dfrac{\beta-\alpha}{n}=t$，記 $y_l=f\left(\alpha+l\dfrac{\beta-\alpha}{n}\right)$，則得

$$\sum_{l=1}^{n-1}y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)=\frac{n}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt+$$

$$+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

也就是

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1}y_l+\frac{1}{2}(y_0+y_n)\right)=$$

$$=-\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \tag{1}$$

这个式子說明，求积分的梯形法的誤差是可以用积分形式表出来的，現在把誤差表达得更清楚些，用分部积分可知

$$\int_0^n b_1(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=b_2(x)f'\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_0^n-$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{12}(f'(\beta)-f'(\alpha))-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{12}\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx-$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(b_2(x)-\frac{1}{12}\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

因此得出

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt - \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0+y_n)\right) =$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 \int_0^n \left(b_2(x) - \frac{1}{12}\right) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx. \tag{2}$$

梯形法余項(1)須假定 $f(x)$ 有一次微商，而(2)假定了 $f(x)$ 有二次微商，梯形法余項我們用

$$R_t = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt - \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0+y_n)\right)$$

来表它.

定理 1. 如果 $|f''(x)| \leqslant M \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$，則

$$|R_t| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{12n^2}.$$

証. 由(2)可知

$$|R_t| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 \int_0^n \left|b_2(x) - \frac{1}{12}\right| \left|f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 M \int_0^n \left|b_2(x) - \frac{1}{12}\right| dx =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2} M \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{12n^2}.$$

定理 2. 如果 $f'(x)$ 是单調递減非負函数，則

$$|R_t| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{8n^2} f'(\alpha).$$

証. 由(1)及第二中值公式可知

$$|R_t| = \left|\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 \int_0^n b_1(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx\right| =$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 f'(\alpha) \left|\int_0^{\xi} b_1(x)\,dx\right|.$$

由

$$\left|\int_0^{\xi} b_1(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{8}$$

可得定理.

如果积分的区間較长，这估計比以前的好些.

2. 矩形法

取

$$\varphi(x) = f\left(\alpha + \left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

$$a = -\frac{1}{2},\quad b = n - \frac{1}{2},$$

則得

$$\sum_{-\frac{1}{2}<l\leqslant n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha+\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx+$$

$$+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

換变数

$$\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}=t,$$

并記

$$y_{l+\frac{1}{2}}=f\left(\alpha+\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

則得

$$\sum_{l=0}^{n-1} y_{l+\frac{1}{2}}=\frac{n}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\,dt+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)\times$$

$$\times f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

命

$$R_r=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_{l+\frac{1}{2}}$$

代表矩形法的余項，則

$$R_r=-\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \tag{3}$$

分部积分得

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=b_2(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_2(x)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{24}(f'(\beta)-f'(\alpha))-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_2(x)\times$$

$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

即

$$R_r=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)\times$$

$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \tag{4}$$

定理 3. 如果 $|f''(x)|\leqslant M \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，则

$$|R_r|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3M}{24n^2}.$$

证. 由(4)可知

$$|R_r|\leqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3M\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left|b_2(x)+\frac{1}{24}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3Mn\int_0^1\left|b_2(x)+\frac{1}{24}\right|dx=$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2}M\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{24n^2}M.$$

定理 4. 如果 $f'(x)$ 是单調递减非負函数，则

$$|R_r|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)}{8n^2}.$$

证. 于(3)上用第二中值公式可知

$$|R_r|=\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)}{n^2}\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\xi}b_1(x)\,dx\right|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^2f'(\alpha)}{8n^2}.$$

3. Simpson 法

命

$$R_s=\frac{1}{3}R_t+\frac{2}{3}R_r,$$

则得

$$R_s=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt-\frac{\beta-\alpha}{6n}\left(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i+4\sum_{i=0}^{n-1}y_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

而且 Simpson 公式的余項[由(2)与(4)]为

$$R_s=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(\frac{b_2(x)}{3}-\frac{1}{36}+\frac{2b_2(x-\frac{1}{2})}{3}+\frac{1}{36}\right)\times f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

如果 $f^{(\mathrm{IV})}(x) \quad (\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$ 存在，由分部积分可得

$$\int_0^n\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(b_3(x)+2b_3\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f'''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx$$

$\left(\text{此处用了 } b_3(0)=0,\ b_3\left(\frac{1}{2}\right)=0\right)$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f'''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_0^n+$$

$$+\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f^{(\mathrm{IV})}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{n}\frac{1}{960}(f'''(\alpha)-f'''(\beta))+$$

$$+\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f^{(\mathrm{IV})}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{960}\right)f^{(\mathrm{IV})}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

即

$$R_s=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^5\int_0^n\left(b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{960}\right)\times$$

$$\times f^{(\mathrm{IV})}\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

定理 5. 如果 $|f^{(\mathrm{IV})}(x)|\leqslant M\quad(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，则

$$|R_s|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^5M}{180\cdot 2^4\cdot n^4}.$$

証. 由于

$$\int_0^n\left|b_4(x)+2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{960}\right|dx=$$

$$=n\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{24}+\frac{1}{720}-\frac{(x+\frac{1}{2})^4}{12}+\frac{(x+\frac{1}{2})^3}{6}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{12}+\frac{1}{360}+\frac{1}{960}\right)dx+$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(-\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{24}+\frac{1}{720}-\frac{(x-\frac{1}{2})^4}{12}+\frac{(x-\frac{1}{2})^3}{6}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{12}+\frac{1}{360}+\frac{1}{960}\right)dx\right)=n\left(\frac{6}{180\cdot 2^6}+\frac{6}{180\cdot 2^6}\right)=\frac{3n}{180\cdot 2^4},$$

故得定理.

定理 6. 如果 $f''(x)$ 是单調非負递減函数，则

$$|R_s|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3}{324n^3}f''(\alpha).$$

証. 由

$$\int_0^{\frac{1}{2}}b_2(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\right)dx=0$$

及对 $0<\eta<\frac{1}{2}$，常有

$$\left|\int_0^\eta\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)dx\right|=$$

$$=\left|\int_0^\eta\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\right)\right)dx\right|=$$

$$=\left|\int_0^\eta\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)dx\right|=\left|\frac{\eta^3}{2}-\frac{\eta^2}{4}\right|\leqslant\frac{1}{108}.$$

由

$$R_s=\frac{(\beta-\alpha)^3}{3n^3}\int_0^n\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha+x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx$$

及第二中値公式可得

$$|R_s|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3}{3n^3}f''(\alpha)\left|\int_0^\xi\left(b_2(x)+2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)dx\right|\leqslant\frac{(\beta-\alpha)^3}{324n^3}f''(\alpha),$$

即得定理 6.

附記 1. Euler 公式所包括的,实际上远不止以上的三个方法.

附記 2. 这方法的优点在于我們能把余項(誤差)用积分形式表出. 因之,我們可以用各种不同的方法进行估計，而以上的把絕对値拿进去,把上界拿出来,这是最簡单的估計方法. 它所給出的結果也就是普通书上所給出的誤差. 特别在处理具体問題时，应該根据被积分函数的特殊性，而对誤差項加以細致的处理. 因而往往可能得到較佳的結果.

例如有半径为 R 的圓柱体木料，欲切成与柱体等高而厚度为 l 的长方形木板，試求木材的利用率.

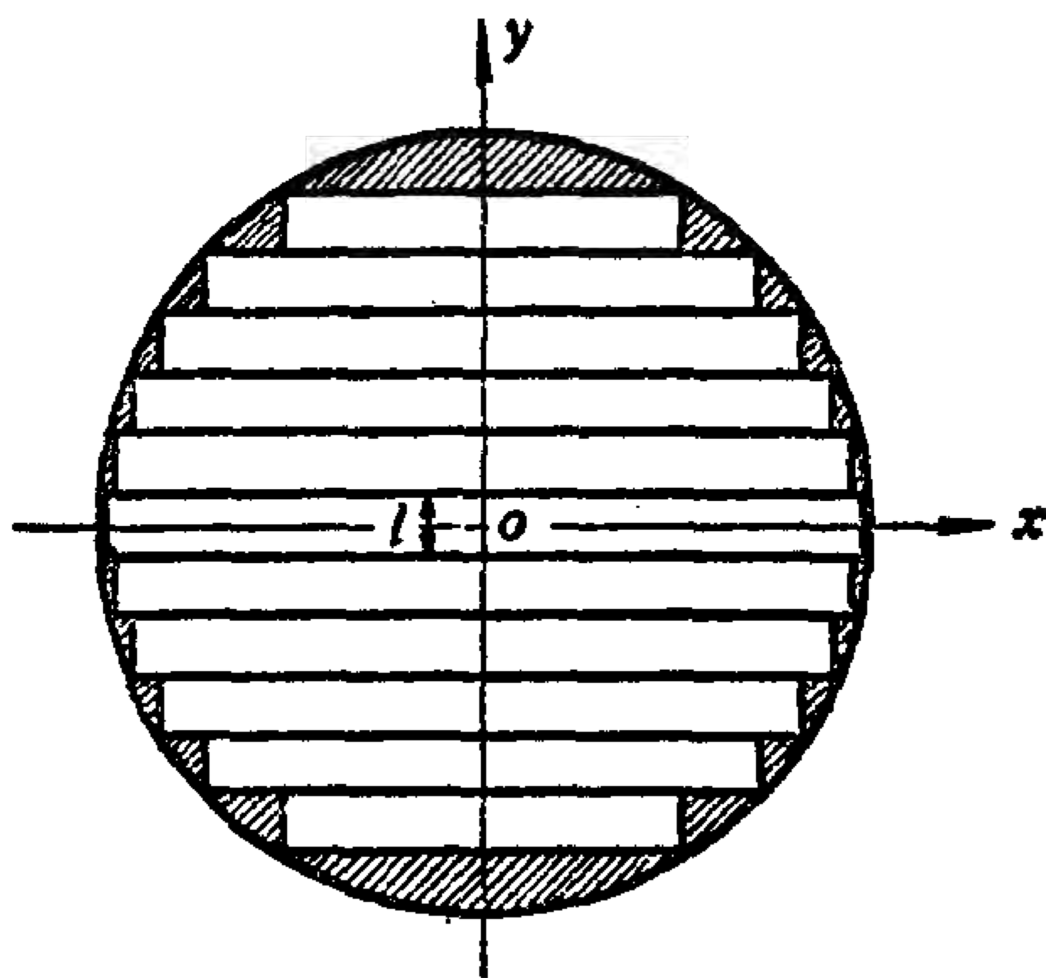


图 174

显然，木材的利用率卽木料的横切面的利用率. 命

$$h_i=\sqrt{R^2-\left(i+\frac{1}{2}\right)^2l^2},$$

则木板的横切面的总面积为

$$\sigma=4l\sum_{i=0}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}h_i-2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}.$$

在 Euler 公式中,命

$$\varphi(x)=\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2},\ a=-\frac{1}{2}\text{ 及 }b=\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right],$$

则

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}h_i=\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\,dx-$$

$$-\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}.$$

由于

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}}\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\,dx-$$

$$-\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}}\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\,dx=\frac{\pi R^2}{4l}-\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}}\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\,dx.$$

因此废料的横切面的总面积为

$$\pi R^2-\sigma=2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}-2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}+$$

$$+4l\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}}\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\,dx+4l\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}\,dx.$$

由于

$$\left|4l\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}}\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\,dx-2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}$$

及

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}\,dx\right|\leqslant\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}\,dx\right|+$$

$$+\left|\int_{\lambda}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}\,dx\right|=I+J,$$

得

$$\pi R^2-\sigma\leqslant 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}+2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}+4l(I+J).$$

由第二中值公式可知

$$I=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}\,dx\right|=\frac{l^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}\left|\int_{\mu}^{\lambda}b_1(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{l^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{8\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}.$$

又由 $|b_1(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ 得

$$J \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_{\lambda}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} \frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}} dx\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\right),$$

因此

$$\pi R^2 - \sigma \leqslant 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}} + \frac{l}{2}\cdot\frac{l^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}} + 2l\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}.$$

取

$$\lambda = -\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4R^2}{l^2}+\frac{1}{16}},$$

得

$$\pi R^2 - \sigma \leqslant 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}} + 4l\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4R^2}{l^2}+\frac{1}{16}}-\frac{1}{8}\right)^2 l^2}.$$

数値計算. 取 $R=20$ 公分, $l=2.2$ 公分, 則得

$$\frac{\pi R^2-\sigma}{\pi R^2} < \frac{121\cdot 528}{12\cdot 56}\% < 10\%,$$

故木材利用率大于 90%.

例 1. 試計算

$$W = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

要求精确到 0.0001.

直接算出被积函数的四級微商之后,可知其四級微商的絕对值不超过 12. 取 $n=5$. 用 Simpson 公式,由定理 5 可知

$$|R_s| < \frac{12}{180\cdot(10)^4} < 0.7\times 10^{-5}.$$

x	y
$x_0 = 0$,	$y_0 = 1.00000$
$x_5 = 1$,	$y_5 = 0.36788$
	和 $= 1.36788$
$x_{1/2} = 0.1$,	$y_{1/2} = 0.99005$
$x_{3/2} = 0.3$,	$y_{3/2} = 0.91393$
$x_{5/2} = 0.5$,	$y_{5/2} = 0.77680$
$x_{7/2} = 0.7$,	$y_{7/2} = 0.61263$
$x_{9/2} = 0.9$,	$y_{9/2} = 0.44486$
	和 $= 3.74027$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.2, & y_1 &= 0.96079 \\
x_2 &= 0.4, & y_2 &= 0.85214 \\
x_3 &= 0.6, & y_3 &= 0.69768 \\
x_4 &= 0.8, & y_4 &= 0.52729 \\
\hline
& & \text{和} &= 3.03790
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{30}(1.36788 + 2 \times 3.03790 + 4 \times 3.74027) = 0.746825.$$

因此

$$0.746813 < W < 0.746837.$$

例 2. 求 $I = \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx.$

这一积分的瑕点是 $x = 0$. 命

$$I = \int_0^1 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \log x dx + \int_0^1 \frac{x^5 \log x}{1-x} dx = I_1 + I_2,$$

由分部积分法可知

$$I_1 = -1.46361\cdots.$$

再由 Simpson 方法算 I_2, 取 $n = 5$, 得

$$I_2 \doteq -0.18135,$$

于是

$$I \doteq -1.64496.$$

现在来估計誤差,粗略估計有 $|\varphi^{(4)}(x)| < 200$, 于是

$$|R_5| < \frac{1}{10^4} \cdot \frac{200}{180} = 0.00011.$$

故总的誤差在 -0.00013 与 $+0.00013$ 之間,因此

$$-1.6452 < I < -1.6448.$$

索　引　一

一　画

二　画

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九 画

十 画

十一画

十二画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

索 引 二

[G e n e r a l   I n f o r m a t i o n]
书名= 高等数学引论　　第一卷　第一分册
作者= 华罗庚
页数= 3 4 2
S S 号= 1 0 1 8 6 5 8 3
出版日期= 1 9 6 3 年0 7 月第1 版

前言
目录

序　　言

这部书的第一卷终于交印了，它既是急就章，又是拖沓篇. 1958年匆匆上马，现想现写现印现讲，有时写稿不过三遍，仅仅经过起草、修改、誊正三道手续便拿去付印. 有时候校对来不及，就不校对了，因而原讲义上错误百出，疵谬迭见，所以说这是急就章. 如果能专心一志地连续地干下去，那还可能比较好些，但又经常为其它工作所打断，因而写一段停一停，改一章放一放的情况又经常出现，所以说是拖沓篇. 紧紧松松，赶赶拖拖. 因而详略不一，前后不贯，轻重失调，呼应不周等毛病在所难免的了.

情况是如此，虽然经过同志们的帮助和修改重写，但还可能留下不少后遗症. 这样的草率工作本来不该交印的，但不少同志热情鼓励，几经踌躇终于把它出版了，希望经过读者的帮助，人多、眼多、想法多，多提意见将来可以改写得更好些.

这个课自始至终是和王元同志合开的，他对原稿的形成与改写都提了不少意见，并且有不少章节都是出诸他的手笔. 在共同教学中一些心得已经吸收入我们合著的"积分的近似计算"一书中(科学出版社1961年初版)，1961年龚升、吴方等同志又用这讲义教了一遍，修改了不少. 最后定稿又经过曾肯成、许以超、史济怀、邓诗涛、李炯生、刘碧梧等同志的细心校阅，提了不少意见. 个别章节还获得了戴元本、陆汝钤、韩京清、周永佩、罗祥钰、曹传书、吴松林、江嘉禾、李培信、邵秀民、陈志华、石赫、殷慰萍等同志的帮助，有关这些我在这儿表示谢意. 特别应该一提的是：在最后定稿的时候，获得了中山大学吴兹潜、林伟二同志的帮助，他们一字不苟地校阅推敲，使本书避免不少错误. 这样的主动地来自其他院校的帮助只能归功于集体主义的优越性.

在写作的过程中参考过熊庆来的"高等算学分析"(1934)；苏步青的"微分几何学"(1947)；赵访熊的"高等微积分"(1949)；孙光远、孙叔平的"微积分学"(1952)；陈建功的"实函数论"(1958)；杨宗磐的"数学分析入门"(1958)；樊映川等的"高等数学讲义"(1958)；陈荩民的"高等数学教程"(1958)；关肇直的"高等数学教程(第一卷)"(1959)；江泽坚的"数学分析"(1960)；北京大学、复旦大学、南京大学及高等数学教科书编审委员会的"高等数学教程"，我在此致谢. 其他作为参考的外文书籍不在此一一列举了.

在写作的过程中，曾经有过一些努力，企图能更好地体现党对教学改革的方针，但是由于自己的理论和业务水平，没有能够较好地做到，读者可能发现一些其它书上所没有的材料，也可能发现一些稍有不同的处理方法，但毕竟是太少了. 在谈到这一点的时候，感到空虚，并且诚恐会错误百出. 大家所公认的、辗转传抄的已经成熟的材料，错误还有时难免，何况第一次写下来的东西，那更使人耽心了，但是还是斗胆地放进书里去，作为引玉之砖，作为试矢之的. 特别是一些高的内容放低了，难的内容改易了，繁的内容化简了的部分更希望大家指正. 但是我个人深信，只要每本书都有些章节改进，集腋成裘，我们教学改革会汇成巨流的，辛勤的点滴劳动，可能是大丰收的预兆.

大学教书不是照本讲，因此本书也准备了一些可教可不教的材料，教师们可以灵活掌握，余下的材料可以作为学有余力的同学的课外读物. 习题应当做，并且适当地要多做些. 本书没有组织好习题，希望老师们自己设法组织. 习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西；其二是初步启发大家会灵活运用，独立思考；其三是融会贯通，出些综合性的习题把不同部门的数学沟通起来.

在教学过程中深得教学相长的益处，其中不少是由于同学所提意见的影响，我把所得到的一些不成熟的看法写在下面供同志们参考. 我讲书喜欢埋些伏笔，把有些重要概念、重要方法尽可能早地在具体问题中提出，并且不止一次地提出. 目的在于将来进一步学习的时候会较易接受高深的方法，很可能某些高深方法就是早已有之的朴素简单的方法的抽象加工而已.（有些深化了些，有些并没有深化而仅仅是另一形式而已.）我也喜欢生书熟讲，熟书生温的方法，似乎是在温熟书，但把新东西讲进去了，这是因为一般讲来，生书比旧课，真正原则性的添加并不太多的原故. 找另一条线索把旧东西重新贯穿起来，这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透. 有时分讲合温，或合讲分温，先把一个机器的零件一一搞清，再看全局，或先看全部机器的作用和目的，再分析要造成这个机器需要哪些零件而把条件一一讲明. “数”与“形”的“分”和“合”，“抽象”与“具体”的“分”与“合”都是在反复又反复的过程中不断提高的. 同学也要求讲讲“人家怎样想出来的”，因而在讲书时也曾作过尝试，主观地推测一下，这很可能并不是原来的想法，但给出一条“这一步看下步并不难，连看几步就达到目的”的途径，作为同学们的参考.

以上一些肤浅的看法在讲课时都尝试过，但绝大部分写不下来，或者写下来就走了样，因此，同是一部书，可以多样讲，讲义作参考，结合同学的实际情况能灵活掌握才好. 拉杂地写了这些意见，与其说是对教师讲的，还不如说是对同学（或自学的人）讲的.

总之，由于水平的限制，虽然黾勉从事，但缺点一定不少，我诚挚地希望读者们多提意见，更希望教师们多多指教．

最后，特别需要提起的是：由于中国科学院数学研究所党组织的支持，才使我有机会讲授基础课和编写讲义；在编写过程中，自始至终得到了中国共产党中国科学技术大学委员会的鼓励、关怀与支持，还给予了具体的帮助，这是我衷心感激的．有了党的鼓励、关怀与支持，使我这几年来敢于按照自己的一些肤浅的设想来进行教学的尝试，使我这几年来有勇气把第一次写下来的东西放到课堂上去教，使我这几年来能把这项工作坚持下来．至于中国科技大学教务处、数学系与数学教研室的同事们，在我从事这项工作的时候，一直给我方便与帮助，也在此表示感谢．对科学出版社的感谢，那就更应当在此一提了，他们花了大量的劳动，在制图、编辑加工、排版印刷、校对等方面都做了细致而深入的工作．

华　罗　庚

1962年6月11日

目　　录

第十一章　积分学的应用

§1. 曲綫的长度

弧长的定义. 假定 A, B 是給定的曲綫上的两点，以这两点为端点作这曲綫的內接折綫，当这折綫的边数无限增加，而且每边的长度都趋向于 0 时，这折綫的周界长趋向的极限（如果这极限存在的話）叫做这曲綫在 A, B 两点之間的弧长.

假定所給的曲綫的参变数表示是

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t). \tag{C}$$

当 $t=\alpha$ 及 β 时所給出的点就是 A 点与 B 点. 假定 $\alpha<\beta$, 当 t 由 α 变到 β 时，(x, y) 就沿着曲綫 (C) 由点 A 变到点 B. 又假定 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都有連續的微商，在弧上取 $(n+1)$ 个点

$$A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n=B$$

各对应于

$$\alpha=t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n=\beta.$$

把 M_ν 的坐标記作

$$x_\nu=\varphi(t_\nu),\quad y_\nu=\psi(t_\nu),$$

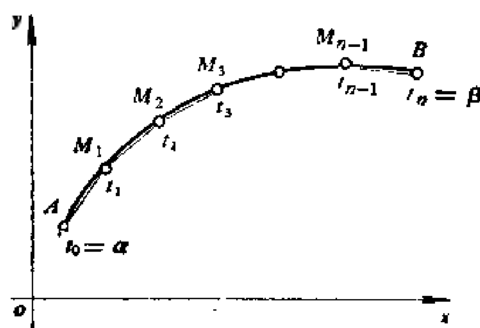


图 1

則 $M_{\nu-1}$ 与 M_ν 之間的距离等于

$$\sqrt{(x_\nu-x_{\nu-1})^2+(y_\nu-y_{\nu-1})^2}.$$

因此折綫的总长度等于

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{(x_\nu-x_{\nu-1})^2+(y_\nu-y_{\nu-1})^2}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1})]^2+[\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1})]^2}.$$

依定义，A，B 間的弧长 s 等于

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{(\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1}))^2+(\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1}))^2}.$$

由 Lagrange 公式，我們有

$$\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1})=(t_\nu-t_{\nu-1})\varphi'(\tau'_\nu),$$
$$\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1})=(t_\nu-t_{\nu-1})\psi'(\tau''_\nu),$$

这儿 τ'_ν，τ''_ν 都是 $(t_{\nu-1},t_\nu)$ 之間的值．所以

$$\sqrt{(\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1}))^2+(\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1}))^2}$$
$$=(t_\nu-t_{\nu-1})\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau''_\nu)}.$$

命

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau''_\nu)}=\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau'_\nu)}+\eta_\nu,$$

則得

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\{\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau'_\nu)}+\eta_\nu\}(t_\nu-t_{\nu-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau'_\nu)}(t_\nu-t_{\nu-1})+\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu-t_{\nu-1}).$$

前者等于

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

再証后者的极限等于 0．由不等式

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}|\leqslant|b-b_1|$$

(这不等式的証明是：

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}=\frac{b+b_1}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}(b-b_1))$$

可知

$$|\eta_\nu|<|\psi'(\tau''_\nu)-\psi'(\tau'_\nu)|.$$

根据 $\psi'(t)$ 的一致連續性，給了任意 $\varepsilon>0$，可找到一个 δ，使当 $|t''-t'|<\delta$ 时

$$|\psi'(t'')-\psi'(t')|<\varepsilon.$$

即当 $\max|t_\nu-t_{\nu-1}|<\delta$ 时，

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu-t_{\nu-1})\right|<\varepsilon(\beta-\alpha).$$

因得所証．

A，B 两点間的弧长可由公式

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

表出来．

如果 t 是一变点，則

$$s(t)=\int_\alpha^t\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

对积分的上限求微商得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)},$$

再由

$$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt},\quad \psi'(t)=\frac{dy}{dt}$$

得出

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,\quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

所以求弧长的公式可以写成为

$$s=\int_{(A)}^{(B)}ds=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

这里 (A), (B) 各表依照积分变量对应于曲綫上点 A,点 B,这积分所应当取的上下限.

特别是,如果曲綫由

$$y=f(x)$$

表示,并且 A, B 各对应于 $x=a$, $x=b$, 则弧长公式变为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

又如果是极坐标形式

$$r=f(\theta),$$

由直角坐标 x, y 与极坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

可得(这就可以看成为以 θ 为参变数的方程)

$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta,$$

$$dy=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta,$$

及

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2\,d\theta^2,$$

所以

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\theta)^2}.$$

如果 A 与 B 各对应于角 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 的点,则极坐标所表出的弧长是

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

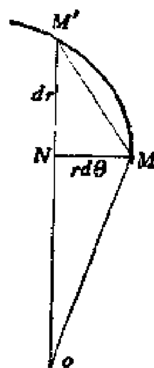


图 2

ds 的极坐标表达式也可以由图 2 得到. 当弧 MM' 非常小时,可以用 M, M' 間的弦代替这段弧. 这弦恰好是直角三角形 MNM' 的弦,而其他边各与 $rd\theta$, dr 近似相等.

注意,曲綫的长度是有方向的,如果我們假定了正向是由 A 到 B, 则由 B 到 A 的度量就是以上的长度加一負号,在用参变数表示法时,也請注意这点,要看准由 α 变到 β 是否就是 A 到 B 的方向.

例 1. 求 $(0,0)$ 与 (a,a^2) 之間抛物綫 $y=x^2$ 的弧长 s.

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^a\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2a}\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{4}[2a\sqrt{1+4a^2}+\log(2a+\sqrt{1+4a^2})].$$

例 2. 求对数螺綫

$$r=Ce^{a\theta}\ (C>0)$$

在 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之間的弧长，这儿 C 为常数.

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta=C\sqrt{1+a^2}\int_\alpha^\beta e^{a\theta}d\theta$$

$$=\frac{C\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\beta}-e^{a\alpha}).$$

例 3. 設有一个半径是 a 的圆在一条直綫上滚动，这圆上一个固定点 M 的軌迹称为旋輪綫，求 M 与直綫相交的两点之間的弧长.

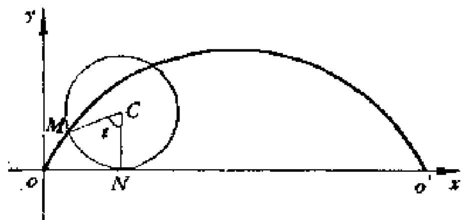


图 3

命固定直綫为 x 軸，M 与直綫两邻接的交点是 o 与 o'，圆心是 C，$\angle MCN=t$，則可知旋輪綫有如下的参数表示：

$$x=a(t-\sin t),$$
$$y=a(1-\cos t),$$

故弧 $\overset{\frown}{oo'}$ 的长度为

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2t}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a.$$

習題 1. 求星形綫 $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$ 的周长.

習題 2. 求圆的漸伸綫

$$x=a(t\sin t+\cos t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)$$

当 $t=0$ 至 $t=\theta$ 时的弧长.

習題 3. 求心脏綫 $r=a\cos\theta+a$ 的周长.

習題 4. 一条有重量的鏈子，两端悬起，鏈的方程可以写为

$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}).$$

求当 $x=0$ 至 $x=b$ 之間的弧长.

§2. 面　　积

我們已經証明过在曲綫

$$y=f(x)$$

与 x 軸，$x=a$，$x=b$ 之間的面积等于

$$\int_a^b y dx=\int_a^b f(x)dx.$$

我們現在研究参变数表示下的情况，仍假定

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

此处的 φ 与 ψ 有連續微商. 如果当 t 由 t_0 变到 t_1 时，x 是增函数，則在此曲綫与 x 軸之間，及对应于 t_0, t_1 的纵坐标之間的面积等于

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi(t)\varphi'(t)dt=\int_{t_0}^{t_1} y\frac{dx}{dt}dt.$$

如果我們有一条閉的曲綫 C，它是一个单圈形式的曲綫，卽任一平行于 x 軸或 y 軸的直綫至多和它交于两点. 假定 C 上的点可以由参变数表示，并且当 t 由 t_0 变到 t_1，P 依一定方向走完一圈. 我們假定 P 取这样的走向，使当 P 按这方向沿 C 运动时，由 C 所圍成的面积的点总在 P 的左边. 我們現在来研究这个曲綫 C 所包的面积.

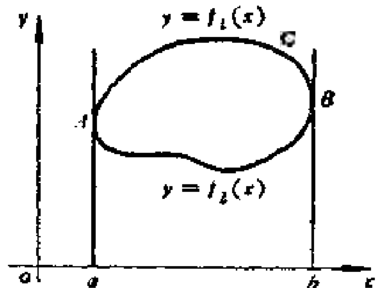


图　4

假定这曲綫在 $x=a$，$x=b$ 之間，且这两直綫与 C 有公共点，曲綫的上一部分的方程为 $y=f_1(x)$，下一部分为 $y=f_2(x)$.

不妨假定当 t 由 t_0 变为 t' 时，曲綫由 A 沿 $y=f_2(x)$ 到 B. 由 t' 变为 t_1 时，曲綫由 B 沿 $y=f_1(x)$ 到 A. 如此則得所求的面积是

$$\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=-\int_{t'}^{t_1}\psi(t)\varphi'(t)dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t'}\psi(t)\varphi'(t)dt=-\int_{t_0}^{t_1} y\frac{dx}{dt}dt.$$

同样可以証明，这面积也等于

$$\int_{t_0}^{t_1} x\frac{dy}{dt}dt$$

及

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt.$$

例 1.　求橢圓

$$x=a\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=b\frac{2t}{1+t^2}$$

所包的面积.

当 t 由 $-\infty$ 变至 ∞ 时，图綫走了一圈，故面积为

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=ab\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=ab\,\mathrm{tg}^{-1}t\Big|_{-\infty}^{\infty}=ab\pi.$$

即椭圓面积等于长半軸和短半軸的乘积的 π 倍，特别当 $a=b$ 时，便得到圓的面积。

例 2. 求 $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$ 所包的面积。

$$\text{所求的面积}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t+3a\cos^2 t\sin t\cdot b\sin^3 t]dt$$

$$=\frac{3}{2}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{16}ab\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi ab.$$

例 3. 求曲綫

$$x^3+y^3=3axy$$

的围綫部分的面积。

我們已知参变数表示法：

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

当 t 由 0 到 ∞ 时，沿这围綫走了一圈，所以

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{9a^2t^2dt}{(1+t^3)^2}=-\frac{3a^2}{2(1+t^3)}\Big|_0^{\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

于是面积等于 $\frac{3}{2}a^2$。

現在考虑极坐标的情况．由

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

及

$$dx=dr\cos\theta-r\sin\theta\,d\theta,\quad dy=dr\sin\theta+r\cos\theta\,d\theta$$

可知

$$\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}r^2d\theta.$$

因此面积公式的极坐标表示法是

$$\frac{1}{2}\int r^2d\theta.$$

如果要求角 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之間曲綫 $r=r(\theta)$ 所围成的扇形面积，就是

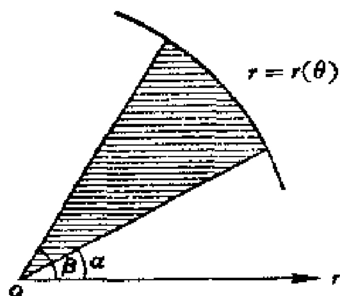


图 5

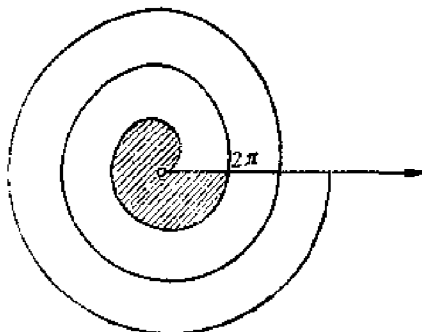


图 6

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta.$$

例 4. 求 Achimede 螺綫 $r = a\theta$ 一环的面积.

所求的面积为

$$\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\theta^2\,d\theta = \frac{a^2\theta^3}{6}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3a^2.$$

例 5. 求蝸綫

$$r = a\cos\theta + b, \quad (b \geqslant a)$$

所围成的面积.

所求的面积为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta + b)^2d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)\theta + \frac{1}{4}a^2\sin 2\theta + 2ab\sin\theta\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2).$$

例 6. 求双紐綫 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ 所围成的面积.

总面积是右边一块的面积的两倍,故所求的面积为

$$2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\theta\,d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta = 2a^2.$$

習題. 求旋輪綫的一支:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

与 x 轴所围成的面积.

§3. 利用横断面算体积法

用 V 代表一个立体的体积,我們取一条直綫作为坐标軸,其上取一点作为原点. 在离原点 x 处作这軸的一个垂直平面, 如果知道所求立体在这垂直平面上所截得的面积等于 $A(x)$, 則可由定积分来計算这立体的体积.

再假定这立体在 $x=a$ 与 $x=b$ 二点所作的垂直平面之間，我們在 a, b 間作若干断面把立体分为若干个单元。考虑这样的一个单元，它界于两断面 x 与 $x+\Delta x$ 之間。以 Δx 作高，以 x 的断面作底做出的正柱体的体积等于

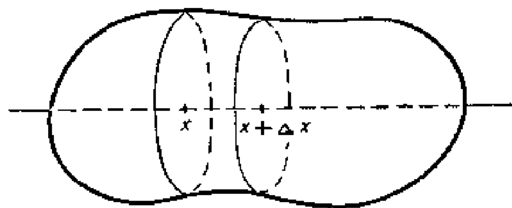


图 7

$$A(x)\Delta x.$$

于是我們得到所要求的体积 V 的近似表达式：

$$\Sigma A(x)\Delta x.$$

当断面无限增加，Δx 的最大值趋向于 0 时，取极限，得一定积分，此即体积。因而得出以下的結論：

如果已知一个給定的立体的垂直于一定方向所有的横断面的面积，取这些横断面的垂直方向作为 x 軸的方向，則这立体的体积由公式

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

表达，其中 $A(x)$ 是横坐标为 x 的横断面的面积，a, b 为这立体的两端断面的横坐标。

如果我們的立体是一个旋轉体，即先給定一条曲綫 $y=f(x)$，繞 x 軸旋轉所得出的体，我們的横断面就是以 y 为半径的圓，所以

$$A(x)=\pi y^2,$$

而体积就等于

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

例 1. 求底半径为 r，高为 h 的圓錐体的体积 V。

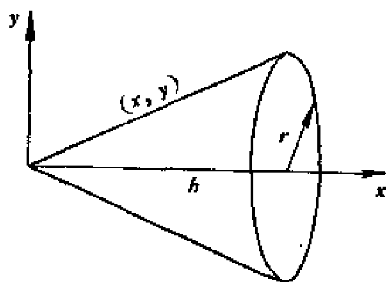


图 8

命錐体的軸为 x 軸，錐体的頂为原点，以垂直于 x 軸的平面去截这个圓錐体，得一个圓，半径为

$$y=\frac{r}{h}x.$$

因此圓錐体的体积为

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

即高乘底面积的 1/3。

例 2. 設椭圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞 x 軸旋轉，求此迴轉椭圓体的体积 V：

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例 3. 求抛物体 $2az = x^2 + y^2$ 与球 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ 的公共部分的体积.

以垂直于 z 軸的平面来截这两个立体. 当用 $z = a$ 这张平面去截时，截下来的面积相等，称为截口.

当用平面 $z = \alpha (\alpha < a)$ 去截它們的公共部分时，得半径为 $\sqrt{2a\alpha}$ 的圆. 但当 $\alpha > a$ 时，就得到半径为 $\sqrt{3a^2 - \alpha^2}$ 的圆. 因此体积等于

$$2\pi a \int_0^a z dz + \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2) dz = \frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} - 5).$$

例 4. 以通过圆柱体底的直径的平面去截这圆柱体，由它切下来的几何形体，称为圆柱弓形体. 試求以与底面成角 α 的平面去截底的半径为 a 的圆柱体时，所得的圆柱弓形体的体积.

取截面通过的直径所在的直綫为 x 軸和底面的圆心为原点. 以垂直于 x 軸的平面去截时，得一个三角形，其面积为

$$\frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

因此弓形体积等于

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} a^2 h,$$

此处 h 是圆柱弓形体的高.

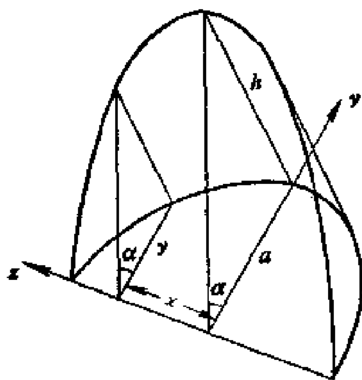


图 9

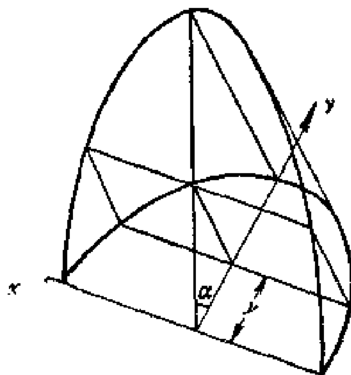


图 10

若以垂直于 y 軸的平面去截时，得到的是矩形，其面积等于

$$2xy \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot y \sqrt{a^2 - y^2}.$$

所以圆柱弓形体的体积等于

$$2 \operatorname{tg} \alpha \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} a^2 h.$$

習題 1. 試求对应于 $x = 0$ 及 $x = b$ 的一段悬鏈綫

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

繞 x 軸旋轉所得的体积.

習題 2. 求旋輪綫的一支：

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

繞 x 軸旋轉所得的体积.

習題 3. 求星形綫 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 繞 x 軸旋轉所得的体积.

習題 4. 求球 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与圓錐 $x^2 = y^2 + z^2 (x \geqslant 0)$ 的公共部分的体积.

§ 4. 旋轉面的側面积

假定在 x, y 平面上有由参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

所定义的曲綫，当 t 由 α 变到 β 时，曲綫由 A 到 B. 我們現在要求出这一曲綫繞 x 軸旋轉所得出的旋轉体的側面积.

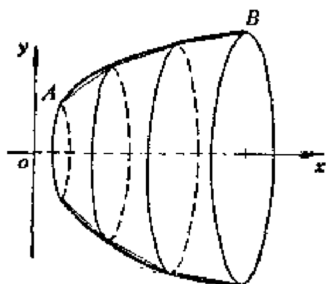


图 11

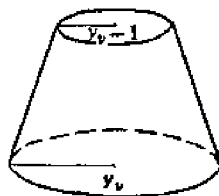


图 12

先作折綫

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n = B.$$

对应的点是

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

我們先算出这折綫旋轉所得出的側面积. 由綫段 $M_{\nu-1}M_\nu$ 繞 x 軸經旋轉所得出的截錐的两底的半徑各为

$$y_{\nu-1} = \psi(t_{\nu-1}), \quad y_\nu = \psi(t_\nu),$$

斜高等于

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2},$$

这截錐的側面积等于

$$\pi[\psi(t_{\nu-1}) + \psi(t_\nu)]\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2}$$
$$= \pi[\psi(t_{\nu-1}) + \psi(t_\nu)](t_\nu - t_{\nu-1})\sqrt{\varphi'^2(\tau_\nu') + \psi'^2(\tau_\nu'')}$$

(用 Lagrange 公式)，此处 τ_ν', τ_ν'' 是 $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ 中的数值. 我們現在要考慮的是

$$\pi \sum_{\nu=1}^{n} (\psi(t_\nu) + \psi(t_{\nu-1}))\sqrt{\varphi'^2(\tau_\nu') + \psi'^2(\tau_\nu'')}(t_\nu - t_{\nu-1})$$

的极限. 与处理弧长的原則一样，我們不妨在第一、第二因子中把 $t_{\nu-1}, \tau_\nu', \tau_\nu''$ 都换为 t_ν

(这样的变化仅相差一个无穷小),改变后得

$$2\pi\sum_{\nu=1}^{n}\psi(t_\nu)\sqrt{\varphi'^2(t_\nu)+\psi'^2(t_\nu)}\,(t_\nu-t_{\nu-1}).$$

在趋限时,就得到总面积的公式

$$F=2\pi\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,$$

也就是

$$F=2\pi\int_{(A)}^{(B)}y\,ds.$$

例 1. 求球面(即半径为 r 的圆,繞直径旋轉而成的立体的表面)的面积,取这个圓为

$$x^2+y^2=r^2;$$

而旋轉軸为 x 軸,則球面的面积为

$$2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=4\pi r^2.$$

例 2. 求星形綫 $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$ 繞 x 軸旋轉的立体的表面积 P.

只要将星形綫在第一象限的弧所划出的曲面的面积加一倍即可,故

$$P=2\cdot2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3t\cdot3a\sin t\cos t\,dt$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos t\,dt=12\pi a^2\frac{\sin^5t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

例 3. 求心脏綫 $r=a(1+\cos\theta)$ 繞极軸旋轉所产生的曲面的面积 P:

$$P=2\pi\int_0^\pi y\,ds=2\pi\int_0^\pi r\sin\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^\pi4a\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cdot2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=2\pi\cdot8a^2\int_0^\pi\cos^4\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

習題 1. 求对应于 $x=0$ 及 $x=b$ 的一段悬鏈綫

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

的弧繞 x 軸旋轉所得的曲面的表面积.

習題 2. 求双紐綫 $r^2=2a^2\cos2\theta$ 繞极軸旋轉所得的曲面的表面积.

習題 3. 求迴轉橢圓体的表面积,即橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

繞 x 軸旋轉所得的曲面的表面积.

習題 4. 求旋輪綫一支

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t),\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

繞 x 軸旋轉所得的曲面的表面积。

§5. 柱面的侧面积

在 x, y 平面上有一曲綫

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t).$$

过这曲綫上的点作平行于 z 軸的直綫，这些直綫成一柱面。

再加一个方程 $z = \chi(t)(\chi > 0)$，我們要求在 $z = 0$ 平面和 $z = \chi(t)$ 之間的柱面的面积. 我們把 A, B 間的曲线分成为

$$A = M_0, M_1, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n = B,$$

它們对应于

$$\alpha = t_0, t_1, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

作梯形，这个梯形以經过 $M_{\nu-1}, M_\nu$ 的二直綫为边，它的面积等于

$$\frac{z_{\nu-1} + z_\nu}{2}\sqrt{[\varphi(t_{\nu-1}) - \varphi(t_\nu)]^2 + [\psi(t_{\nu-1}) - \psi(t_\nu)]^2}.$$

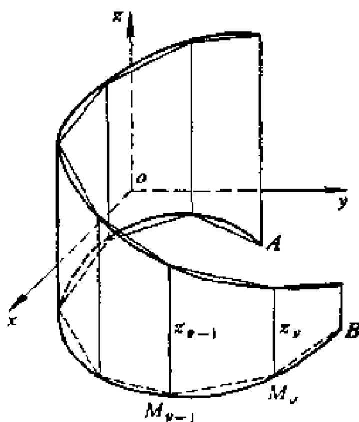


图 13

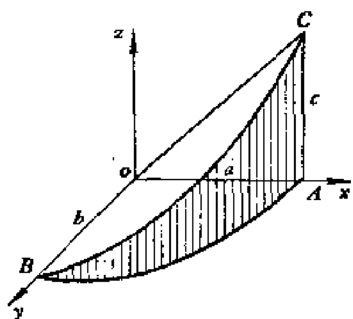


图 14

用与上节相同的方法，我們的問題可以化为求和数

$$\sum_{\nu=1}^{n} \chi(t_\nu)\sqrt{\varphi'^2(t_\nu) + \psi'^2(t_\nu)}\,(t_\nu - t_{\nu-1})$$

的問題，所趋的极限是

$$\int_\alpha^\beta \chi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt.$$

例 1. 求 x, y 平面上曲綫

$$y = b - \frac{bx^2}{a^2}$$

上对应于 $x = 0$ 及 $x = a$ 的一段弧上建立的柱面与平面

$$z=\frac{c}{a}x$$

相截后所得的柱面的面积 P（图 14）：

$$P=\int_0^a z\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\frac{c}{a}\int_0^a x\sqrt{1+\left(\frac{2bx}{a^2}\right)^2}dx$$

$$=\frac{c}{a^3}\int_0^a x\sqrt{a^4+4b^2x^2}\,dx=\frac{c}{12b^2}[(a^2+4b^2)^{3/2}-a^3].$$

例 2. 如果将上例中曲綫段换为在第一象限中的圓周，即 $y=\sqrt{a^2-x^2},(0\leqslant x\leqslant a)$，则由于当 $x\to a$ 时 $\frac{dy}{dx}\to\infty$，所以上面的公式不能无条件的使用. 采用参数表示法

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

故

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}z\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=ac\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=ac.$$

例 3. 求曲綫

$$x=R\sin^2 t,\quad y=R\sin t\cos t$$

在第一象限內的一段上，与高

$$z=R\cos t$$

所构成的柱面的面积 P：

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos t\sqrt{(2R\sin t\cos t)^2+(-R\sin^2 t+R\cos^2 t)^2}\,dt$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=R^2.$$

（曲綫与 $z=R\cos t$ 所构成的空間曲綫，正好是柱面 $x^2+y^2=Rx$ 与球 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的截口，称为維維亚尼曲綫）.

習題 1. 求将例 1 中的曲綫段换为椭圓在第一象限中的一段

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

时的柱面积.

習題 2. 求半径为 r，軸相交成直角的两圓柱体的公共部分的表面积.

§6. 求 重 心

給定 n 个質点：

$$M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2),\ \cdots,\ M_n(x_n,y_n,z_n),$$

它們的質量各等于

$$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n.$$

用

$$M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$$

表示总质量,則

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu$$

称为这質点系的重心.

不难驗証,把这一系任意地分为若干組,每一組有一重心. 把这一組的質量完全集中在这些重心上,作出一个新質点組,这新質点組的重心就是原質点組的重心.

我們不討論質点系,我們討論充滿平面上某一个区域或某一条綫段的物質.为簡单起見,我們只考虑均匀分布的物質的情况. 取密度为 1,这样,一条綫段总的質量就可以用这綫段的长度来表它,一块平面区域的質量可以用面积来表示,也可以用体积来表示質量.

先求一条曲綫弧 AB 的重心. 假定它的长是 s,把弧 AB 分为 n 分, $\Delta m = \Delta s$, 則

$$\bar{x} = \frac{1}{s}\Sigma x\Delta s, \quad \bar{y} = \frac{1}{s}\Sigma y\Delta s.$$

求极限可知

$$\bar{x} = \frac{1}{s}\int_{(A)}^{(B)} x ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{s}\int_{(A)}^{(B)} y ds,$$

而

$$s = \int_{(A)}^{(B)} ds = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

由此推出

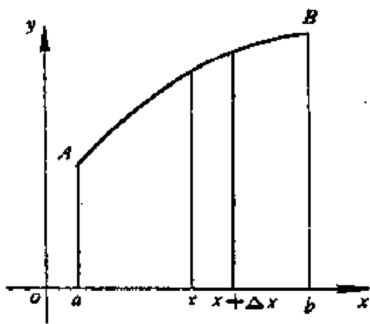


图 15

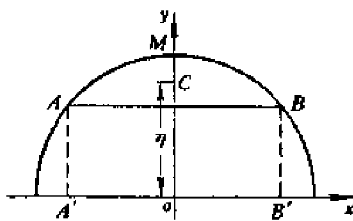


图 16

定理 1 (Guldin Pappus). 由平面上一段已知弧,繞这平面上一条不穿过这弧的直綫作軸,迴轉而成的立体的側面积等于这段弧的长度与这段弧的重心旋轉时經过的路程的长度之积.

証. 取旋轉軸为 x 軸. 由弧 AB 旋轉所成立体的側面积等于

$$2\pi\int_{(A)}^{(B)} y ds = 2\pi\bar{y}\cdot s.$$

例 1. 試求半径为 r 的圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的重心位置.

因为这弧对称于通过它的中点M的半径OM，所以重心在这半径上．为了要确定重心，仅须求出它与圆心o的距离η．取轴如图所示，并以s表$\overset{\frown}{AB}$弧的长度，d表示弦AB的长，我們所研究的弧繞x軸旋轉，得出球带，它的面积P等于$2\pi rd$．依 Guldin 定理，这表面积又等于$2\pi\eta s$，所以$s\eta = rd$，即$\eta = \frac{rd}{s}$．

取$\overset{\frown}{AB}$为半圆，即$d = 2r$，$s = \pi r$，則得

$$\eta = \frac{2}{\pi} r.$$

例 2．求旋輪綫的一支：

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

的重心．

由于对称性，所以重心(ξ, η)的横坐标ξ立刻可以求出

$$\xi = \frac{2\pi a}{2} = \pi a.$$

已知旋輪綫一支的周长为$8a$，又知这一支繞x軸旋轉的表面积为$\frac{64}{3}\pi a^2$（見§1例3及§4习題4），故由 Guldin 定理可知

$$\frac{64}{3}\pi a^2 = 2\pi\eta \cdot 8a.$$

因此$\eta = \frac{4}{3}a$．

再考虑一块平面区域A（它的面积也記之为A）．为簡单起見，假定这个区域是在两条曲綫之間，这两条曲綫各为

$$y = f_1(x),\quad y = f_2(x).$$

取x到$x + \Delta x$的一小块．对这一块重心(x_0, y_0)的近似式是

$$x_0 \sim x,\quad y_0 = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2},$$

而$\Delta m \sim (f_2(x) - f_1(x))\Delta x$．

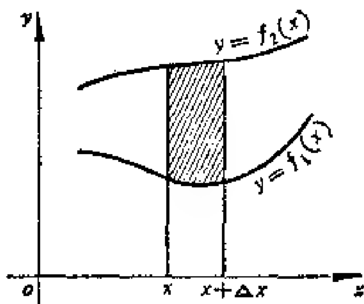


图 17

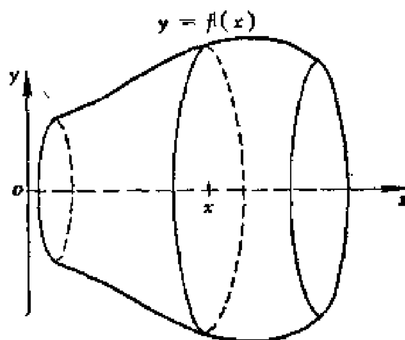


图 18

因此整个面积的重心等于

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\lim_{n\to\infty}\Sigma x_0\Delta m = \frac{1}{A}\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\lim_{n\to\infty}\Sigma y_0\Delta m = \frac{1}{A}\lim\Sigma\,\frac{f_2(x) + f_1(x)}{2}\,(f_2(x) - f_1(x))\Delta x$$

$$= \frac{1}{2A}\int_a^b (f_2(x)^2 - f_1(x)^2)dx.$$

由此推出

定理 2 (Guldin Pappus). 由一块平面图形，繞这平面上一条不穿过这图形的直綫为軸，旋轉而成的立体的体积，等于这块图形的面积与它的重心在旋轉时所經过路程的长度的乘积.

証. 取旋轉軸为 x 軸，旋轉体的体积 V 等于由曲綫 $y = f_2(x)$ 与曲綫 $y = f_1(x)$ 旋轉而成的两个旋轉体的体积的差，所以

$$V = \pi\int_a^b f_2^2(x)dx - \pi\int_a^b f_1^2(x)dx = 2\pi\bar{y}A.$$

現在再討論旋轉体的重心. 旋轉体的重心一定在軸上，因之，仅需确定其在旋轉軸上的地位卽足.

在 x 与 $x + \Delta x$ 間的一截旋轉体的体积 $\sim \pi\Delta x(f(x))^2$，其重心 $\sim x$，所以旋轉体的重心

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\lim_{n\to\infty}\pi\Sigma x(f(x))^2\Delta x = \frac{\pi}{V}\int_a^b x(f(x))^2dx,$$

此处 V 是旋轉体的体积.

例. 求拋物綫

$$y^2 = 4ax, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

繞 x 軸旋轉出来的立体的重心.

現在有

$$V = \pi\int_0^a (f(x))^2dx = \pi\int_0^a 4ax\,dx = 2\pi a^3.$$

又

$$V\bar{x} = \pi\int_0^a x(f(x))^2dx = \pi\int_0^a 4ax^2\,dx = \frac{4}{3}\pi a^4,$$

因此得

$$\bar{x} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^4}{2\pi a^3} = \frac{2}{3}a.$$

§7. 轉动慣量(或平方矩)

一質量为 m 的質点对一軸的轉动慣量定义为

$$I = mr^2,$$

这 r 是这一質点与軸的距离.

一批质量为 $m_1, \cdots, m_n$ 的质点 $P_1, \cdots, P_n$ 的轉动慣量就是

$$I = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu r_\nu^2,$$

这儿 r_ν 是质点 P_ν 到軸的距离.

取軸为 x 軸,这轉动慣量以 I_x 表它,因为由点 (x, y, z) 到 x 軸的距离等于 $\sqrt{y^2+z^2}$,所以

$$I_x = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2).$$

同法对 y 軸, z 軸的轉动慣量各为

$$I_y = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (z_\nu^2 + x_\nu^2),$$

$$I_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2).$$

必須注意,一质点对一固定軸的轉动慣量与这一点的位置无关,而仅依賴于这一点对这軸的距离.

例如, $(5, 0, 0)$, $(0, 5, 2)$ 与 $(3, -4, 6)$ 点虽不同,但它們对 z 軸的轉动慣量都是相等的. 实质上,所有的适合于 $x^2 + y^2 = 5^2$ 的点都有相等的轉动慣量. 这些点都是在同一以旋轉軸为中心軸的圓柱面上的.

命 $M = \sum_{\nu=1}^{m} m_\nu$ 是总质量. 由 $\frac{I}{M} = R^2$ 定义 R,称为慣性半径,也就是如果把总质量 M 集中在距軸 R 的点,所得的轉动慣量与原质点系的轉动慣量相等.

我們現在也是仅仅考虑均匀物质的轉动慣量.

一个平面积对 y 軸的轉动慣量. 取一小条,其寬为 dx,曲綫则由 $y = f(x)$ 到 $f(x + \Delta x)$,这一小条的质量 $\sim ydx$,其慣性半径 $\sim x$. 所以

$$I_y = \int_a^b x^2 \cdot y dx.$$

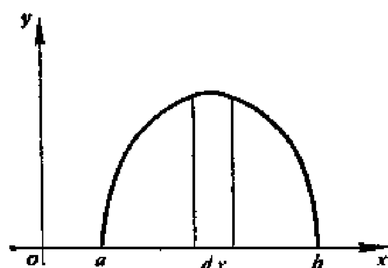


图 19

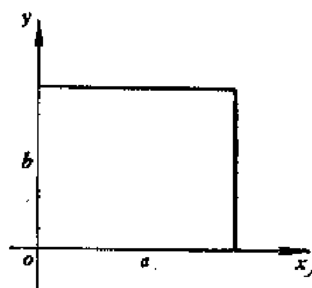


图 20

例 1. 求长方形对其一边的轉动慣量,在上式中 $y = b$,所以

$$I_y = \int_0^a bx^2 dx = \frac{a^3 b}{3} = \frac{1}{3} a^2 (ab).$$

有时候我們要处理这样的問题：求一个平面积对一条垂直于这平面的軸的轉动慣量．我們假定原图形在 x, y 平面上，軸就是 z 軸． 在 (x, y) 平面上的一点 (x, y) 与 z 軸的距离就是 $\sqrt{x^2+y^2}$，即与原点的距离．这种情况，我們也称为对原点的轉动慣量：

$$I_z = I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) = I_x + I_y.$$

讀者試自己处理一个旋轉体对其旋轉軸的轉动慣量．

§8. 流 体 压 力

以前曾經涉及过一个力或几个力作用在一个质点上的情况，我們經常遇到这样的問题：并不是一力作用在一个点上，而是分布在一块面积或一块体积上，例如：載沙土的車子，对車旁边的压力；如两个带电的盘子的吸引，如两个球体或其他形状的物体互相吸引的問题，如果我們把物体看成为质点的总合，我們的問题也可以把物体受力的情况看成为諸质点各各受力的总和．

最簡单的例子就是流体的压力，一个平面垂直地插进均匀的流体中去，为了确切起见，我們把 x 軸放在流体面，而把 y 軸的正向向下，插进流体之中．

把面积分为矩形，其长为 x_i，其寬为 Δy． 在水下的深度等于 y_i． 如这一片并不是垂直的，而是水平方向的，那末在这一片上面的流体的压力就等于在这一片上所承担的流体柱的重量，即 $w \cdot y_i x_i \Delta y$，此处 w 表单位体积流体的重量．由流体的性质，在这一片上的旁压力也 $\sim w y_i x_i \Delta y$，所以

$$F = \lim_{n\to\infty} \Sigma w y x \Delta y = w\int_a^b yx\,dy.$$

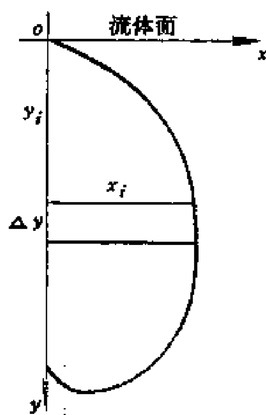


图 21

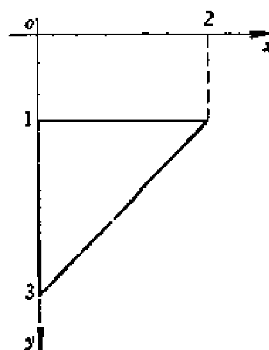


图 22

定理 1. 垂直插进流体的平面积的旁压力等于单位体积流体的重量乘以插进去的面积再乘以重心的深度．

例． 把一块三角板插进水內，这三角板的三頂点各为 (0,1)，(0,3)，(2,1)，斜边方程是

$$x + y = 3,$$

所以

$$F = w\int_1^3 yx\,dy = w\int_1^3 y(3-y)dy = w\left[\frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_1^3 = \frac{10}{3}w.$$

核对：三角形的面积是 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$，重心的深度是 $1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$，由定理 1 可知 $w\cdot 2\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{3}w$.

压力中心．以上的情况看成为一批平行力压在一个垂直面上，即大小如

$$\Delta F_i = wy_i x_i \Delta y$$

的垂直力压在所对应的小片上，这一小片的重心之坐标近似于 $\left(\frac{x_i}{2}, y_i\right)$，这些力可以算出重心，它的坐标就是

$$F\bar{x} = \frac{1}{2}w\int_a^b yx^2\,dy,$$

$$F\bar{y} = w\int_a^b y^2x\,dy,$$

这个 $(\bar{x}, \bar{y})$ 也称为压力中心．

例．上例中的压力中心的坐标是

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{\frac{10}{3}w}\frac{1}{2}w\int_1^3 yx^2\,dy = \frac{3}{20}\int_1^3 y(3-y)^2dy\\ &= \frac{3}{20}\left[\frac{9y^2}{2} - 2y^3 + \frac{1}{4}y^4\right]_1^3 = \frac{3}{5},\\ \bar{y} &= \frac{1}{\frac{10}{3}w}w\int_1^3 y^2x\,dy = \frac{9}{5}.\end{aligned}$$

§9. 功

命一个恆量的力連續地加在一个物体上，使它沿此力的方向移动一个距离 d，則力的大小 F 和距离 d 的乘积称为使这物体移动距离 d 的功．

例如，20 公斤的力把一块石头推进了 10 公尺，則所做的功是

$$w = (20\text{ 公斤})(10\text{ 公尺}) = 200\ (\text{公斤-公尺}).$$

我們現在把这一概念推广到变化的力上去．

例 1．一个圓柱形的水桶，其底的半径是 5 公尺，其高是 20公尺．注满了水．求把所有的水抽出水桶所做的功．

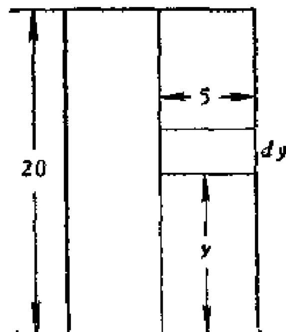


图 23

水桶的縱剖面如图23．現在考虑离桶底 y 公尺的情况．这是一个圓片，体积等于 $\pi\cdot 5^2\cdot dy$（立方公尺），水的重量是每立方公尺的水重一公吨，所以，这圓片的水重等于 $25\pi dy$（公吨），这需要升高 $(20-y)$ 公尺．

把这圆片的水升到桶口所做的功等于

$$25\pi(20-y)dy,$$

所以总功等于

$$W=25\pi\int_0^{20}(20-y)dy=25\pi\left[-\frac{(20-y)^2}{2}\right]_0^{20}=5000\pi(\text{公尺,吨}).$$

例 2. 求将弹簧伸长 S 所作的功 P. 設张力 $p=Cs$, 此处 C 是常数, 则

$$P=\int_0^S pds=C\int_0^S sds=\frac{CS^2}{2}.$$

例 3. 設活塞的面积为 Q, 单位面积上承受的气体膨胀的压力是 p, 求气体膨胀时, 将活塞由距气缸底 S_1 处推至距汽缸底 S_2 所作的功 P:

$$P=Q\int_{S_1}^{S_2}pds.$$

由于 Boyle-Mariotte 定律

$$pv=C,$$

而 $v=Qs$. 作变换 $s=\frac{v}{Q}$, 则得

$$P=\int_{v_1}^{v_2}\frac{C}{v}dv=C\log\frac{v_2}{v_1}=C\log\frac{p_1}{p_2}=p_1v_1\log\frac{p_1}{p_2},$$

此处 $v_1=QS_1$, $v_2=QS_2$, p_1 与 p_2 分别表示过程开始与过程終了时的压力.

假定在膨胀时, 气体与周围沒有热流通, 这称为絕热过程. 这时 p 与 v 之間有次之关系:

$$pv^k=C,$$

此处 $k>1$ 与 C 都是常数. 因此

$$P=\int_{v_1}^{v_2}Cv^{-k}dv=\frac{C}{k-1}\left(\frac{1}{v_1^{k-1}}-\frac{1}{v_2^{k-1}}\right).$$

第十二章　多个变元的函数

§1. 变　　数

一直到現在所討論的变数有两种：一种是取自然数值的（或者是取整数值的），这种变数称为离散性的．例如，貫 $\{a_n\}$ 就是离散变数 n 的函数．另一种是取实数值的或連續地取一部分实数的，这种变数称为連續性的．一般平面上的图形 $y = f(x)$ 就是代表連續变数 x 的函数．我們已往所討論的都是仅有一个变元的情況，但是客观事物的变化不一定只有一个因素．往往是在突出地考虑一个因素的作用和影响时，才会出現单变数的情况．一般講来，我們經常遇到的是多种因素的情况，表現成为数学問題也就是多个变数的函数．有时还可能出現无穷个变数的情況．我們現在暂不討論无穷个变数的情況．假定变数的个数是一个定数 n，n 可能是 $1, 2, 3$，也可以是大于 3 的自然数．当 $n = 1, 2, 3$ 时，可以用綫，面，体上的点来說明．当然，当 $n > 3$ 时，不可能有几何空間的明确意义，但是我們仍将保留几何名称．

为了叙述方便，我們用一般的 n，有时仅叙述 $n = 2$ 或 $n = 3$ 的情况．

在講一般的 n 时，讀者最好举出 $n = 2$ 或 $n = 3$ 的情况来細看一下．又在講 $n = 2$ 或 $n = 3$ 时，讀者最好思考一下推到一般 n 有什么困难．这是一个帮助自己复习的方法．

变元既然有两类，我們自然也就有以下几种不同情况：

1°. 有多个离散变元的情况．如重貫

$$a_{lm}, \quad l, m = 0, 1, 2, \cdots$$

及重級数

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{lm}$$

就是有两个离散变元的情况．

2° 多个連續变数的情况．如两个变数 x, y 的函数

$$f(x, y)$$

在 x, y 平面上的一个范围内变化，又如

$$w = xyz, \quad w = x^2 + y^2 + z^2$$

在整个三維空間 (x, y, z) 上定义，而

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

仅在单位球内或表面上定义，即

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1.$$

又如

$$w = \arcsin\frac{x}{a} + \log y + e^z$$

仅在 $|x| \leqslant a, y > 0, -\infty < z < \infty$ 的范圍內定义.

3° 混合的情况. 也就是有一部分变数是离散的，而另一部分是連續的. 例如，在 $[a, b]$ 中定义的函数貫

$$a_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

就属于这种情形.

这几章的目的就是在于研究多变元的情况. 我們先从 2° 型的多变元情况說起.

§ 2. n 維空間

n 維空間与普通的二維、三維空間相似，我們取 n 个互相垂直的軸: $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 空間的点用 n 个实数(有时也用 n 个复数)

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

来表它.

如果这 n 个数 $x_1, \cdots, x_n$ 是一个参变数 t 的函数，即

$$x_1 = \varphi_1(t), \cdots, x_n = \varphi_n(t), a \leqslant t \leqslant b,$$

这样所定义出来的軌迹称为 n 維空間的曲綫.

命

$$A = (a_1, \cdots, a_n)$$

及

$$B = (b_1, \cdots, b_n)$$

代表两点，则

$$x_\nu = a_\nu + t(b_\nu - a_\nu), 1 \leqslant \nu \leqslant n, 0 \leqslant t \leqslant 1$$

代表一个綫段，即由 A 到 B 的綫段；又当 $-\infty < t < \infty$ 时，则代表过 A, B 二点的直綫.

两点

$$P = (x_1, \cdots, x_n),$$

$$Q = (y_1, \cdots, y_n)$$

的距离定义为

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

对任意三点 P, Q, R, 我們有不等式

$$\overline{PQ} + \overline{QR} \geqslant \overline{PR},$$

也就是"三角形的两边之和大于第三边"的性質. 明确些，我們有:

定理 1.

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \cdots + (y_n - z_n)^2}$$
$$\geqslant \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2}.$$

上式仅当三点 $P=(x_1,\cdots,x_n)$, $Q=(y_1,\cdots,y_n)$, $R=(z_1,\cdots,z_n)$ 在一直綫上时取等号.

証. 命

$$x_\nu-y_\nu=a_\nu,\quad y_\nu-z_\nu=b_\nu,$$

則定理 1 轉变为

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2}+\sqrt{\sum_{\nu=1}^n b_\nu^2}\geqslant\sqrt{\sum_{\nu=1}^n(a_\nu+b_\nu)^2}.$$

平方此式，得

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2+\sum_{\nu=1}^n b_\nu^2+2\sqrt{\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2\sum_{\nu=1}^n b_\nu^2}\geqslant\sum_{\nu=1}^n(a_\nu^2+2a_\nu b_\nu+b_\nu^2),$$

于是只要証明

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2\sum_{\nu=1}^n b_\nu^2\geqslant\left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu b_\nu\right)^2.$$

現在考慮

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2\sum_{\mu=1}^n b_\mu^2-\sum_{\nu=1}^n a_\nu b_\nu\sum_{\mu=1}^n a_\mu b_\mu\\&=\sum_{\nu<\mu}(a_\nu^2b_\mu^2+a_\mu^2b_\nu^2-2a_\nu b_\nu a_\mu b_\mu)=\sum_{\nu<\mu}(a_\nu b_\mu-a_\mu b_\nu)^2.\end{aligned}$$

这当然是 $\geqslant 0$ 的. 因而得出定理 1 的不等式.

如果取等号，則得

$$a_\nu b_\mu=a_\mu b_\nu,$$

即

$$\frac{a_\nu}{b_\nu}=\frac{a_\mu}{b_\mu},$$

亦即

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

命之为 t，則得 $a_\nu=tb_\nu$. 所以

$$x_\nu=a_\nu+y_\nu=tb_\nu+y_\nu,\quad y_\nu=b_\nu+z_\nu,$$

从而

$$x_\nu=tb_\nu+b_\nu+z_\nu,$$

即三点都在直綫

$$(\lambda b_1+z_1,\cdots,\lambda b_n+z_n),\quad -\infty<\lambda<\infty$$

之上.

§3. 邻　域

我們今后将常用以下的一些区域:

1) 閉区域

$$a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\cdots,a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$$

是一个长方体，我們把它記之为

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n].$$

略去所有的等号，卽得开区域

$$a_1 < x_1 < b_1, \cdots, a_n < x_n < b_n.$$

我們以

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n)$$

表它．长方体的边长各为 $b_1 - a_1, \cdots, b_n - a_n$，体积等于 $(b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n)$．这个方体的中心是

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \cdots, \frac{a_n + b_n}{2}\right).$$

定义 1. 以一点 $A = (a_1, \cdots, a_n)$ 为中心的任一开长方体：

$$|x_\nu - a_\nu| < \delta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n$$

称为这点 A 的邻域．

2）适合于

$$x_\nu \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n.$$
$$x_1 + \cdots + x_n \leqslant h \quad (h > 0)$$

的点所成的集合称为閉单純体．当 $n = 1$ 时，这是一綫段；当 $n = 2$ 时，这是一个三角形；$n = 3$ 时，这是一个四面体．

去掉所有的等号，我們得出开单純体．

3）适合于

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a_\nu)^2 \leqslant r^2 \quad (\text{或} < r^2)$$

的点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 所成的集合称为以点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 为中心、以 r 为半径的閉球（或开球）．

我們有时也把以 $(a_1, \cdots, a_n)$ 为中心的开球作为点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域．为了区别起見，我們称这样的邻域为球形邻域．

定理 1. 一点 A 的邻域中一定包有一个 A 的球形邻域；反之，在一个 A 的球形邻域內，也一定包有一个 A 的邻域．

證． 給了一个长方体邻域

$$|x_\nu - a_\nu| < \delta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

其中显然包有球形邻域

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a_\nu)^2 < \min(\delta_1^2, \cdots, \delta_n^2).$$

反之，在球形邻域

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - a_\nu)^2 < r^2$$

中，也显然包有长方体邻域

$$|x_\nu - a_\nu| < \frac{r}{\sqrt{n}}, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

定义 2. 命M表一个点集. 如果一点P（不一定属于M）的任一邻域都包有M中的点，则P称为集M的聚点.

定义 3. 包有所有的聚点的集合M称为闭集.

例如，闭长方体、闭球、闭单純体都是闭集.

§4. 域

定义 1. 命M表一点集. A为M的某一个点，如果点A有一个充分小的邻域亦在M中，則A点称为M的內点.

仅有內点的集称为开域.

由上面的定理可知，內点的定义并不因球形邻域还是长方体邻域而变. 开域的定义也如此.

例如，开长方体，开单純体，开球都是开域.

定义 2. 开域M的聚点，不在M中的称为边界点，边界点的全体称为M的边界.

开域加上边界称为闭域.

例如，开长方体

$$a_\nu < x_\nu < b_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n$$

的边界是由$2n$个"面"所組成的($x_\nu = a_\nu$, $x_\nu = b_\nu$). 而閉長方体是閉域.

球$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 < r^2$的边界是$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. 閉球是閉域.

定理 1. 閉域是閉集，也就是閉域包有一切聚点.

証. 命A为閉域$\overline{D}$的一个聚点，則A的任一邻域一定包有$\overline{D}$的点. 如果任一邻域都包有$\overline{D}$的內点，則A一定是$\overline{D}$的內点或边界点. 如果A的邻域

$$|x_\nu - a_\nu| < \delta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

仅包有$\overline{D}$的边界点. 命$B = (b_1, \cdots, b_n)$为这样的一点. 在(1)內，我們可以做B的邻域，由于B是边界点，所以其中一定包有$\overline{D}$的內点，也就是(1)中有$\overline{D}$的內点，因而A是$\overline{D}$的边界点. 定理証毕.

定义 3. 如果一个点集M的所有点都可以包在一个长方体內，就称这个点集为有界点集.

定义 4. 如果域中任二点都可以用完全在这域內的折綫联起来，就称这域为联通域.

如图 24 和图 25 是平面上的联通域，又如球面(图 26)与环面(图 27)也是联通的，但图 29 是不联通的.

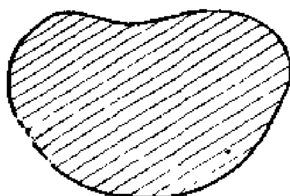


图 24

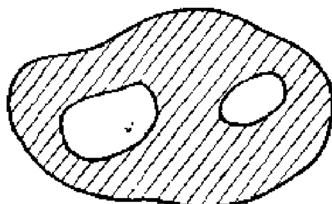


图 25

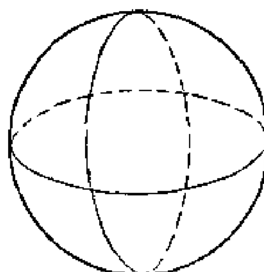
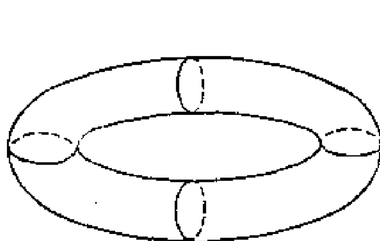
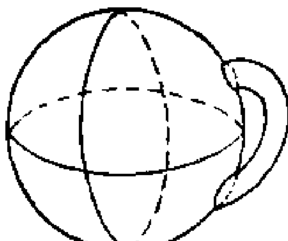


图 26



环

图 27



带把的茶壺

图 28



卡連环

图 29

§5. 极限与連續

假定函数

$$f(x_1, \cdots, x_n)$$

在一点 $A=(a_1, \cdots, a_n)$ 的一个邻域内定义(或者更一般些，在一个以 A 为聚点的点集 M 上定义),但在 A 点可能并沒有定义.

定义. 如果存在有限数 L，給了任意 $\varepsilon>0$,我們可以找出 $\delta>0$，使当

$$|x_\nu-a_\nu|<\delta, \quad \nu=1, \cdots, n \tag{1}$$

时有

$$|f(x_1, \cdots, x_n)-L|<\varepsilon,$$

則称为当点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 趋于点 $A=(a_1, \cdots, a_n)$ 时 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 趋于极限 L (有时在条件 (1) 外我們更加上 x 属于 M 这一条件). 記为

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \cdots\cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, \cdots, x_n)=L.$$

有时为了簡单起見,我們也写作

$$\lim_{x\to A} f(x)=L.$$

不难証明,如果把邻域 (1) 换为球形邻域,結果也是一样的.

仿此可以建立函数的无穷极限的概念. 在 $L=\infty, +\infty$ 和 $-\infty$ 的情况,不等式

$$|f(x_1, \cdots, x_n)-L|<\varepsilon$$

各換为不等式

$$|f(x_1, \cdots, x_n)|>E, \quad f(x_1, \cdots, x_n)>E$$

或

$$f(x_1, \cdots, x_n)<-E,$$

此处E是預給的任意正数.

也可以定义 $x_1 \to +\infty, \cdots, x_n \to +\infty$ 的情况,卽对任一 $\varepsilon > 0$, 有 $\Delta > 0$ 存在使 $x_1 > \Delta, \cdots, x_n > \Delta$ 时

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - L| < \varepsilon.$$

記为

$$\lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \cdots\cdots \\ x_n \to +\infty}} f(x_1, \cdots, x_n) = L.$$

現在所談极限的情况比一个变数复杂得多了. 就二維空間来說,就有各种綫路来接近一点. 例如,函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

当沿綫 $y = \lambda x$ 接近于(0, 0)时,得

$$\lim_{x \to 0} f(x, \lambda x) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2},$$

可見每一个直綫方向的极限都存在,但是数値随着方向而改变.

又如

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2},$$

則由于先后求极限的次序不同,而結果各异. 如

$$\lim_{y \to 0} [\lim_{x \to 0} f(x, y)] = \lim_{y \to 0} \frac{-y^2 + y^3}{y^2} = -1,$$

$$\lim_{x \to 0} [\lim_{y \to 0} f(x, y)] = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x^3}{x^2} = 1.$$

这說明了处理多变数函数的极限时必須小心,很可能

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}, \qquad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0}, \qquad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0}$$

所代表的是不同的东西. 以上例言,第一种极限不存在,第二第三各异.

由此可見,任意地交换两个极限号会造成严重錯誤. 但有了以下的定理,就能保証极限的交换.

定理 1. 假定 1°

$$L = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$$

存在; 2° 函数

$$\varphi(y) = \lim_{x \to a} f(x, y)$$

存在,則得

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y);$$

又如果 3°

$$\psi(x) = \lim_{y \to b} f(x, y)$$

存在,則两个极限手續可交换.

証. 由定义,給了 $\varepsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$, 使

$$|x - a| < \delta, \quad |y - b| < \delta$$

时

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

使 $x \to a$, 則得当 $|y - b| < \delta$ 时

$$|\varphi(y) - L| < \varepsilon,$$

即得定理.

定义. 如果

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ \cdots\cdots \\ x_n \to x_n'}} f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1', \cdots, x_n'),$$

就說 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在点 $(x_1', \cdots, x_n')$ 处連續,也就是給了 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$ 存在,使

$$|x_1 - x_1'| < \delta, \cdots, |x_n - x_n'| < \delta$$

时

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - f(x_1', \cdots, x_n')| < \varepsilon.$$

已經討論过的函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0, \quad f(0, 0) = 0$$

除原点以外无处不連續. 但在 $x = 0$, $y = 0$ 这一点并不連續. 对任何一个固定的 x, $f(x, y)$ 是 y 的連續函数, 而对一个固定的 y, $f(x, y)$ 也是 x 的連續函数. 这現象告訴我們对各变数的連續函数,并不一定是对两个变数的連續函数. 原因是前者我們仅考虑沿平行于 x 軸或 y 軸方向的趋限法, 而我們的全面趋限法却是各种不同的趋限法都要考虑.

定理 2. 假定

$$\varphi_1(t_1, \cdots, t_m), \cdots, \varphi_n(t_1, \cdots, t_m)$$

是在点 $(t_1', \cdots, t_m')$ 附近的連續函数,并且命

$$x_\nu' = \varphi_\nu(t_1', \cdots, t_m'), \quad \nu = 1, \cdots, n.$$

假定

$$u = f(x_1, \cdots, x_n)$$

是在点 $(x_1', \cdots, x_n')$ 附近的連續函数,則

$$u = f[\varphi_1(t_1, \cdots, t_m), \cdots, \varphi_n(t_1, \cdots, t_m)]$$

是在 $(t_1', \cdots, t_m')$ 附近的連續函数.

証. 对任一 $\varepsilon > 0$, 我們有 $\delta > 0$, 使

$$|x_\nu - x_\nu'| < \delta, \quad \nu = 1, \cdots, n$$

时

$$|f(x_1, \cdots, x_n) - f(x_1', \cdots, x_n')| < \varepsilon.$$

又有 $\eta > 0$ 存在,使当

$$|t_\mu - t_\mu'| < \eta, \quad \mu = 1, \cdots, m$$

时

$$|\varphi_\nu(t_1, \cdots, t_m) - \varphi_\nu(t_1', \cdots, t_m')| < \delta, \quad \nu = 1, \cdots, n,$$

卽

$$|x_\nu - x_\nu'| < \delta.$$

因而得出本定理.

§6. 域内的連續函数

与一个变数相仿,我們有以下的一批定理(証明从略).

定理 1. 假定 $f(x, y)$ 是在某一联通域 D 中的連續函数, 如果 D 中有二点使 $f(x, y)$ 値异号,卽

$$f(x_0, y_0)f(x_1, y_1) < 0,$$

則此域中必有一点 (x', y') 使

$$f(x', y') = 0.$$

定理 2 (Bolzano-Weierstrass). 从任一有界貫

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$$

中一定能够选出一个趋于极限的子貫

$$(x_{n_1}, y_{n_1}), (x_{n_2}, y_{n_2}), \cdots, (x_{n_k}, y_{n_k}), \cdots$$
$$(n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots, n_k \to \infty).$$

定理 3. 函数 $f(x, y)$ 在一个有界閉域中定义且連續,則它一定有有限的上下界 m 及 M, 卽

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

定理 4. 在一个有界閉域上定义且連續的函数 $f(x, y)$,一定在其上取最大値与最小値.

定理 5 (Heine-Borel). 若平面上的有界閉集 M 能被开域 σ 的无穷組 $\Sigma = \{\sigma\}$ 所遮盖,則恆能从其中选出有限个开域

$$\sigma_1, \cdots, \sigma_n,$$

它也能遮盖 M 的全部.

定理 6. 在有界閉域 D 上連續的函数 $f(x, y)$,一定在其上一致連續,換言之,对任一 $\varepsilon > 0$, 我們可以找到 $\delta > 0$, 使 D 中的任意二点 $(x, y), (x', y')$ 之适合于

$$|x - x'| < \delta, \quad |y - y'| < \delta$$

者,常有

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

这些定理証明的原則都和一个变数的情形一样,讀者試自己証明. 这些定理还有更一般的抽象形式,为抽象空間的基本性質.

§7. 偏微商与全微分

定义

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f$$

为 $f(x, y, z)$ 对 x 的偏微商．类似地，可以定义 $D_y f$, $D_z f$.

这函数的偏微分的和

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

称为函数 $f(x, y, z)$的全微分．

全微分的意义也可以用下面的方法得出：

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ &\quad + f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z) \\ &\quad + f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z).\end{aligned}$$

故变量的主要部分就是全微分．

假定 x, y, z 不是自变量而是参变数 t 的函数，则得公式

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{1}$$

全微分显然有以下的法则：

$$\begin{aligned}d(u \pm v) &= du \pm dv, \\ d(uv) &= \frac{\partial}{\partial x}(uv)dx + \frac{\partial}{\partial y}(uv)dy \\ &= u\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \\ &= u\,dv + v\,du. \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right)dy = \frac{vdu - udv}{v^2}.\end{aligned}$$

这虽然仍然是旧形式，但是有了新的更广泛的内容．

又如果 x, y, z 是 u, v 的函数，即

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

则

$$f(x, y, z) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)].$$

对 u, v 的偏微商等于

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

証法与公式 (1) 的証明完全相同．

乘以 du, dv 而相加，得

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

例 1. $u = x^y (x > 0)$ 的偏微商是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \log x.$$

而

$$du = yx^{y-1}\,dx + x^y \log x\,dy.$$

如果 $y = \sin x$，則

$$\frac{du}{dx} = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x}\cos x \log x = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right).$$

例 2. 命

$$z = y \cdot f(x^2 - y^2),$$

此处 $f(u)$ 是一个有微商的任意函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xyf'(x^2 - y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(x^2 - y^2) - 2y^2f'(x^2 - y^2).$$

由此得

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(x^2 - y^2) + \frac{1}{y}f(x^2 - y^2) - 2yf'(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2},$$

所以函数 z 适合于

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

这是偏微分方程.

例 3. 理想气体的体积 v，压力 p 及絕对溫度 T 之間有关系式

$$pv = RT(R \text{ 是常数}).$$

如果把 T 看作为 pv 的函数，則有

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}.$$

把 v 看为 p, T 的函数，即 $v = \frac{RT}{p}$，則有

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}.$$

把 p 看为 v, T 的函数又有

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}.$$

由此得出热力学上的重要公式

$$\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{v^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{v}{R} = -\frac{RT}{pv} = -1.$$

注意，异于

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt},$$

我們現在并沒有公式

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial t}.$$

例 4. 由

$$d\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},$$

我們也可以求出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}\right)=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

例 5. 由

$$d\frac{x}{x^2+y^2+z^2}=\frac{(y^2+z^2-x^2)dx-2xydy-2xzdz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

可以求出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

§8. 齐次函数

函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 之适合于

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^{\lambda}f(x_1,\cdots,x_n) \tag{1}$$

者，称为 λ 次齐次函数.

例如，$x^2+7xy+9y^2$ 是二次齐次函数，而

$$\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x(x+y)}\mathrm{tg}\frac{x}{y}$$

就是 0 次齐次式.

把 (1) 式的两边对 t 微商得

$$x_1\frac{\partial f(tx_1,\cdots,tx_n)}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f(tx_1,\cdots,tx_n)}{\partial x_n}=\lambda t^{\lambda-1}f(x_1,\cdots,x_n).$$

命 $t=1$，即得

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=\lambda f(x_1,\cdots,x_n). \tag{2}$$

这就是关于齐次函数的 Euler 公式.

定理 如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 λ 次齐次式，且有連續偏微商，則有

$$\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\frac{\partial f}{\partial x_\nu}=\lambda f.$$

反之，任何有連續偏微商的函数，如果适合上式，則是 λ 次齐次式。

證. 我們現在証明其逆. 命

$$\varphi(t)=\frac{f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)}{t^\lambda}.$$

当 $t>0$ 时这函数是有定义且連續的，求 $\varphi'(t)$，其分子等于

$$t^\lambda\frac{d}{dt}f(tx_1,\cdots,tx_n)-\lambda t^{\lambda-1}f(tx_1,\cdots,tx_n)$$

$$=t^\lambda\sum_{\nu=1}^n x_\nu\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(tx_1,\cdots,tx_n)-\lambda t^{\lambda-1}f(tx_1,\cdots,tx_n).$$

由假定这等于 0，卽 $\varphi'(t)=0$. 由此 $\varphi(t)$ 与 t 无关. 命 $\varphi(t)=c$，再命 $t=1$，可見 $c=f(x_1,\cdots,x_n)$. 因此

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^\lambda f(x_1,\cdots,x_n).$$

§9. 切 平 面

命

$$S:\qquad z=f(x,y)$$

代表一曲面. 如果

$$C:\qquad x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

則当 t 变化时，x,y,z 就在曲面上画出一条曲綫 C. 由 §14.1 可知，这曲綫在 (x,y) 点的切綫方程是

$$\frac{X-x}{\varphi'}=\frac{Y-y}{\psi'}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'}=\tau.$$

由此得出

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'\tau+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'\tau=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y).\tag{1}$$

这称为切面方程. 这当然假定了曲面上任何光滑曲綫都有微商，而其切綫都在平面(1)上.

如果曲面是用参变数法表出的：

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v),$$

把 v 看成为常数，則得一曲綫，这曲綫在 (u,v) 的切綫已知其为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\psi}{\partial u}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\chi}{\partial u}}.$$

同法，如果把 u 看成常数，則有切綫

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\psi}{\partial v}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\chi}{\partial v}},$$

这两条切綫定一平面、这平面經过点 (x, y, z)，所以是

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

的形式．又因为它經过两条直綫，所以

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial u}+B\frac{\partial\psi}{\partial u}+C\frac{\partial\chi}{\partial u}=0,$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial v}+B\frac{\partial\psi}{\partial v}+C\frac{\partial\chi}{\partial v}=0.$$

因此得出

$$A:B:C=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

这样得出平面是

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}(Y-y)+\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}(Z-z)=0.$$

特别取 $\varphi(u, v)=u, \psi(u, v)=v, \chi(u, v)=f(u, v)$，这就是刚才得出的切面方程，是切面方程的参变数表示法形式．但須注意，三个行列式同为零的情况必須除外．

習題． 試取三点 $(u, v), (u+\Delta u, v), (u, v+\Delta v)$ 作一平面且命 $\Delta u\to 0, \Delta v\to 0$ 的方法而求出切面方程．

隐函数表达法的切面方程．方程

$$F(x, y, z)=0$$

也表示曲面，把 z 看成 x, y 的函数，求偏微商

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

所以得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z},$$

因而切面方程是

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0.$$

例． 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上一点 (x, y, z) 的切面方程是

$$\frac{2x}{a^2}(X-x)+\frac{2y}{b^2}(Y-y)+\frac{2z}{c^2}(Z-z)=0,$$

即

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

§ 10. 沿一定方向的微商

在一点 (x_0, y_0, z_0) 函数 $f(x, y, z)$ 可能有各个不同方向的微商. 命

$$x=x_0+t\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cos\beta,\quad z=z_0+t\cos\gamma,$$

$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是方向余弦，則

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)-f(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

就定义为函数 $f(x, y, z)$ 沿方向 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的微商，記为

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \mathbf{l}},$$

而 $\mathbf{l}$ 表示方向 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

立刻得出

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

在許多物理問題中，函数 $f(x, y, z)$ 的方向变化率是有用的. 例如，温度場就是：如果給定了所考察物体的每点 (x, y, z) 的温度 $f(x, y, z)$，則热的分布和轉移的規律自然地依賴于温度沿着一切方向升降的速度.

我們現在提出这样的問題：函数在那一个方向增加得快，并且快得怎样？我們用以下前已証过的不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2),$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ 时取等号，即得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|^2\leqslant\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

这是因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 故最大大不过

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

且仅当

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\cos\alpha}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\cos\beta}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\cos\gamma}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

时最大，即取方向

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},\ \text{等等}$$

增大得最快．又最小不过

$$-\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

且仅当

$$\cos\alpha=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},\text{等等}$$

时最小．

我們定义矢量

$$\mathbf{g}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

为函数 f 的梯度，有时用 grad f 或 ∇f 表它，其长度

$$|\mathbf{g}|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

如此得出

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}=|\mathbf{g}|\cos(\mathbf{g},\mathbf{l}).$$

也就是 f 对方向 $\mathbf{l}$ 的微商等于 f 的梯度在矢量 $\mathbf{l}$ 上的投影．

§11. 高阶偏微商

偏微商还可以再求偏微商，因而得出高阶偏微商．例如，函数 $f(x, y)$ 的二阶偏微商有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

或

$$f''_{xx},\ f''_{xy},\ f''_{yx},\ f''_{yy}.$$

有时候也写成为

$$f_{xx},\ f_{xy},\ f_{yx},\ f_{yy}.$$

f''_{xy} 与 f''_{yx} 是由不同次序求微商而得来的，其結果是否相等需要研究．例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{当}\quad x^2+y^2>0;\\ 0, & \text{当}\quad x=y=0\end{cases}$$

有

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],\quad \text{当}\quad x^2+y^2>0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0.$$

当 x 取 0 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{x=0}=-y$，所以 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\Big|_{x=0}\right]=-1$，即

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=-1.$$

但另一方面可証

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = +1.$$

这例子說明了求微商的次序不同,所求出的結果各异,但是幸亏这种情况并不經常遇到. 在以下的条件下,求微商的次序是可以交換的.

定理 1. 假定 1° 函数 $f(x, y)$ 在开域 D 中定义; 2° f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} 都存在;且 3° 作为 x, y 的函数, f''_{xy}, f''_{yx} 在某点 (x_0, y_0) 是連續的,則

$$(f''_{xy})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = (f''_{yx})_{\substack{x=x_0,\\y=y_0}}$$

証. 考察

$$W = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk},$$

式中 h, k 都异于 0 且充分小,使点 (x_0+h, y_0+k) 在 D 之中.

命

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k}.$$

由 2° 可知

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0+k) - f'_x(x, y_0)}{k}$$

存在且連續.

$$W = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

由 Lagrange 定理得

$$W = \varphi'(x_0+\theta h) = \frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta h, y_0)}{k},$$

$$0 < \theta < 1.$$

由于 f''_{xy} 存在,所以再用一次 Lagrange 公式得

$$W = f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta' k), \quad 0 < \theta' < 1.$$

同样方法可得

$$W = f''_{yx}(x_0+\tau h, y_0+\tau' k), \quad 0 < \tau, \tau' < 1,$$

即得

$$f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta' k) = f''_{yx}(x_0+\tau h, y_0+\tau' k).$$

命 $h, k \to 0$, 由 3° 可知

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

上例失敗的原因是

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), \quad x^2+y^2 > 0$$

在 $x=0$, $y=0$ 并不連續.

更一般些

$$f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{yxx}$$

等等都可以在交換两个的基础上推出它們相等的条件. 因而有

定理 2. 假定 $f(x,y)$ 定义于一开域中. 在这域中有一切 k 阶連續偏微商，則任一 k 阶偏微商的求得与微分运算的次序无关.

以后我們不再为偏微商的次序操心，經常假定是可以交换次序的情况，我們常写成为

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma},\quad \alpha+\beta+\gamma=k,$$

而不編其次序了.

再研究高阶微分：由

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

可得

$$\begin{aligned}
d^2u&=d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right)+d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)=dx\left(d\frac{\partial f}{\partial x}\right)+dy\left(d\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&=dx\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\right)+dy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)\\
&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.
\end{aligned}$$

同样

$$d^3u=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

我們引进微分記号

$$d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\partial^n f}{\partial x^l\partial y^{n-l}}dx^l\,dy^{n-l},$$

这儿 $\binom{n}{l}=\frac{n!}{l!(n-l)!}$ 是二項式系数，这可以用归納法証明. 因为

$$\begin{aligned}
d^{n+1}u&=d\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^l\partial y^{n-l}}\right)dx^l\,dy^{n-l}\right)\\
&=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{l+1}\partial y^{n-l}}dx+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^l\partial y^{n-l+1}}dy\right)dy^{n-l}\,dx^l\\
&=\sum_{l=1}^{n}\left[\binom{n}{l-1}+\binom{n}{l}\right]\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^l\partial y^{n+1-l}}dx^l\,dy^{n+1-l}+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}dx^{n+1}+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1}}dy^{n+1}\\
&=\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^l\partial y^{n+1-l}}dx^l\,dy^{n+1-l}.
\end{aligned}$$

这是在把 dx 与 dy 作为自变量的微分的情况下进行的，即把 dx 与 dy 当作常量. 如果 dx 与 dy 不算作常量，我們的結論必須修改，我們有

$$\begin{aligned}
d^2u&=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)+d\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\\
&=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial u}{\partial x}d^2x+\frac{\partial u}{\partial y}d^2y.
\end{aligned}$$

例如，在求函数

$$u = u(x, y), \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

的 $\frac{d^2u}{dt^2}$ 时，可以发現

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t)$$

及

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi'^2(t) + 2\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}\varphi'(t)\psi'(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\psi'^2(t)$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial x}\varphi''(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\psi''(t).$$

但如果錯誤地运用公式

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot dy^2,$$
$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt,$$

則所得出来的結果将与事实不符了.

§12. 隐 函 数

在什么条件之下，可以保証由

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

决定的函数 z，作为 x, y 的函数的連續性和可微分性，我們有以下的定理.

定理 1. 假定 $F(x, y, z)$ 为一个三变数的函数，且适合以下的条件：1° $F(x_0, y_0, z_0) = 0$；2° 在以 (x_0, y_0, z_0) 为中心的一邻域

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta, \quad |z - z_0| < \delta \tag{2}$$

中 $F(x, y, z)$ 是連續的；3° 当 x, y 固定时，$F(x, y, z)$ 是 z 的单調函数（在以下証明中，我們假定它随 z 增加而单調增加），則有以下的結論：在 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域内，(1) 确定了 z 是 x, y 的单値連續函数 $z = f(x, y)$ 且 $z_0 = f(x_0, y_0)$.

証. 1) 单値性.

先考慮函数 $F(x_0, y_0, z)$. 由 1° 及 3° 可知，当 $z < z_0$ 时 $F(x_0, y_0, z) < 0$，且当 $z > z_0$ 时 $F(x_0, y_0, z) > 0$. 所以有 δ 存在，使

$$F(x_0, y_0, z_0 - \delta) < 0, \quad F(x_0, y_0, z_0 + \delta) > 0.$$

再考慮函数

$$F(x, y, z_0 - \delta), \quad F(x, y, z_0 + \delta).$$

我們一定有一个邻域

$$|x - x_0| < \delta_0, \quad |y - y_0| < \delta_0, \tag{3}$$

在其中（由性質 2°）

$$F(x, y, z_0 - \delta) < 0, \quad F(x, y, z_0 + \delta) > 0. \tag{4}$$

在区間 (3) 中任一点 $(\bar{x}, \bar{y})$，我們考慮单变数 z 的函数

$$F(\bar{x}, \bar{y}, z).$$

由 (4) 显然有

$$F(\bar{x}, \bar{y}, z_0 - \delta) < 0, \quad F(\bar{x}, \bar{y}, z_0 + \delta) > 0,$$

从 3° 可以推得有唯一的 $\bar{z}$ 使

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0, \quad z_0 - \delta < \bar{z} < z_0 + \delta,$$

也就是在

$$|x - x_0| < \delta_0, \quad |y - y_0| < \delta_0, \quad |z - z_0| < \delta$$

之中，由 (1) 定义了一个单值函数 $z = f(x, y)$.

2) 連續性.

如果取 $\bar{x} = x_0$, $\bar{y} = y_0$, 則得 $z_0 = f(x_0, y_0)$. 如果取 δ 是任与的 $\varepsilon > 0$，我們一定有 $\delta_0 > 0$ 存在，使在

$$|x - x_0| < \delta_0, \quad |y - y_0| < \delta_0$$

中

$$|z - z_0| < \varepsilon,$$

即

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

这証明了在 (x_0, y_0) 处，$f(x, y)$ 的連續性.

又对 (3) 中任一点 (x, y)，$f(x, y)$ 的連續性也可以类似地証明.

定理 2. 假定 $F(x, y, z)$ 为一个三变数的函数，且适合以下的条件：1° $F(x_0, y_0, z_0) = 0$；2° 在以 (x_0, y_0, z_0) 为中心的一邻域

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta, \quad |z - z_0| < \delta$$

中，$F(x, y, z)$ 及 $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ 是存在且連續的；3° $\left.\dfrac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}} \neq 0$. 除去定理 1 中的一切結論外，还可以証明在 $x = x_0$, $y = y_0$ 附近 $f(x, y)$ 有連續偏微商 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

証. 由 3° 我們不妨假定 $\left.\dfrac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0}} > 0$，因而可以假定有 $\delta' > 0$ 存在，使

$$|x - x_0| < \delta', \quad |y - y_0| < \delta', |z - z_0| < \delta'$$

时，$F'_z(x, y, z) > 0$. 由此推出 $F(x, y, z)$ 适合于定理 1 的所有的条件，因而得出定理 1 所有的結論. 今往証明 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 的連續性.

給 x, Δx 及 y. 命 $f(x + \Delta x, y) = z + \Delta z$. 由

$$F(x + \Delta x, y, z + \Delta z) = 0 \quad 及 \quad F(x, y, z) = 0$$

显然可見

$$\Delta F = F(x + \Delta x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z) = 0.$$

由全增量公式可知

$$0 = \Delta F = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta z,$$

此处 α, β 随 $\Delta x \to 0, \Delta z \to 0$ 时而趋于零，卽得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y, z) + \alpha}{F'_z(x, y, z) + \beta}.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{F'_x[x, y, f(x, y)]}{F'_z[x, y, f(x, y)]}.$$

分子分母都是連續函数，且分母非零，因而 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是 x, y 的連續函数，同法 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 也是 x, y 的連續函数.

定义. 一个函数 $F(x, y, z)$ 如果有 n 阶連續偏微商，則称为属于 C^n 类.

以上的定理証明了，如果在某点附近 $F(x, y, z)$ 属于 C^1 类，則由 $F(x, y, z) = 0$ 决定的函数 z 也属于 C^1 类 $\left(\text{如果 } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0\right)$.

更一般些有

定理 3. 如果在某点附近 $F(x, y, z)$ 属于 C^n 类，而且在該点 $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$，則由 $F(x, y, z)$ 所定义的函数 $z = f(x, y)$ 也属于 C^n 类.

我們将不証明这一定理，而仅指出 $n = 2$ 的情况：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}\right) \\
&= \left[-F'_z\frac{\partial}{\partial x}F'_x + F'_x\frac{\partial}{\partial x}F'_z\right]\Big/F'^2_z \\
&= \left[-F'_z\left(F''_{xx} + F''_{xz}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F'_x\left(F''_{xz} + F''_{zz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\Big/F'^2_z \\
&= \frac{2F'_x F'_z F''_{xz} - F'^2_z F''_{xx} - F'^2_x F''_{zz}}{F'^3_z}.
\end{aligned}$$

§ 13. Taylor 展 开

命 $f(x, y)$ 表 x, y 的函数，以下需要多少阶偏微商就假定它有多少阶偏微商.

命

$$\varphi(t) = f(a + th, b + tk),$$

所以

$$\varphi(0) = f(a, b), \quad \varphi(1) = f(a + h, b + k).$$

由带余項的 MacLaurin 公式可知

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^n(0)}{n!} + \frac{\varphi^{n+1}(\theta)}{(n+1)!},$$
$$0 < \theta < 1,$$

另一方面

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f,$$

因而得出

$$\varphi^{(p)}(t)=\frac{d^p\varphi}{dt^p}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f=\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}h^r k^{p-r}\frac{\partial^p f}{\partial x^r\partial y^{p-r}}.$$

故

$$\varphi^{(p)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}$$

及

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x,y)\Big|_{\substack{x=a+\theta h\\y=b+\theta k}}.$$

代入原式,即得 Taylor 公式

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x,y)\Big|_{\substack{x=a+\theta h\\y=b+\theta k}}.$$

在公式中如果以 x 替 a, y 替 b, 自变数的改变量 h, k 各以 dx 及 dy 表示, 且命

$$\Delta f(x,y)=f(x+dx,y+dy)-f(x,y).$$

如此得

$$\Delta f(x,y)=df(x,y)+\frac{d^2f(x,y)}{2!}+\cdots+\frac{d^nf(x,y)}{n!}+\left[\frac{d^{n+1}f(x,y)}{(n+1)!}\right]_{\substack{x+\theta dx\\y+\theta dy}}.$$

与 Lagrange 公式相仿,我們有

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=hf'_x(x+\theta h,y+\theta k)+kf'_y(x+\theta h,y+\theta k),$$
$$0<\theta<1.$$

§14. 极大与极小

假定 $f(x,y)$ 在域 D 内定义,并且 (a,b) 是 D 的内点.如果 (a,b) 有一个邻域, $f(a,b)$ 常不小于邻域中的其他的 $f(x,y)$, 则 $f(a,b)$ 称为极大. 同法定义极小.

我們現在假定 $f(x,y)$ 有連續偏微商存在,以下用到 r 次,就假定它有 r 次存在.

考虑函数

$$\varphi(t)=f(a+\lambda t,b+\mu t),\quad \lambda^2+\mu^2>0,$$

这是 t 的函数,且当 $t=0$ 时取极大值. 因此可知,极值的必要条件为

$$\varphi'(0)=0,$$

即对任意的 λ, μ 常有

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\mu\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_{\substack{x=a\\y=b}}=0.$$

特别取 $\lambda=1, \mu=0$ 及 $\lambda=0, \mu=1$, 可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=0.$$

由此可見,一个多元函数在某点(內点)为极大值或极小值,只有当在該点的每个偏微商等于 0 或不存在时才有可能. 又

$$\varphi''(0)=\left(\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\lambda\mu\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\mu^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}.$$

如果对所有的 λ, μ $(\lambda^2+\mu^2>0)$ 我們常有

$$\varphi''(0)<0,$$

对取任何方向而言,则 $f(x, y)$ 在 (a, b) 点所取的值是极大值,也就是如果用 Lagrange 公式

$$f(x, y)-f(a, b)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\lambda^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\lambda\mu+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mu^2,$$

此处 $\lambda=x-a, \mu=y-b$, 而

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

中的 x, y 都代以 $a+\theta(x-a), b+\theta(y-b), 0<\theta<1$, 则当 x, y 充分接近于 a, b 时, $f(x, y)<f(a, b)$, 因而 $f(a, b)$ 是极大值.

因此我們的間題一变而为怎样的 A, B, C 可以对任意的不全为 0 的 λ, μ

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2<0.$$

显然需要 $A<0$. 又由

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2=A\left(\lambda+\frac{B}{A}\mu\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\mu^2 \tag{1}$$

可知,也需要 $C-\frac{B^2}{A}<0$. 不然,我們可以取 $\mu=1$ 及 $\lambda=-\frac{B}{A}$,而使 $A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2$ 为非負.

反之,如果

$$A<0, \quad C-\frac{B^2}{A}<0,$$

则由 (1) 可知,常有 ($\lambda^2+\mu^2=0$ 除外)

$$A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2<0.$$

因而得出:

如果在 $x=a, y=b$ 这一点

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)<0,$$

则 $f(x, y)$ 在这一点取极大值.

总之,求两个变数的函数 $f(x, y)$ 的极值的方法如下:

1° 先解出方程

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

2° 命 a, b 是以上的解的一个，命

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} = C,$$

则可用下表来得到解答.

$B^2 - AC$	+	−	+	0
A	−	+		
	极 大 值	极 小 值	不是极大极小	可 疑

这个表上的第一个結論（取极大值）如上；第二个結論的証法也相仿佛；关于第三个結論，即

$$B^2 - AC > 0$$

的情况，则由

$$A\lambda^2 + 2B\mu + C\mu^2 = 0$$

可以得实数解答：

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}\mu.$$

对这样的 λ, μ, $\varphi''(0) = 0$. 并可取 λ, μ 使有时 $\varphi''(0) > 0$, 有时 $\varphi''(0) < 0$, 所以在 a, b 点不可能取极值.

对于最后一个結論，我們可以依一个变数的方法，再看 $\varphi'''(0)$, $\varphi^{\text{iv}}(0)$ 等.

如果 D 是一个閉域，假定 $f(x, y)$ 在其中連續，我們已知 $f(x, y)$ 在 D 的內点或周界上取最大値，因此求最大値的方法是找出一切的 $f'_x = f'_y = 0$ 的內点，算出这些点的函数值. 然后与周界上的函数值相比較，最大的就是域 D 的函数最大値.

例 1. 求

$$u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

的最大値，此处 x 与 y 适合 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2\pi$.

由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - \cos(x + y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos y - \cos(x + y) = 0,$$

得 $x = y = \frac{2\pi}{3}$. 此时 $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 而在区域的周界 $x = 0$, $y = 0$ 及 $x + y = 2\pi$ 上, $u = 0$. 故在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 函数达到最大値.

例 2. 求

$$u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 \quad (a > b > c > 0)$$

的最大値及最小値，其中 x, y, z 适合

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

以 $z^2=1-x^2-y^2$ 代入 u，則

$$u=(a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+c^2-[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c]^2,$$

此处 x 与 y 适合 $x^2+y^2\leqslant 1$.

由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x(a-c)\{(a+c)-2[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c]\}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y(b-c)\{(b+c)-2[(a-c)x^2+(b-c)y^2+c]\}=0$$

得出

$$x=y=0(\text{此时 } u=0);\ x=0,\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u=\frac{1}{4}(b-c)^2\right);$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=0\left(u=\frac{1}{4}(a-c)^2\right).$$

現在轉而考慮周界 $x^2+y^2=1$ 上的函数値．以 $y^2=1-x^2$ 代入 u,

$$u=(a^2-b^2)x^2+b^2-[(a-b)x^2+b]^2,$$

此处 $x\in[-1,1]$．由

$$\frac{du}{dx}=2(a-b)^2x(1-2x^2)=0$$

得

$$x=0(u=0);\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u=\frac{1}{4}(a-b)^2\right),$$

而对应于 $x=\pm1$ 时 $u=0$.

因此函数在 $(0,0,\pm1)$, $(0,\pm1,0)$ 及 $(\pm1,0,0)$ 达到最小值，最小值为零；而在 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 达到最大值，最大值为 $\frac{1}{4}(a-c)^2$.

例 3．在平面上給一边长为 a, b, c 的三角形，在它上面作无数个定高 h 的錐体，求側面积最小的錐体．

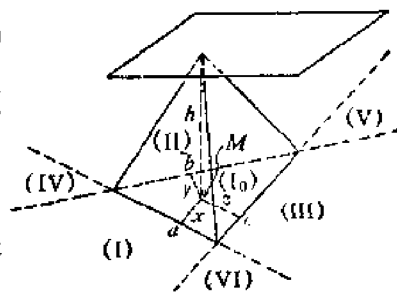


图 30

命錐体頂点在三角形所在平面的投影是 M，x, y, z 分别表示点 M 至三个边 a, b, c 的垂綫之长．它們按图30所示的区域取下列符号：

	I_0	I	II	III	IV	V	VI
x	+	−	+	+	−	+	−
y	+	+	−	+	−	−	+
z	+	+	+	−	+	−	−

命三角形的面积是 P，則

$$ax + by + cz = 2P.$$

侧面积 S 为

$$S = \frac{a}{2}\sqrt{x^2 + h^2} + \frac{b}{2}\sqrt{y^2 + h^2} + \frac{c}{2}\sqrt{z^2 + h^2}.$$

以

$$z = \frac{2P - ax - by}{c}$$

代入 S，得

$$S = \frac{a}{2}\sqrt{x^2 + h^2} + \frac{b}{2}\sqrt{y^2 + h^2} + \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{2P - ax - by}{c}\right)^2 + h^2}.$$

由

$$2\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{cz}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot \frac{a}{c} = 0,$$

$$2\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{by}{\sqrt{y^2 + h^2}} - \frac{cz}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot \frac{b}{c} = 0$$

得

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + h^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + h^2}}.$$

由此得出 $x = y = z$，这点是三角形的內切圓的中心.

由于当 $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ 时，$S \to \infty$. 故最小値不可能在边界点上取得，因此这一点对应的錐体的侧面积最小.

例 4. 最小二乘法. 这是广泛用以修正观測的方法，确定 x, y 的数値，对于它們有 $n > 2$ 个綫性方程：

$$a_i x + b_i y = d_i, \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

其中 a_i, b_i, d_i 是由經驗方法得来的. 假定

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

从前两个方程解出的 x, y，一般并不能满足其余的方程. 我們是要求 x, y 使

$$W = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y - d_i)^2$$

最小.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i x + b_i y - d_i) = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = 2\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i x + b_i y - d_i) = 0.$$

用 Gauss 的記号，記 $[a, b] = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $[a, a] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, 等等. 則上式变为

$$[a, a]x + [a, b]y = [a, d],$$

$$[a, b]x + [b, b]y = [b, d].$$

由于

$$\begin{vmatrix} [a,a] & [a,b] \\ [a,b] & [b,b] \end{vmatrix} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}^2 \geqslant \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0$$

(此式讀者不难証明),故方程有解.

不难証明这一解确使W达到最小值.

§ 15. 隐函数求极値法

命

$$u = f(x, y, z).$$

我們現在研究在条件

$$g(x, y, z) = 0$$

的情况下,u的极大与极小.

为了明确起見,我們假定x, y是自变数,而z是由$g(x, y, z) = 0$所定义的函数.

由u取极値的条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

再从条件$g(x, y, z) = 0$出发算得

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

在这四个方程中消去$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

从这两个方程与$g(x, y, z) = 0$解出x, y, z的数値,这就是找出可能的极大値与极小値的方法.

如法,由(1)可見

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}} (= -\lambda),$$

即有λ使

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

如是我們也可以把x, y, z, λ都看成未知数,而从这三个方程与$g = 0$中解出x, y, z, λ.

这方法的优点是x, y, z都处于同等地位.

同时，我們也可从另一角度来看問題，即考慮函数

$$w = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

这函数的极值当然适合于

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = g(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

由于 $g(x, y, z) = 0$，所以也得出了 $f(x, y, z)$ 有条件的极值。

这一方法称为 Lagrange 乘子法。这不是另外一个方法，而是把 w 看成为四变数 λ，x，y，z 的函数，我們就可以运用固有的方法了。

例 1. 求点 (a, b) 到直綫

$$Ax + By + C = 0$$

的最短距离。

設 (a, b) 至直綫上动点 (x, y) 的距离为 r，则

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

作

$$w = (x - a)^2 + (y - b)^2 + \lambda(Ax + By + C).$$

由

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2(x - a) + \lambda A = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2(y - b) + \lambda B = 0$$

得

$$x = a - \frac{1}{2}\lambda A, \quad y = b - \frac{1}{2}\lambda B. \tag{2}$$

于是

$$\lambda = \frac{2(Aa + Bb + C)}{A^2 + B^2}. \tag{3}$$

由于 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时，$r \to \infty$，故最短距离是存在的。因此 (a, b) 至 (x, y) 的距离最短，此处 (x, y) 由 (2) 定义而 λ 由 (3) 定义。

例 2. 命 m，n 是給定的正数，求

$$f(x, y) = x^m y^n$$

的最大值，而 x 与 y 滿足：$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，$x + y = a$ $(a > 0)$。

对于 $f(x, y)$，求对数得

$$\varphi(x, y) = \log f(x, y) = m \log x + n \log y.$$

作函数

$$w = m \log x + n \log y + \lambda(x + y - a).$$

由

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{m}{x} + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{n}{y}+\lambda=0$$

得

$$x=-\frac{m}{\lambda},\quad y=-\frac{n}{\lambda}.$$

故

$$\lambda=-\frac{m+n}{a}.$$

于是

$$x=\frac{ma}{m+n},\quad y=\frac{na}{m+n}.$$

与例1类似的討論可知,这一点使 $\varphi(x, y)$ [同样使 $f(x, y)$] 达到最大值.

§16. 坐标变换

我們已經知道了两种坐标系——笛卡儿坐标与极坐标. 现在我們将这概念扩充一下,得所謂曲綫坐标系. 实质上,极坐标可以看成为由两族曲綫交織而成的: (i) 以原点为心的同心圓:

$$x^2+y^2=\rho^2,\quad \rho>0;$$

(ii) 通过原点的射綫:

$$y=x\operatorname{tg}\theta,\quad 0\leqslant\theta<2\pi.$$

这两族曲綫有以下的性质:通过平面上的任一点(非原点)一定有一条且仅有一条族(i)的曲綫,也仅有一条族(ii)的曲綫. 对应于这两条曲綫,有二数值 ρ, θ. 这 ρ 和 θ 就称为点的极坐标.

如此就得出平面上的点和 (ρ, θ) 的一一对应关系(但原点例外).

笛卡儿坐标也是如此,是由两族直綫 $x=a$ 及 $y=b$ 交織而成的.

我們现在把这一概念加以扩充. 如果两組曲綫:

$$\varphi(x, y)=u,$$
$$\psi(x, y)=v,$$

都有这样的性质,对应平面上的一点 (x, y), 两組曲綫各有唯一的一条通过 (x, y). 这样一来,两个曲綫族就成为一个曲綫坐标系 (u, v), 称为 (x, y) 的曲綫坐标.

如果在平面上有些例外部分,我們就說是对不例外部分的曲綫坐标系.

除常見的笛卡儿坐标与极坐标之外,我們还有下面的几种坐标.

例1(椭圓坐标系). 命 $e_1>e_2$. 对应于 x, y (x 与 y 都非零),我們从

$$\frac{x^2}{q-e_1}+\frac{y^2}{q-e_2}=1 \tag{1}$$

可以得出两个根 q_1, q_2 $(q_1>e_1>q_2>e_2)$. 这 q_1, q_2 也就成一坐标系. 现在来求出曲綫族.

当 $q=q_1$ 是常数时，(1) 表示一个椭圆；当 $q=q_2$ 是常数时，(1) 表示一个双曲綫。换言之，一个曲綫族是共焦点的椭圆族，而另一个是共焦点的双曲綫族. 通过平面上的一点，有唯一的一个椭圆[属于 (1) 的]，也有唯一的一个双曲綫.

例 2. 取

$$x=\cosh\lambda_1\cos\lambda_2, \quad y=\sinh\lambda_1\sin\lambda_2.$$

当 λ_1 是常数时，有椭圆

$$\frac{x^2}{\cosh^2\lambda_1}+\frac{y^2}{\sinh^2\lambda_1}=1.$$

当 λ_2 是常数时，有双曲綫

$$\frac{x^2}{\cos^2\lambda_2}-\frac{y^2}{\sin^2\lambda_2}=1.$$

在例 1 中取 $e_1=1$, $e_2=0$, 則得

$$\frac{x^2}{q-1}+\frac{y^2}{q}=1.$$

它有两个根 q_1, q_2, 适合于 $q_1>1>q_2>0$. 我們取 $q=\cosh^2\lambda_1$ 及 $q_2=\cos^2\lambda_2$, 这完全适合于要求了. 因此，如此得出的坐标系也就是例 1 的椭圆坐标系.

例 3. 取

$$x=\frac{1}{2}[q_1^2-q_2^2], \quad y=q_1q_2.$$

当 $q_1=$ 常数，得出一族抛物綫，以原点为焦点，开向左方. 而 $q_2=$ 常数，也得一族以原点为焦点，开向右方的抛物綫.

我們現在介紹換变数的方法. 如果

$$F(x, y)$$

是 x, y 的函数，換了变数

$$x=g(u, v), \quad y=h(u, v)$$

之后，得函数

$$G(u, v)=F(g, h).$$

現在有

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

由此得出的行列式

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

称为 Jacobian 或函数行列式.

在 (x, y) 平面上我們有长度的微分．經过变换之后就得到

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u} du + \frac{\partial h}{\partial v} dv\right)^2 =$$
$$= \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}\right) du\, dv +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right] dv^2.$$

这便是在曲綫坐标中的长度元素．

例 1．极坐标．

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \quad (r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi),$$

則

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

例 2．考虑变换

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

由于

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta},$$

故将 x 軸与 y 軸分别与 ξ 軸及 η 軸重合，即可知对应点在同一射綫上，且对应点与原点的距离的平方的乘积为 1．

这一变换是可逆的，逆变换是

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

故称这变换为反演．

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2}.$$

§ 17. 三維空間的几个坐标系

与平面上曲綫坐标系相类似，现在把这一概念扩充到空間去．設有三組曲面：

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, z), \\ v &= \psi(x, y, z), \\ w &= \chi(x, y, z), \end{aligned} \tag{1}$$

都有这样的性质，对于空間中的一点 (x, y, z)，有唯一的 u 使

$$u = \varphi(x, y, z),$$

也就是說，有唯一的一张曲面通过 (x, y, z)；亦有唯一的 v 及 w 使

$$v = \psi(x, y, z), \quad w = \chi(x, y, z).$$

这样一来，三組曲面族 (1) 就构成一个曲面坐标系 (u, v, w)．称为 (x, y, z) 的曲面坐标．

如果空間中有些例外部分，我們就說，这是对不例外部分的曲面坐标。

常用的笛卡儿坐标就是三族平面 $x=a$，$y=b$，$z=c$ 交織而成的。

如果 $F(x, y, z)$ 是 x, y, z 的函数，换了变数

$$x=g(u, v, w),\quad y=h(u, v, w),\quad z=k(u, v, w)$$

之后得函数

$$G(u, v, w)=F(g, h, k),$$

故

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial G}{\partial w}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}.$$

因此得出行列式

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix},$$

称为 Jacobian 或函数行列式。

例 1. 球坐标(或称空間极坐标). 它与笛卡儿坐标的关系是

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=r\cos\theta,$$

其中

$$r\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

r, φ, θ 的几何意义是：r 是联結原点与已知点 $M(x, y, z)$ 的矢量的长度．θ 是这一矢量与 OZ 軸的交角，φ 是 OM 在 xy 平面上的投影 OP 与 x 軸的交角．

这个变换不是一对一的．(r, φ, θ) 空間中的平面 $r=0$ 与原点 $x=y=z=0$ 相

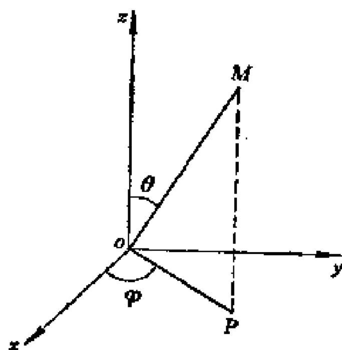


图 31

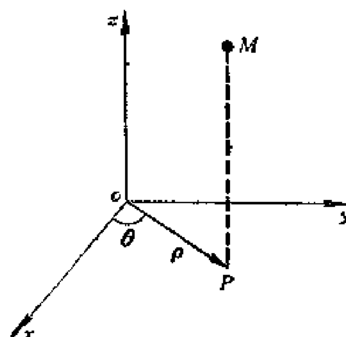


图 32

对应. 而直綫 $\theta=0$ (或 π), $r=$ 常数 $\neq 0$, 則被映于一点 $x=y=0$, $z=r$ 或 $-r$. 除此而外, 則是一对一的对应了.

坐标曲面形成三族:

(i) $r=$ 常数, 表示中心在原点的同心球面;

(ii) $\theta=$ 常数, 表示以 z 軸为軸的圓錐面;

(iii) $\varphi=$ 常数, 表示通过 z 軸的半平面.

这一变换的 Jacobian 为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\theta.$$

例 2. 圓柱坐标. 这是 x, y 平面上的极坐标与变量 z 相联合而成的:

$$x=\rho\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\theta,$$
$$z=z,$$

其中

$$\rho\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta<2\pi,\quad -\infty<z<\infty.$$

除 (ρ,θ,z) 空間的直綫 $\rho=0$, $z=c$ (常数)被映射到一个点 $x=y=0$, $z=c$ 之外, 其余的点都是一一对应的.

坐标曲面形成三族:

(i) $\rho=$ 常数, 表示母綫平行于 z 軸的圓柱面, 准綫則是 xy 平面上以原点为中心, ρ 为半径的圓周;

(ii) $\theta=$ 常数, 則是过 z 軸的半平面;

(iii) $z=$ 常数, 表示平行于 xy 平面的平面.

变换的 Jacobian 为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$$

例 3. 椭球坐标. 考虑共焦点且共軸的二次曲面族

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-h^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-k^2}=1\quad(0<h<k).\tag{2}$$

固定一点 (x,y,z), 此点不在坐标平面上. 将上式看成 λ^2 的方程时, 有三正根 λ_1^2, λ_2^2 与 λ_3^2, 滿足

$$\lambda_1>k>\lambda_2>h>\lambda_3>0.$$

又由根与系数的关系可知

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=x^2+y^2+z^2+h^2+k^2,$$
$$\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2=(h^2+k^2)x^2+k^2y^2+h^2z^2+h^2k^2,$$
$$\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2=h^2k^2x^2.$$

于是得出

$$x = \pm \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{hk},$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 - h^2)(\lambda_2^2 - h^2)(h^2 - \lambda_3^2)}}{h\sqrt{k^2 - h^2}},$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 - k^2)(k^2 - \lambda_2^2)(k^2 - \lambda_3^2)}}{k\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

如果限制 x, y, z 在第一卦限,则这些式子都只取正号,数 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 就是第一卦限内点的椭球坐标.

三坐标曲面族是: 当 $\lambda =$ 常数 $> k$ 时,(2) 表示椭球面;当 $k > \lambda > h$ 时,(2) 表示单叶双曲面;当 $0 < \lambda < h$ 时,(2) 是双叶双曲面.

变换的 Jacobian 是

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)}{\sqrt{(\lambda_1^2 - h^2)(\lambda_1^2 - k^2)(\lambda_2^2 - h^2)(k^2 - \lambda_2^2)(h^2 - \lambda_3^2)(k^2 - \lambda_3^2)}}.$$

第十三章　带变数的貫，級数及积分

§1. 一致收斂貫

命D代表m維空間的一个域，我們所討論的函数乃指在D上变化的m个变数$x_1,\cdots,x_m$的函数. 为簡单計，我們就用x来代表$x_1,\cdots,x_m$，换一句話說，$f(x)$就是指$x_1,\cdots,x_m$的函数，且这m个变数都在D上变化，函数值可能是实数也可能是复数.

如果对任一$x\in D$，函数貫

$$a_n(x)\quad n=1,2,3,\cdots$$

都收斂，这个貫就称为D上的收斂貫，以$[a_n(x)]$表之. 它的极限也是在D上定义的一个函数$a(x)$.

一般講来，对D中的一点x，当我們給了一个$\varepsilon>0$，有一正数N存在，使当$n>N$时，

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon.$$

这N不但和ε有关而且和点x有关. 換言之，当x变化时，我們所选的N也变化.

我們現在討論一个十分重要的情况，就是N并不与点x有关，而仅与ε有关的情况，这一概念称为一致收斂. 定义如下：

定义. 在D中定义的一个函数貫

$$a_n(x)\quad n=1,2,3,\cdots$$

称为一致收斂于$a(x)$，如果它适合以下的条件：任与一$\varepsilon>0$，我們可以选得N仅与ε有关而不与x有关，使当$n>N$时，

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon.$$

由定义立刻看出，函数貫$[a_n(x)]$一致收斂于$a(x)$的充要条件是

$$\sup_x|a_n(x)-a(x)|\to 0\quad(n\to\infty).$$

定理 1 (Cauchy 判别条件). 一个函数貫

$$a_n(x)\quad n=1,2,3,\cdots$$

一致收斂的必要且充分条件是：任給一个$\varepsilon>0$，可以找到仅依賴于ε而不依賴于x的N，使当$m,n>N$时，

$$|a_m(x)-a_n(x)|<\varepsilon.$$

証. 必要性. 如果$a_n(x)$一致收斂于$a(x)$，我們有N，使当$m,n>N$时，

$$|a_m(x)-a(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |a_n(x)-a(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以

$$|a_m(x)-a_n(x)|\leqslant|a_m(x)-a(x)|+|a_n-a(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性．由关于收斂性的 Cauchy 判别条件知道，对任一 x, $a_n(x)$ 收斂，假設它的极限是函数 $a(x)$.

任与 $\varepsilon>0$，我們有 N 存在，使

$$|a_m(x)-a_n(x)|<\varepsilon \quad (m,n>N).$$

固定 m，命 $n\to\infty$，則因 $a_n(x)\to a(x)$，所以当 $m>N$ 时，

$$|a_m(x)-a(x)|<\varepsilon.$$

即得一致收斂性．

定理 2. 連續函数的一致收斂貫的极限也是連續函数．

証． 任給 $\varepsilon>0$，我們有 N 存在，使

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon \quad (n>N),$$

这 N 与 x 无关．考慮

$$|a(x+h)-a(x)|\leqslant|a_n(x+h)-a(x+h)|+|a_n(x)-a(x)|$$
$$+|a_n(x+h)-a_n(x)|<2\varepsilon+|a_n(x+h)-a_n(x)|.$$

由于 $a_n(x)$ 連續，故对已給的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$ 存在，使当 $|h|<\delta$ 时，

$$|a_n(x+h)-a_n(x)|<\varepsilon.$$

因此

$$|a(x+h)-a(x)|<3\varepsilon.$$

(注意，本証明虽然是一个变数的形式，但是却具 m 个变数的实质)．

例 1. 函数貫

$$a_n(x)=\frac{1}{1+nx},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ n=1,2,\cdots$$

是一个收斂貫，它的极限是

$$a(x)=\begin{cases}0, & \text{如果}\quad 0<x\leqslant 1,\\ 1, & \text{如果}\quad x=0.\end{cases}$$

由于 $a(x)$ 不連續，所以这个貫在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中不一致收斂．

例 2. 函数貫

$$a_n(x)=x\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}},\quad x\geqslant 0,\quad n=1,2,\cdots$$

也是一个收斂貫，它的极限是

$$a(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{-x}}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由于 $a(x)$ 不連續，所以 $a_n(x)$ 不一致收斂．

例 3. 函数貫

$$a_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad n=1,2,\cdots$$

的极限是 $a(x)=0$，虽然 $a(x)$ 連續，但 $[a_n(x)]$ 仍不一致收斂．原因是

$$a_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2},$$

它并不趋于0. 由此可見，不一致收斂的連續函数貫的极限也可能連續，也就是說，极限函数連續只是連續函数貫为一致收斂的必要条件，但并非充分条件。

定理 3. 如果对D上一点a，有

$$\lim_{x\to a}a_n(x)=c_n,$$

并且$a_n(x)$一致收斂于$a(x)$，則c_n的极限c存在，且

$$\lim_{x\to a}a(x)=\lim_{n\to\infty}c_n=c.$$

証. 由定义，对任一$\varepsilon>0$，有N存在，使

$$|a_n(x)-a_m(x)|<\varepsilon,\quad n,m>N,$$

这N与x无关. 命$x\to a$，則得

$$|c_n-c_m|<\varepsilon.$$

因此c_n有极限c存在。

由不等式

$$|a(x)-c|\leqslant|a_n(x)-c_n|+|a(x)-a_n(x)|+|c_n-c|$$

出发，我們可以取N，使当$n>N$时，

$$|c_n-c|<\varepsilon,\quad |a(x)-a_n(x)|<\varepsilon.$$

又可以取$\delta>0$，使当$|x-a|<\delta$时，

$$|a_n(x)-c_n|<\varepsilon.$$

故当$|x-a|<\delta$时，

$$|a(x)-c|<3\varepsilon.$$

即得定理.

定理也可以改述为：等式

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a}a_n(x)$$

当$a_n(x)$一致收斂时成立. 注意非一致收斂的情况，两个极限的求取不能任意互换。

§2. 貫的微分积分

定理 1. 如果在$[a,b]$上$a_n(x)$連續，而且一致收斂于$a(x)$，則

$$\int_a^b a(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx,$$

也就是

$$\int_a^b(\lim_{n\to\infty}a_n(x))dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$$

証. 給了任一$\varepsilon>0$，有N存在，使当$n>N$时，

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon.$$

因此

$$\left|\int_a^b a(x)dx-\int_a^b a_n(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|a(x)-a_n(x)|dx<\varepsilon(b-a).$$

故有定理.

例 1. 不一致收斂,有时結果不眞,如

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2x\cdot e^{-n^2x^2}dx=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-n^2})=1,$$

而

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}(2n^2xe^{-n^2x^2})dx=0.$$

例 2. 不一致收斂,結果有时也正确,如

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n^2)}{2n}=0=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}dx.$$

定理 2. 如果 $a_n(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上可积,而且 $a_n(x)$ 一致收斂于 $a(x)$,則 $a(x)$ 也可积,而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx=\int_a^b a(x)dx.$$

証. 我們来討論函数 $a(x)$ 的可积性.

由于一致收斂性,給与 $\varepsilon>0$, 有N存在,使当 $n\geqslant N$ 时,

$$|a_n(x)-a(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即 ,

$$a_n(x)-\frac{\varepsilon}{2}<a(x)<a_n(x)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $[a,b]$ 的任意部分 $[\alpha,\beta]$,并且命m与M是函数 $a_n(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的上确界与下确界,而 $\omega=M-m$ 是它的振幅;又用Ω表示函数 $a(x)$ 的振幅,因在 $[\alpha,\beta]$ 上,

$$m-\frac{\varepsilon}{2}<a(x)<M+\frac{\varepsilon}{2},$$

所以

$$\Omega\leqslant\omega+\varepsilon.$$

把区間 $[a, b]$ 分成部分区間 $[x_i, x_{i+1}]$, 在这区間內, $a_n(x)$, $a(x)$ 的振幅各記以 ω_i, Ω_i, 则 $\Omega_i\leqslant\omega_i+\varepsilon$, 并且

$$\sum\Omega_i\Delta x_i\leqslant\sum\omega_i\Delta x_i+\varepsilon(b-a).$$

因为 $\varepsilon(b-a)$ 可以任意小, 而当 $\lambda=\max\Delta x_i\to 0$ 时 $\sum\omega_i\Delta x_i$ 趋于 0, 所以左边也趋于 0 ,于是 $a(x)$ 可积. 定理后半部分的証明与定理 1 完全相同.

定理 3. 假定 $a_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 而微商貫 $[a_n'(x)]$ 在整个区間上連續并且一致收斂. 如果已知函数貫 $[a_n(x)]$ 在 a 点收斂, 則 $[a_n(x)]$ 在整个区間上一致收斂,并且极限 $a(x)$ 是可微的,且

$$a'(x)=\lim_{n\to\infty}a_n'(x),$$

也就是

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}a_n(x).$$

証. 我們先証明貫 $[a_n(x)]$ 在区間 $[a, b]$ 上一致收斂. 由

$$a_n(x) = a_n(a) + \int_a^x a_n'(x)dx$$

得

$$|a_m(x) - a_n(x)| \leqslant |a_m(a) - a_n(a)| + \int_a^x |a_m'(x) - a_n'(x)|dx.$$

任給 $\varepsilon > 0$, 因 $[a_n'(x)]$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂,故存在 N_1 使当 $m, n > N_1$ 时

$$|a_m'(x) - a_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

由貫 $[a_n(x)]$ 在 $x = a$ 的收斂性,有 N_2 使当 $m, n > N_2$ 时

$$|a_m(a) - a_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

故当 $m, n > N = \max(N_1, N_2)$ 时

$$|a_m(x) - a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x-a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此貫 $[a_n(x)]$ 在 $[a, b]$ 上一致收斂.

命

$$a^*(x) = \lim_{n\to\infty} a_n'(x).$$

由定理 2, 可知

$$\int_a^x a^*(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x a_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty}[a_n(x) - a_n(a)] = a(x) - a(a).$$

因为被积函数 $a^*(x)$ 連續,左边积分的微商等于 $a^*(x)$, 它和 $a(x)$ 的微商相等.

§3. 囿 收 斂

对于一致收斂的連續函数貫, 我們有积分号下取极限的定理(§2. 定理1). 如果在 $[a, b]$ 間有些例外的点, 这些例外点的来源或出之于不一致收斂,或出于瑕积分,我們也有一些結果. 先引进

定义. 如果函数貫 $[a_n(x)]$ 在区間 $[a, b]$ 上处处收斂, 且有一与 n, x 都无关的常数 M, 使

$$|a_n(x)| \leqslant M,$$

則称 $a_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上囿收斂.

定理 1. 如果 $[a, b]$ 中有一点 c, 对任意 $\delta > 0$, $a_n(x)$ 在 $[a, c-\delta]$, $[c+\delta, b]$ 上一致收斂,又若 $a_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上囿收斂,則仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx.$$

証. 命 $a(x) = \lim a_n(x)$, 由

$$\left|\int_a^b [a_n(x) - a(x)]\cdot dx\right| \leqslant \left|\int_a^{c-\delta}[a_n(x) - a(x)]dx\right| + \left|\int_{c+\delta}^b [a_n(x) - a(x)]dx\right|$$

$$+\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} a_n(x)dx\right| + \left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} a(x)dx\right| \leqslant \left|\int_a^{c-\delta}\right| + \left|\int_{c+\delta}^b\right| + 4\delta M,$$

对任与的 $\varepsilon>0$, 可先取 δ, 使 $4\delta M<\varepsilon$. 又在 δ 固定之后, 可取 n 充分大, 使其前二項也都小于 ε. 因而得出本定理.

这定理中的例外点,可以推广为不止一点,而有有限个例外点的情况. 又此定理可以推广为

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)\varphi(x)dx = \int_a^b [\lim_{n\to\infty} a_n(x)]\varphi(x)dx,$$

只須假定

$$\int_a^b |\varphi(x)|dx < \infty.$$

以后将述及 Lebesgue 积分, 在考虑 Lebesgue 积分时, 这定理将以更完整的形式出現,如 Arzéla 定理等.

例 1. 函数貫

$$a_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad a_n(x) = nx(1-x)^n, \quad (0<x<1), \quad n=1,2,\cdots$$

都是囿收斂.

一个更重要的例子是

例 2. 函数貫

$$a_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\sin mx}{m}, \quad n=1,2,\cdots$$

我們将証明它在任何区間上都囿收斂. 因为 $a_n(x)$ 为奇函数,且有周期 2π, 所以只須証明它在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上囿收斂便已足够.

因为

$$\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

所以

$$a_n(x) = \int_0^x (\cos t + \cdots + \cos nt)dt = \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{1}{2}t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt =$$

$$= \int_0^x \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt + \int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt - \frac{1}{2}x =$$

$$= \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{u}du + \int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt - \frac{1}{2}x. \tag{1}$$

因为 $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$ 收斂（見 § 10.10 例 1），所以 $\int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du$ 有界. 又因 $\sin u \leqslant u$，所以

$$\left|\int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right| \leqslant \int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)dt$$

也有界. 所以存在一个与 n 与 x 都无关的常数 M，使

$$|a_n(x)| \leqslant M.$$

下面我們再証明

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x \quad (0 < x \leqslant \pi). \tag{2}$$

极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$$

存在. 又

$$\int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = -\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{x}\right)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

易証上式最后一个积分有界，故当 $n\to\infty$ 时，最后一项趋于 0，而得

$$\int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}t\right)dt \to 0.$$

于是由 (1) 式得出

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du - \frac{1}{2}x \quad (0 < x \leqslant \pi),$$

特別当 $x=\pi$ 时，因为 $a_n(\pi)=0$，所以得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2}\pi. \tag{3}$$

(2) 式得証，同时我們也得到了 Dirichlet 积分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ 的值.

又因极限函数

$$a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x & (0 < x < 2\pi) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

在 0 处不連續，所以 $a_n(x)$ 在任何包含 $2m\pi$ 的区間中不一致收斂；但它是有界收斂的.

再研究瑕积分的情况.

定理 2. 如果 $a_n(x)$ 非負，且对固定的 x，它是 n 的非減函数. 又对任一 $c(<b)$，

常有

$$\int_a^c (\lim_{n\to\infty} a_n(x))dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c a_n(x)dx,$$

则在下式有一方存在时，有

$$\int_a^b (\lim_{n\to\infty} a_n(x))dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$$

（注意，这里的 b 可为有限，也可以是 ∞.）

証. 假定右边收斂，命

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx = S.$$

由 $a_n(x)$ 的非負性可知，对任一 $c(<b)$，

$$\int_a^c \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c a_n(x)dx \leqslant S.$$

所以

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} a_n(x)dx = I$$

存在，即左边也收斂，而且

$$I \leqslant S.$$

另一方面，

$$\int_a^b a_N(x)dx \leqslant \int_a^b (\lim a_n(x))dx = I,$$

命 $N\to\infty$，可知 $S\leqslant I$. 所以 $S = I$.

同法可从左边出发来証明等式.

§4. 級数的一致收斂性

現在考虑級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \qquad (1)$$

命

$$S_n(x) = \sum_{m=1}^{n} u_m(x),$$

于是級数的問題就变为貫 $S_n(x)$ 的問題，而从貫的性質立刻可以推出級数的性質. x 仍然在 m 維的域 D 中变化.

定义. 如果貫 $S_n(x)$ 一致收斂于 $S(x)$，則称級数一致收斂于 $S(x)$.

定理 1. 級数 (1) 一致收斂的必要且充分条件是：給了任一 $\varepsilon>0$，有不依于 x 的 N 存在，使当 $n>N$ 时，

$$|S_{n+l} - S_n| < \varepsilon, \quad l > 0.$$

例. 設冪級数 $\sum a_n x^n$ 的收斂半径为 R，則对任何 $r(<R)$，冪級数在 $|x|\leqslant r$ 中一致收斂. 命 r' 表适合 $r<r'<R$ 的任一实数，則因 $\sum a_n r'^n$ 收斂，故必有正数 K，使

$|a_n r'^n| < K$（对所有 n 都成立），于是在 $|x| \leqslant r$ 中，

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+l} a_m x^m\right| \leqslant \sum_{m=n+1}^{n+l} |a_n r'^m| \cdot \left|\frac{x}{r'}\right|^m \leqslant K \sum_{m=n+1}^{n+l} \left(\frac{r}{r'}\right)^m < K \frac{\left(\frac{r}{r'}\right)^{n+1}}{1-\frac{r}{r'}},$$

由此不难获得結果。

定理 2. 如果对 D 上一点 a，有

$$\lim_{x\to a} u_n(x) = c_n,$$

又 $\Sigma u_n(x)$ 在 D 上一致收斂，则

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

且这級数收斂。

定理 3. 連續函数的一致收斂級数的和也是連續函数。

以下二定理虽然是一个变数的形式，但实質上不难推广到多元函数的情形。

定理 4. 可积函数的一致收斂級数可以逐項积分，即

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

定理 5. 如果微分后的級数一致收斂，则級数可以逐項微分，更具体地說，如果 $\sum u_n(x)$ 收斂，$u_n'(x)$ 連續，$\sum u_n'(x)$ 一致收斂，則

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

故若命 R 为冪級数 $\sum a_n x^n$ 的收斂半径，则在 $|x| < R$ 中，$f(x) = \sum a_n x^n$ 可逐項积分与逐項微分。

我們还有

定理 6. 如果对任何 $\delta > 0$，$\sum u_n(x)$ 在 $[a+\delta, b]$ 上一致收斂，并且 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上囿收斂。又設

$$\int_a^b |\varphi(x)| dx < \infty,$$

則

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \varphi(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \varphi(x) dx.$$

定理 7. 設 $u_n(x) \geqslant 0$，且对任一 $c(< b)$，常有

$$\int_a^c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c u_n(x) dx,$$

則在下式有一方为收斂时，有

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx \tag{2}$$

(b 可以为有限也可以为 ∞).

若 $u_n(x)$ 可正可負,在将收斂的条件换成絕对收斂后,定理仍然成立. 詳細言之,我們有

定理 8. 若对任一 $c(<b)$,常有

$$\int_a^c \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c u_n(x)dx,$$

$$\int_a^c \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^c |u_n(x)|dx,$$

則在

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|dx \quad 与 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |u_n(x)|dx \tag{3}$$

有一为收斂时,等式 (2) 仍成立.

証. 由定理 7 知道,(3) 中任一式的收斂保証另一式也收斂,并且两者相等. 所以这两种假定是等价的. 于是因为

$$0 \leqslant |u_n(x)| \pm u_n(x) \leqslant 2|u_n(x)|,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [|u_n(x)| \pm u_n(x)]dx$$

也收斂. 再由定理的假定及定理 7 得到

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} [|u_n(x)| \pm u_n(x)]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [|u_n(x)| \pm u_n(x)]dx,$$

由此导得結果.

如果 $u_n(x)$ 是复函数,如

$$u_n(x) = \alpha_n(x) + i\beta_n(x),$$

通过討論 $|u_n(x)| \pm \alpha_n(x)$, $|u_n(x)| \pm \beta_n(x)$, 这四个函数都是非負的,我們也能得到类似的定理.

例 1. 試将 $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx$ 展成級数形式.

級数

$$\frac{e^x - 1 - x}{\sqrt{x^3}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^{m-3/2}}{m!}$$

在 $[0, 1]$ 中一致收斂,故可逐項积分得

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^3}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_0^1 x^{m-3/2}dx = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!(2m-1)}.$$

例 2. 試将 $\int_0^1 e^x \log x\, dx$ 展成級数形式.

級数 $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收斂,又

$$\int_0^1 |\log x|\,dx = 1 < \infty,$$

故由定理 6 得到

$$\int_0^1 e^x \log x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \log x\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+1)}.$$

例 3. 求証

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x}\,dx = 1.$$

我們有級数

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

这个級数在 1 的邻近并不一致收斂，甚至也不囿收斂. 但因 $\frac{x^n}{n} \geqslant 0$，并且

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x}\,dx < \infty,$$

又对任何 $c < 1$，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在 $[0, c]$ 中一致收斂，所以

$$\int_0^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^c \frac{x^n}{n}\,dx.$$

于是由定理 7 得到

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

例 4. 命 $u_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ $(0 < a < b)$，則

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

但因函数 $\frac{u}{e^u - 1}$ 当 $u > 0$ 时是严格单调下降的，故

$$\int_0^{\infty} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{a}{e^{ax}-1} - \frac{b}{e^{bx}-1}\right) dx > 0,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u_n(x)\,dx \neq \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx.$$

其所以不能交换，是因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |u_n(x)|\,dx$$

发散．事实上，$u_n(x)$ 在 $x<\dfrac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}$ 时为負，在 $x>\dfrac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}$ 时为正，于是

$$\int_0^\infty |u_n(x)|dx=\left(\int_0^{\frac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}}-\int_{\frac{\log\frac{b}{a}}{n(b-a)}}^\infty\right)[be^{-nbx}-ae^{-nax}]dx=\frac{2}{n}\left(e^{-\frac{a\log\frac{b}{a}}{b-a}}-e^{-\frac{b\log\frac{b}{a}}{b-a}}\right).$$

所以 $\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty|u_n(x)|dx$ 发散．

§5. 一致收斂的一些判别条件

現在再介紹几个判别条件．

定理 1 (Weierstrass)． 命 $\sum a_n$ 是一正項的收斂級数，如果对充分大的 n，有

$$|u_n(x)|\leqslant a_n \quad x\in D,$$

則級数 $\sum u_n(x)$ 一致收斂．

證． 由比較原則，对任一 $x\in D$，級数

$$\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$$

是收斂的，命其和为 $s(x)$．

由

$$|s(x)-s_n(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots|\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots,$$

可以获得定理．

我們还可以推广．

定理 2. 如果 $\sum v_n(x)$ 一致收斂，并且

$$|u_n(x)|\leqslant v_n(x) \quad x\in D,$$

則 $\sum u_n(x)$ 也一致收斂．

立刻可以推出

定理 3. 如果有一与 x 无关的常数 $r(<1)$，使对充分大的 n，

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<r,$$

則級数

$$\sum u_n(x)$$

一致收斂．

定理 4. 如果有一与 x 无关的常数 $r(<1)$，使对充分大的 n，

$$|u_n(x)|^{\frac{1}{n}}<r,$$

則級数 $\sum u_n(x)$ 一致收斂．

例 1． 三角級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

是一致收斂的.

例 2. 命 $1 < a < b$, Dirichlet 級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad s = \sigma + it,$$

在区間 $a \leqslant \sigma \leqslant b$ 中一致收斂.

这是有名的 Riemann ζ 函数.

例 3. 級数

$$\{1 - (1 - x^2)\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1 - x^2)^n$$

在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 中一致收斂.

§6. 一致收斂的 Abel 及 Dirichlet 判別法

任何一个检驗收斂性的判別法，只要它的条件与区域D中的x无关，都能成为检驗一致收斂性的判別法. 例如，与定理 4.4.2 及定理 4.4.3 对应的是

定理 1 (Abel 判別法). 假定

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$$

在D中一致收斂，又設对每一x, $a_n(x)$ 成一单調貫，且有一与n, x无关的常数K，使

$$|a_n(x)| \leqslant K,$$

則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

在D中一致收斂.

定理 2 (Dirichlet 判別法). 如果 $\Sigma b_n(x)$ 的部分和

$$|B_n(x)| \leqslant M,$$

而M与n, x无关，又对任一x, $a_n(x)$ 单調一致地趋于 0，則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

也一致收斂.

这两定理的証明与定理 4.4.2 及定理 4.4.3 完全类似. 因为沒有困难，我們把它留給讀者自証.

例 1. 命 a_n 是单調趋向于 0 的貫. 在任何一个不包有 $2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的閉区間內，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx}$$

都一致收斂.

理由如下:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|},$$

在所討論的区間內, $\sin\frac{1}{2}x \neq 0$, 所以得出一个与 n, x 都无关的上界.

它的一个重要特例是:級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

在任何一个不包含 $2k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的閉区間上都一致收斂. 关于这个級数, §3 中已經証明,这級数在整个直綫上圍收斂,并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x \quad (0 < x < 2\pi).$$

例 2. 若 a_n 是遞減的正数貫,級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

在任何区間上都一致收斂的充要条件是: $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 也即 $na_n \to 0$.

証. 1) 必要性. 命 $p \geqslant 4$, 考虑 $x = \frac{\pi}{2p}$ 及 $n = \left[\frac{1}{2}p + 1\right]$[1)], 我們有

$$a_n \sin nx + a_{n+1}\sin(n+1)x + \cdots + a_p \sin px$$

$$> a_p(\sin nx + \cdots + \sin px) > a_p\left(\frac{1}{2}p - 1\right)\sin\frac{1}{4}\pi > \frac{\sin\frac{1}{4}\pi}{4}pa_p$$

$\left(\text{因为现在有 } \frac{\pi}{2} > mx > \frac{1}{4}\pi\right)$. 由于所考虑的級数在一包含原点的区間中一致收斂,故当 $p \to \infty$ 时,上面不等式的左方趋向于零,因此 $pa_p \to 0$, 也即 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2) 充分性. 由于周期性及奇函数性, 不妨假定 $0 \leqslant x \leqslant \pi$. 命 $\mu_n = \max\limits_{m \geqslant n}(ma_m)$, 則由假定 $\mu_n \to 0$. 又命

$$S_{n,m} = a_n \sin nx + \cdots + a_m \sin mx,$$

我們将証明

$$|S_{n,m}| \leqslant (\pi + 1)\mu_n.$$

由此不难得出結果.

若 $x \geqslant \frac{\pi}{n}$, 由于

1) 此处 $[x]$ 表 x 的整数部分.

$$|\sin nx + \cdots + \sin rx| = \left|\frac{\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(r + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x} \leqslant \frac{\pi}{x}$$

$\left(因为在 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi 中, \frac{\theta}{\sin\theta} \leqslant \frac{1}{2}\pi\right)$,故由 Abel 引理(第十章 § 6)可知,

$$|S_{n,m}| \leqslant \frac{a_n\pi}{x} < na_n \leqslant \mu_n.$$

又若 $x \leqslant \frac{\pi}{m}$, 因为 $\sin\theta \leqslant \theta$, 故有

$$|S_{n,m}| \leqslant a_n nx + \cdots + a_m mx \leqslant m\mu_n x \leqslant \pi\mu_n.$$

今若 $\frac{\pi}{m} < x < \frac{\pi}{n}$,我們将这两种方法結合起来用. 我們有

$$|S_{n,m}| \leqslant |S_{n,[\frac{\pi}{x}]}| + |S_{[\frac{\pi}{x}]+1,m}|.$$

对于 $S_{n,[\frac{\pi}{x}]}$, 因为 $x \leqslant \pi\Big/\left[\frac{\pi}{x}\right]$,所以用第二种方法得到

$$|S_{n,[\frac{\pi}{x}]}| \leqslant \pi\mu_n;$$

又因 $x > \frac{\pi}{\left[\frac{\pi}{x}\right] + 1}$, 所以用第一种方法得到

$$|S_{[\frac{\pi}{x}]+1,m}| \leqslant \mu_{[\frac{\pi}{x}]+1} \leqslant \mu_n,$$

所以又得到

$$|S_{n,m}| \leqslant (\pi + 1)\mu_n.$$

而得到所要証明的結果.

§ 7. Abel 定理及 Tauber 定理

設冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收斂半径等于 1,則在区間 $|x| \leqslant \rho(<1)$ 中,冪級数一致收斂,今若級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收斂, 問冪級数的一致收斂区間能否向右伸展一直到 1. 回答是肯定的, 这就是有名的 Abel 定理.

定理 1 (Abel). 設級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收斂,則冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中一致收斂,且有

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

証. 在上节的定理 1 中，取 $a_n(x) = x^n$, $b_n(x) = a_n$, 立得定理的前半部分. 定理的后半部分由 § 4 定理 2 导出.

Abel 定理告訴我們，如果 (1) 式右方收斂，則左方的极限也存在，并且与它相等. 它的逆定理未必眞确，即若 (1) 式左方存在，右方未必与它相等，甚至还不一定收斂. 例如

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},$$

当 $x \to 1$ 时，$f(x) \to \frac{1}{2}$, 但 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 不收斂.

如果我們給系数 a_n 的阶以一定的限制，逆定理便有可能成立. 我們有

定理 2 (Tauber). 若 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 且当 $x \to 1$ 时，(1)式左方的极限存在，則 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 也收斂，并且 (1) 式成立.

証. 我們只須証明

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n \to 0 \quad (x \to 1),$$

此处 $N = \left[\frac{1}{1-x}\right]$ 为 $\frac{1}{1-x}$ 的整数部分或证明

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{N} a_n(1 - x^n) \to 0.$$

因为 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, 所以給定 $\varepsilon > 0$, 可取 N 很大，使 $|na_n| < \varepsilon (n > N)$, 于是

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} na_n \cdot \frac{x^n}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-x)} < \varepsilon.$$

又由 $na_n \to 0$ 可以推出(平均值的极限等于原貫的极限)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n|a_n| \to 0 \quad (N \to \infty).$$

所以

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n(1 - x^n) \right| < (1-x) \sum_{n=0}^{N} n|a_n| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} n|a_n| \to 0.$$

由此得出定理.

这两个定理可作种种推广，例如将 x 推广到复变数 z 的情形，又 Tauber 定理中关于 a_n 阶的限制可作一定程度的放寬，例如将 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ 换成 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ 等. 这些定理統称之为 Abelian 与 Tauberian 定理，它构成了数学分析中的一个重要部分，我們在这里不再詳細介紹了.

§ 8. 求隐函数的逐漸逼近法

我們假定 $F(x, y)$ 及其微商 $F'_y(x, y)$ 在以 (x_0, y_0) 为中心的正方形

$$(D) \qquad |x-x_0| \leqslant \Delta, \quad |y-y_0| \leqslant \Delta$$

中連續,并且

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

前已証明在 (x_0, y_0) 附近,可由

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

解出 y 来,换言之,有一个单元連續函数

$$y = f(x)$$

适合于 $y_0 = f(x_0)$,而且有恆等式

$$F[x, f(x)] = 0.$$

我們現在可以利用一致收斂的原則来具体的定出 $y = f(x)$ 来.

首先让我們討論一个比較簡单的問題,就是方程 (1) 具有

$$y = y_0 + \varphi(x, y) \tag{2}$$

的特殊形式,此处 $\varphi(x_0, y_0) = 0$,

$$|\varphi'_y(x_0, y_0)| < 1. \tag{3}$$

注意,这样做并不失去普遍性,原因是我們可以把一般方程 (1) 改写成

$$y = y_0 + \left[y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)}\right],$$

而命

$$\varphi(x, y) = y - y_0 - \frac{F(x, y)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

如此,則 $\varphi(x_0, y_0) = 0$, $\varphi'_y(x_0, y_0) = 1 - 1 = 0$.

我們現在来解方程 (2), 由 φ'_y 及 φ 的連續性,我們可以取 Δ 足够小,使在 D 中

$$|\varphi'_y(x, y)| < \lambda \quad (< 1),$$

又取 δ 很小,使在 $|x - x_0| \leqslant \delta$ 中,有不等式

$$|\varphi(x, y_0)| < (1 - \lambda)\Delta. \tag{4}$$

現在我們在

$$(D^*) \qquad |x-x_0| \leqslant \delta, \quad |y-y_0| \leqslant \Delta$$

中来作进一步的討論.

把 $y = y_0$ 代入 (2) 式右边,則得 x 的函数

$$y_1 = y_1(x) = y_0 + \varphi(x, y_0).$$

再把 $y = y_1$ 代入 (2) 式右边,又得出一个 x 的函数

$$y_2 = y_2(x) = y_0 + \varphi(x, y_1).$$

同此得

$$y_3 = y_3(x) = y_0 + \varphi(x, y_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}). \tag{5}$$

如此得出一个函数貫

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ \cdots,$$

我們說，这个貫的极限 $y(x)$ 存在。

先証明这样的 $y_n(x)$ 都在区間

$$|y-y_0|\leqslant\Delta$$

中．显然 $|y_1-y_0|<(1-\lambda)\Delta\leqslant\Delta$．今若

$$|y_{n-1}-y_0|\leqslant\Delta,$$

則由 (5) 可知，

$$y_n-y_0=\varphi(x,\ y_{n-1}).$$

但

$$|\varphi(x,\ y_{n-1})|\leqslant|\varphi(x,\ y_{n-1})-\varphi(x,\ y_0)|+|\varphi(x,\ y_0)|.$$

由中値定理，右边的第一部分为

$$|\varphi(x,\ y_{n-1})-\varphi(x,\ y_0)|=|\varphi_y'(x,\ y)||y_{n-1}-y_0|<\lambda\Delta,$$

对第二部分，由 (4) 可知其 $<(1-\lambda)\Delta$，所以

$$|y_n-y_0|<\lambda\Delta+(1-\lambda)\Delta=\Delta.$$

即得所断言者．

其次，$y_n(x)$ 都是 x 的連續函数．显然 $y_1(x)$ 連續．假定 $y_{n-1}(x)$ 也連續，則当 x 与 x' 充分接近时，$y_{n-1}(x)$ 与 $y_{n-1}(x')$ 可以任意小．故由

$$y_n(x)-y_n(x')=\varphi(x,\ y_{n-1}(x))-\varphi(x',\ y_{n-1}(x'))$$

与 $\varphi(x,\ y)$ 的連續性，推出 $y_n(x)$ 为連續．

現在进一步討論函数貫 $\{y_n\}$ 的收斂問題．我們考慮級数

$$y_0+\sum_{n=1}^{\infty}(y_n-y_{n-1}). \tag{6}$$

利用中値定理，

$$|y_n-y_{n-1}|=|\varphi(x,\ y_{n-1})-\varphi(x,\ y_{n-2})|<\lambda|y_{n-1}-y_{n-2}|.$$

連續应用得

$$\begin{aligned}|y_n-y_{n-1}|&<\lambda|y_{n-1}-y_{n-2}|<\lambda^2|y_{n-2}-y_{n-3}|\\&<\cdots<\lambda^{n-1}(1-\lambda)\Delta,\end{aligned}$$

而几何級数

$$(1-\lambda)\Delta\sum_{1}^{\infty}\lambda^{n-1}$$

收斂，因此級数 (6) 在 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 中一致收斂，所以

$$y=y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)$$

在指定的区域內連續．

由 (5) 可知 $y=y(x)$ 是方程 (1) 的一个解，現在我們进一步証明唯一性．

如果有另一解 $\tilde{y}$，則

$$\tilde{y}=y_0+\varphi(x,\ \tilde{y}).$$

与原解相减得

$$|y-\tilde{y}| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y})| < \lambda|y-\tilde{y}|.$$

因 $\lambda < 1$，所以 $y \neq \tilde{y}$ 不可能。

这是一个值得注意的方法，請讀者熟讀。

§9. 无穷乘积

現在討論无穷乘积

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots.$$

我們用符号

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{1}$$

来表示它，并假定 a_n 中沒有一个等于 -1。

命 P_n 表部分积

$$P_n = \prod_{m=1}^{n}(1+a_m).$$

如果当 $n\to\infty$ 时，P_n 趋于一个非 0 的极限，則无穷乘积称为收斂。

这儿不将 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$ 的情况定义为收斂，完全是为了以后的方便。

不收斂的无穷乘积称为发散，而 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$，則称发散于 0。

例 1. 乘积

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\quad\frac{5}{6}\cdots$$

是收斂的。

显然，如果 (1) 收斂，則 $a_n \to 0$。

先从几个簡单的情况开始。

1) 如果 $a_n \geqslant 0$，无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

与級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

同为收斂或同为发散。

証。 P_n 是一非減貫，所以这貫或者收斂或者趋向正无穷，因为

$$a_1+\cdots+a_n \leqslant (1+a_1)\cdots(1+a_n) \leqslant e^{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

由此得出結果。

2) 如果 $a_n \leqslant 0$，命 $a_n = -b_n$，我們研究乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n).$$

2.1) 如果 $b_n \geqslant 0$、$b_n \neq 1$ $(n=1, 2, \cdots)$, $\sum b_n$ 收斂,則 $\Pi(1-b_n)$ 也收斂.

因为 Σb_n 收斂,故能取 N 充分大,使

$$b_N + b_{N+1} + \cdots < \frac{1}{2};$$

特別有 $b_n < 1 (n \geqslant N)$. 于是

$$(1-b_N)(1-b_{N+1}) \geqslant 1 - b_N - b_{N+1},$$

$$(1-b_N)(1-b_{N+1})(1-b_{N+2}) \geqslant (1-b_N-b_{N+1})(1-b_{N+2})$$

$$\geqslant 1 - b_N - b_{N+1} - b_{N+2},$$

一般說来,有

$$(1-b_N)(1-b_{N+1})\cdots(1-b_n) \geqslant 1 - b_N - \cdots - b_n > \frac{1}{2}.$$

当 $n \geqslant N$ 时 P_n/P_{N-1} 单調下降,且有一正下界,故 $\lim_{n\to\infty} P_n/P_{N-1}$ 有极限存在,且大于 0. 因 $P_{N-1} \neq 0$, 所以得到所說的結論.

2.2) 若 $0 \leqslant b_n < 1$ 及 $\sum b_n$ 发散,則 $\Pi(1-b_n)$ 发散于 0.

若 $0 \leqslant b < 1$, 則 $1 - b \leqslant e^{-b}$, 所以

$$0 < (1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_n) \leqslant e^{-b_1-b_2-\cdots-b_n}.$$

右边趋于 0 ,所以得出結論.

于是得到:若 $0 \leqslant b_n < 1$, 則无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同为收斂或同为发散.

§ 10. 无穷乘积的收斂条件

現在 a_n 可能是实数或复数,但 $\neq -1$.

定义. 如果乘积

$$\prod_{b=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$

收斂,則乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

称为絕对收斂.

由前已知: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的收斂是乘积絕对收斂的必要且充分条件.

現在証明

定理 1. 絕对收斂的乘积一定收斂.

証. 命

$$p_n = \prod_{m=1}^{n} (1 + a_m), \quad P_n = \prod_{m=1}^{n} (1 + |a_m|).$$

由

$$p_n - p_{n-1} = (1 + a_1)\cdots(1 + a_{n-1})a_n$$

及

$$P_n - P_{n-1} = (1 + |a_1|)\cdots(1 + |a_{n-1}|)|a_n|,$$

显然有

$$|p_n - p_{n-1}| \leqslant P_n - P_{n-1},$$

今若 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ 收斂，則 P_n 有极限，故 $\sum_{n=1}^{\infty} (P_n - P_{n-1})$ 收斂．由比較法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1})$ 收斂，即 p_n 有极限．

現在証明这极限不能为 0．由 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的收斂导出 $1 + a_n \to 1$，所以級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{1 + a_n} \right|$$

也收斂．再由以上証明了的結果，乘积

$$\prod_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{a_m}{1 + a_m}\right)$$

也有极限，但此乘积等于 $1/p_n$，故 p_n 的极限 $\neq 0$．

不难証明，絕对收斂乘积各因子的次序可以任意变换而不改变乘积的数值．

例 1．

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

这是由于

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}.$$

例 2． 由 π 的 Wallis 公式，

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdots = 2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

及例 1 得到

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)} = \frac{2}{\pi}.$$

§ 11. 无穷乘积的对数

若

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = p.$$

是否有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p.$$

此处 $\log z$ 表示 z 的对数的主值,即其虚数部分在 $-\pi$ 与 π 之間者.

如果 a_n 都是正实数,則所有的对数都取普通的实数值. 以上的等式是对的,但在一般的情况下,却不一定相等而需要作些說明.

仍命 p_n 表前 n 个部分乘积,且命

$$p_n = \rho_n e^{i\varphi_n},$$

当 $n \to \infty$ 时, ρ_n 趋限并且如果适当的取 φ_n, 則 φ_n 也趋限.

命

$$1 + a_n = \gamma_n e^{i\theta_n} \qquad -\pi < \theta_n \leqslant \pi.$$

由于 $a_n \to 0$, 所以当 $n \to \infty$ 时 $\theta_n \to 0$.

命

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \log(1+a_m) = \log p_n + 2k_n i\pi,$$

此处 k_n 是一整数,现在有

$$2k_n\pi = \theta_1 + \cdots + \theta_n - \varphi_n,$$

故

$$2\pi(k_{n+1} - k_n) = \theta_{n+1} - (\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

右方趋向于 0. 故当 n 充分大时,

$$2\pi|k_{n+1} - k_n| < 2\pi,$$

即得 $k_{n+1} = k_n$. 因此,当 n 充分大时, $k_n = k$ 是一常数,即

$$s_n = \log p_n + 2ki\pi \quad (n > N).$$

命 $n \to \infty$, 則得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p + 2ki\pi.$$

此級数的和是乘积的对数,但不一定是主值.

又可注意者在証明中也可得,当 N 充分大时,

$$\sum_{N+1}^{\infty} \log(1+a_n) = \log p - \log p_N.$$

如果我們由对数的級数出发,且假定

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n) = s,$$

則得

$$e^{s_n} = p_n.$$

故

$$p_n \to p = e^s,$$

即乘积收斂于和的指数.

根据以上的討論，我們得到

定理 1. 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$

收斂的必要且充分条件是級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$$

的收斂.

例 1. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收斂，則 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收斂.

由

$$\log(1+a_n)=a_n+O(|a_n|^2)$$

可以推出这結果.

例 2. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2, \cdots, \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{k-1}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^k$ 都收斂，則 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收斂.

例 3. 若 a_n 为实数且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂，則当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收斂时，乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收斂，而当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散时，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于零.

由

$$\log(1+a_n)=a_n-a_n^2/2+o(a_n^2)$$

可以推出这結果. 由此可知，乘积

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdots$$

发散于零.

例 4. $\prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|=\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$，故乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|$ 收斂.

但另一方面，由

$$1+\frac{i}{n}=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\,e^{i\theta_n}$$

可知，

$$\theta_n=\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

因此乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)$$

发散.

習題 1. 命

$$a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}},\quad a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收斂，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散。

習題 2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收斂，則 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)e^{a_n}$ 收斂；若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^3$ 收斂，則 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)e^{a_n+\frac{1}{2}a_n^2}$ 收斂.

習題 3. 試求

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

習題 4. 試求

$$\frac{1}{e}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}$$

的值。

§12. 无穷乘积的一致收斂

如果貫

$$P_n(x)=\prod_{m=1}^{n}(1+u_m(x)),\quad n=1,2,3,\cdots$$

一致收斂并且极限永不为零，則我們称这无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}[1+u_n(x)]$$

一致收斂.

最簡单的判别法是

定理 1. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在某一域內一致收斂，且 $u_n(x)\neq -1$，則乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(x))$ 也在該域內一致收斂.

証明并无新原則，只須注意"一致"性. 命 M 为

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$$

在这域中的上界，則

$$[1+|u_1(x)|]\cdots[1+|u_n(x)|]<e^{|u_1(x)|+\cdots}\leqslant e^M.$$

命

$$P_n(x)=\prod_{m=1}^{n}\{1+|u_m(x)|\},$$

則

$$P_n(x)-P_{n-1}(x)=[1+|u_1(x)|]\cdots[1+|u_{n-1}(x)|]|u_n(x)|<e^M|u_n(x)|.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}[P_n(x)-P_{n-1}(x)]$ 一致收斂。于是与定理 13.9.1 同样地得出結果。

例 1. 当 $|x|<1$ 时

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

由

$$(1-x)P_n=1-x^{2^n}\to 1\quad (n\to\infty)$$

即得所証. 将等式左右双方都展成 x 的幂級数，即可証明任一正整数可用二进位唯一地表出来.

例 2. 当 $|x|<1$ 时，

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

可由左边等于

$$\frac{1-x^2}{1-x}\,\frac{1-x^4}{1-x^2}\,\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots$$

推出之.

例 3. 当 $\varphi\neq 0$ 时，由

$$2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2^n}\cos\frac{\varphi}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\varphi}{2}=\sin\varphi$$

可知

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

取 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，即得

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots.$$

由于

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

等等，故得 Vieta 公式

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

例 4. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ 当 $x>1$ 时絕对收斂，当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时条件收斂；当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，发散于零.

例 5.

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),\quad \cos\pi x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right).$$

由于

$$(\cos z+i\sin z)^m=\cos mz+i\sin mz,$$

得

$$\sin mz=m\cos^{m-1}z\sin z-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}z\sin^3 z+\cdots.$$

以 $m=2n+1$ 代入,并注意 $\cos^{2k} z=(1-\sin^2 z)^k$, 故得

$$\sin(2n+1)z=\sin z\cdot P(\sin^2 z),$$

此处 $P(u)$ 是 u 的 n 次多项式,命其根为 $u_1, u_2, \cdots, u_n$. 则

$$P(u)=A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{u_n}\right).$$

若 z 满足

$$\sin z \neq 0, \quad \sin(2n+1)z=0,$$

则 $\sin^2 z$ 就是 $P(u)=0$ 的根. 故得

$$u_1=\sin^2\frac{\pi}{2n+1}, \quad u_2=\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}, \quad \cdots, \quad u_n=\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

又可知

$$A=P(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}=2n+1,$$

故

$$\sin(2n+1)z=(2n+1)\sin z\left[1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right].$$

命 $z=\frac{x}{2n+1}$. 则

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right].$$

假定 $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$, 则 $\sin x \neq 0$. 将上式改写成

$$\sin x=U_k^{(n)}V_k^{(n)},$$

此处

$$U_k^{(n)}=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right],$$

$$V_k^{(n)}=\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+1)\pi}{2n+1}}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right].$$

固定 k, 命 $n\to\infty$. 则得

$$U_k=\lim_{n\to\infty}U_k^{(n)}=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

因此极限

$$\lim_{n\to\infty}U_k^{(n)}=U_k$$

存在.

现在来研究 $V_k=\lim_{n\to\infty}V_k^{(n)}$. 当 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi < \varphi.$$

故得

$$\sin^2\frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2},$$

$$\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{h^2\pi^2}{(2n+1)^2} \quad (h = k+1, \cdots, n).$$

因此

$$1 > V_k^{(n)} > \left(1 - \frac{x^2}{4(k+1)^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right) > \bar{V}_k,$$

此处

$$\bar{V}_k = \prod_{h=k+1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{4h^2}\right).$$

命 $n \to \infty$, 得

$$1 > V_k \geqslant \bar{V}_k.$$

因为

$$\lim_{k\to\infty}\bar{V}_k = 1,$$

故得

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n\pi^2}\right).$$

于是

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x} = \frac{2x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right)}{2x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

因此

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad \cos\pi x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right).$$

習題 1.

$$\operatorname{sh} x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

習題 2.

$$\operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right].$$

§13. 带参数的积分

我們現在把一致收斂的概念推广到积分上.

假定 $f(x, y)$ 在方条

$$a \leqslant x \leqslant \infty, \quad \alpha \leqslant y \leqslant \beta$$

上定义,且对任一固定的 y, 积分

$$\phi(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)dx \tag{1}$$

恆存在.

定义. 如果任給 $\varepsilon>0$, 我們可以找到依于 ε 但不依于 y 的 x_0, 使当 $x>x_0$ 时,

$$\left|\phi(y)-\int_a^x f(x, y)dx\right|<\varepsilon,$$

則积分 (1) 称为一致收斂.

与以往相仿,我們有一批定理:

定理 1. 如果有函数 $g(x)$ 存在,使

$$|f(x, y)| \leqslant g(x) \quad \text{及} \quad \int_a^{\infty} g(x)dx<\infty,$$

則积分 (1) 一致收斂.

定理 2 (Dirichlet). 如果 $\phi(x, y)$ 有連續偏微商 $\frac{\partial\phi}{\partial x}$; 又当 $x\to\infty$ 时, $\phi(x, y)$ 单調遞降(对于固定的 y),并且关于 y 一致地趋向于零. 命

$$F(x, y)=\int_a^x f(t, y)dt,$$

若 $|F|$ 小于一个与 x, y 都无关的常数 M, 則积分

$$\int_a^{\infty}\phi(x, y)f(x, y)dx$$

一致收斂.

証. 分部积分得

$$\int_{x'}^x \phi(x, y)f(x, y)dx=\phi(x, y)F(x, y)-\phi(x', y)F(x', y)+$$

$$+\int_{x'}^x\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)F(x, y)dx.$$

已积出的部分当 x, x' 充分大时小于任何給定的 ε. 又因

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x}>0.$$

及 $|F(x, y)|$ 小于 M, 所以

$$\left|\int_{x'}^x\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)F(x, y)dx\right|\leqslant M\int_{x'}^x\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx=M[\phi(x', y)-\phi(x, y)],$$

它当 x, x' 充分大时也小于 ε, 所以积分一致收斂.

定理 3 (Abel). 若积分

$$\int_a^{\infty} f(x, y)dx$$

对于 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 一致收斂, $\phi(x, y)$ 为 x 的单調函数 (对于固定的 y), 它有連續偏微商 $\frac{\partial\phi}{\partial x}$,且一致有界(即存在常数 L,使 $\phi(x, y)<L$ 对适合 $x\geqslant a, \alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 的一切 (x, y) 都成立),則

$$\int_a^\infty f(x, y)\varphi(x, y)dx$$

一致收斂。

这定理的証明不难，讀者試自証之。

与上面相类似，我們还可以定义另一种瑕积分的一致收斂。

假定 $f(x, y)$ 在 $a \leqslant x < b$ (或 $a < x \leqslant b$)，$c \leqslant y \leqslant d$ 上定义，且对 $c \leqslant y \leqslant d$ 中的任何 y，积分

$$\int_a^b f(x, y)dx$$

恆存在；若对任何 $\varepsilon > 0$，存在仅依于 ε 而不依于 y 的 $\eta > 0$ 使

$$\left|\int_{b-\eta}^b f(x, y)dx\right| < \varepsilon \left[\text{或}\left|\int_a^{a+\eta} f(x, y)dx\right| < \varepsilon\right],$$

则称积分 (2) 是一致收斂的。

我們也有类似于上面关于判别一致收斂的定理。

附記。 可以将上面的定义及定理条件中的 $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 換为某一实数集合。

例 1. 积分

$$I(y) = \int_0^\infty ye^{-xy}dx$$

在 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 中不一致收斂。

因为

$$\int_A^\infty ye^{-xy}dx = \int_{yA}^\infty e^{-t}dt = e^{-Ay} \to 1 \quad (y \to 0),$$

所以 $I(y)$ 不一致收斂。

例 2. 积分

$$\int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^y}dx$$

在 $y \leqslant y_0(<2)$ 中一致收斂，但在 $y<2$ 中并不一致收斂。

当 $y \leqslant y_0(<2)$ 时，对于 $\varepsilon > 0$，可取 $\eta > 0$ 使

$$\frac{\eta^{2-y_0}}{2-y_0} < \varepsilon.$$

故

$$\left|\int_{1-\eta}^1 \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^y}dx\right| \leqslant \int_{1-\eta}^1 \frac{1}{(1-x)^{y_0-1}}dx = \int_0^\eta \frac{dz}{z^{y_0-1}} = \frac{\eta^{2-y_0}}{2-y_0} < \varepsilon.$$

故积分在 $y \leqslant y_0 < 2$ 中一致收斂，但对 $y < 2$，可取 η 适当小，使当 $1-\eta \leqslant x < 1$ 时

$$\frac{\sin(1-x)}{1-x} > \frac{1}{2}.$$

故

$$\left|\int_{1-\eta}^1 \frac{\sin(1-x)}{(1-x)^y}dx\right| > \frac{1}{2}\int_0^\eta \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\eta^{2-y}}{2-y} \to \infty\ (\text{当 } y \to 2).$$

故在 $y < 2$ 中，积分不一致收斂。

例 3. 証明积分

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx \quad (\alpha>0)$$

在 $\beta\geqslant\beta_0(>0)$ 中一致收斂.

当 $\beta\geqslant\beta_0$ 时,

$$\left|\int_0^A \sin\beta x\,dx\right| = \left|\frac{1-\cos\beta A}{\beta}\right| \leqslant \frac{2}{\beta_0},$$

而 $\frac{x}{\alpha^2+x^2}$ 与 β 无关,当 $x\geqslant\alpha$ 时单調減少,且当 $x\to\infty$ 时趋于零. 故由定理 2 可知

$$\int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$$

在 $\beta\geqslant\beta_0(>0)$ 中一致收斂.

定理 4. 假定 $f(x,y)$ 在长方形

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad \alpha\leqslant y\leqslant\beta$$

中連續,則在 $[\alpha,\beta]$ 中,

$$\phi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

是 y 的連續函数,换言之,如果 $\alpha\leqslant y_0\leqslant\beta$, 則

$$\lim_{y\to y_0}\phi(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f(x,y_0)dx.$$

証. 由

$$\phi(y+k)-\phi(y)=\int_a^b\{f(x,y+k)-f(x,y)\}dx,$$

給了 $\varepsilon>0$, 由一致連續性,我們能选取 k_0, 使当 $|k|<k_0$ 时,对所有的 x,y,

$$|f(x,y+k)-f(x,y)|\leqslant\varepsilon,$$

故

$$|\phi(y+k)-\phi(y)|\leqslant\varepsilon(b-a).$$

即得定理.

例 4. 不用求出下面的积分

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}dx, \quad \int_0^1 \log(x^2+y^2)dx,$$

便可看出它們是 y 的連續函数 $(y\geqslant\alpha>0)$.

定理 5. 若 $f(x,y)$ 在

$$x\geqslant a,\quad y\geqslant c$$

中連續, 設 $y_0\geqslant c$ (y_0 可以为 ∞), 假設 $f(x,y)$ 于 $y\to y_0$ 时在 x 的任何有限区間中一致趋于某可积函数 $\varphi(x)$,又

$$I(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$$

在 $y\geqslant c$ 中一致收斂,則

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int_a^\infty \varphi(x)dx.$$

証. 由于 $I(y)$ 的一致收斂性及 $\varphi(x)$ 的可积性，对任何 $\varepsilon>0$，可取 N 充分大，使

$$\left|\int_N^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ (y>c), \quad \left|\int_N^\infty \varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因在区間 $[a, N]$ 中，$f(x,y)$ 一致趨于 $\varphi(x)$，故存在 δ，使当 $|y-y_0|<\delta$ 时（若 $y_0=\infty$，則存在 M，使当 $y>M$ 时），

$$|f(x,y)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(N-a)}.$$

于是

$$\left|\int_a^N f(x,y)dx - \int_a^N \varphi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (|y-y_0|<\delta \quad 或 \quad y>M).$$

因此当 $|y-y_0|<\delta$（或 $y>M$）时，

$$\left|\int_a^\infty f(x,y)dx - \int_a^\infty \varphi(x)dx\right| < \varepsilon.$$

定理証完.

注意. 当 y_0 为一有限数时，$f(x,y)$ 趨于 $\varphi(x)$ 的一致性条件可以略去，而在証明中，可用 $f(x,y)$ 的一致連續性代替.

§14. 积分号下求微分

定理 1. 如果

$$f(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

在 $a\leqslant x\leqslant b$, $y_0-\eta\leqslant y\leqslant y_0+\eta\ (\eta>0)$ 上連續，則

$$\left(\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx\right)_{y=y_0} = \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}dx\right)_{y=y_0}.$$

証. 命

$$\phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx, \quad g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

則

$$\frac{\phi(y_0+k)-\phi(y_0)}{k} = \frac{1}{k}\int_a^b [f(x,y_0+k)-f(x,y_0)]dx$$

$$= \int_a^b g(x,y_0+\theta k)dx, \quad 0<\theta<1.$$

由于 $g(x,y)$ 是一致連續，所以

$$\lim_{k\to 0}\int_a^b g(x,y_0+\theta k)dx = \int_a^b g(x,y_0)dx.$$

定理 2. 如果

$$f(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

在 $x \geqslant a$, $y_0 - \eta \leqslant y \leqslant y_0 + \eta$ 中連續,又若积分

$$\int_a^{\infty} f\,dx$$

收斂,幷且

$$\int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

在 $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$ 中一致收斂,則在 $y = y_0$ 处

$$\frac{d}{dy}\int_a^{\infty} f(x, y)dx = \int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.$$

証. 命

$$\int_{a+n-1}^{a+n} f(x, y)dx = u_n(y),$$

則

$$\int_a^{\infty} f(x, y)dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y).$$

由定理1可知

$$\int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dy}\int_{a+n-1}^{a+n} f\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dy}u_n(y).$$

由級数的一致收斂性,可得以上的結論.

例如,当 $y > 0$ 时,

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = \int_0^1 D_y \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = -\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1 + y^2},$$

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 \log(x^2 + y^2)dx = \int_0^1 D_y \log(x^2 + y^2)\,dx = \int_0^1 \frac{2y}{x^2 + y^2}\,dx = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

这些結果也可以通过直接計算积分

$$I_1(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}y\log\frac{y^2}{1 + y^2},$$

$$I_2(y) = \int_0^1 \log(x^2 + y^2)dx = \log(1 + y^2) - 2 + 2y\operatorname{arctg}\frac{1}{y},$$

然后对 y 取微商而得.

当 $y = 0$ 时,定理的条件不能滿足;另一方面,当 $y \to 0$ 时,

$$\frac{I_1(y) - I_1(0)}{y} = \frac{1}{2}\log\frac{y^2}{1 + y^2} - \frac{\operatorname{arctg} y}{y} \to -\infty,$$

所以在 $y = 0$ 处,不存在有限微商. 又当 $y \to 0$ 时,

$$\frac{I_2(y) - I_2(0)}{y} = \frac{\log(1 + y^2)}{y} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{y} \to \pi,$$

即 $I_2'(0) = \pi$. 但被积函数对 y 的微商在 $y = 0$ 处等于零,所以积分也等于0. 定理不正确.

§ 15. 积分号下求积分

定理 1. 如果函数 $f(x, y)$ 在矩形

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上連續，則

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy\right) dx.$$

証. 我們証明更普遍一些的公式．如果 $c \leqslant \eta \leqslant d$，則

$$\int_c^\eta \left(\int_a^b f(x, y) dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^\eta f(x, y) dy\right) dx. \tag{1}$$

上式的左方和右方都是参数 η 的两个函数．我們現在計算它們对 η 的微商．

左方外层积分具有被积函数

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

由定理 13.4，它是 y 的連續函数，所以左方对上限的微商就等于

$$I(\eta) = \int_a^b f(x, \eta) dx.$$

(1) 式右方积分就是

$$\int_a^b \varphi(x, \eta) dx, \quad \varphi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y) dy.$$

函数 $\varphi(x, \eta)$ 适合于定理 14.1 的条件，因由定理 13.4 可知，$\varphi(x, \eta)$ 是 x 的連續函数．再取微商得

$$\varphi'_\eta(x, \eta) = f(x, \eta),$$

把 $\varphi'_\eta(x, \eta)$ 看成二元函数，它是連續的，所以得出

$$\frac{d}{d\eta} \int_a^b \varphi(x, \eta) dx = \int_a^b \varphi'_\eta(x, \eta) dx = \int_a^b f(x, \eta) dx = I(\eta).$$

所以如果把 (1) 式的左方与右方都看成 η 的函数，那末它們有相等的微商．因此，它們仅相差一个常数．但当 $\eta = c$ 时，左、右方都等于 0，因而 (1) 式对所有的 η 恆成立．

例 1. 命 $f(x, y) = x^y$，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$a \leqslant y \leqslant b$ $(0 < a < b)$ 时定理的条件适合，所以

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

由左方容易得出

$$\int_a^b \frac{dy}{1 + y} = \log \frac{1 + b}{1 + a},$$

而右方等于

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx,$$

因此得到

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \log \frac{1+b}{1+a}.$$

例 2. 函数

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

在矩形 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 上不适合定理的条件，因为 $x = 0, y = 0$ 是一間断点，我們有

$$\int_0^1 f\,dx = \frac{x}{x^2 + y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1 + y^2} \quad (y > 0),$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f\,dx = \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4};$$

但另一方面，

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f\,dy = -\frac{\pi}{4}.$$

定理 2. 若 $f(x, y)$ 在

$$x \geqslant a, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上連續，又若积分

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$$

在 $c \leqslant y \leqslant d$ 上一致收斂，則

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

証. 对于任何 $A \geqslant a$，由定理 1 可知

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x, y)dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

記

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)dx,$$

則当 $A \to \infty$ 时，$F(A, y)$ 在 $c \leqslant y \leqslant d$ 一致收斂于 $I(y)$. 故由定理 13.5 可知，

$$\lim_{A \to \infty} \int_c^d F(A, y)dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)dx,$$

故得定理.

定理 3. 若 $f(x, y)$ 在

$$x \geqslant a, \quad y \geqslant c$$

上連續，并且积分

$$\int_a^\infty f(x, y)dx \quad 与 \quad \int_c^\infty f(x, y)dy$$

分別在 $y \geqslant c$ 与 $x \geqslant a$ 的任意有限区間上一致收斂；若

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty |f(x,y)|dx \quad 与 \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x,y)|dy$$

中至少有一个存在，则

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx \quad 与 \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)dy$$

都存在，并且相等，也即

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)dy = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx.$$

証. 不妨假定

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x,y)|dy$$

存在. 由于

$$\int_a^\infty f(x,y)dx$$

在 y 的任何有穷区間上一致收斂，故由定理 2 可知，对任何 $C > c$，有

$$\int_c^C dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^C f(x,y)dy.$$

又因

$$\left|\int_c^C f(x,y)dy\right| \leqslant \int_c^\infty |f(x,y)|dy,$$

命 $F(x,C) = \int_c^C f(x,y)dy$, $g(x) = \int_c^\infty |f(x,y)|dy$, 由假設則有 $\int_a^\infty g(x)dx < \infty$. 故由定理 13.1 可知

$$\int_a^\infty dx \int_c^C f(x,y)dy$$

对于 $C \geqslant c$ 一致收斂. 于是由定理 13.5 可知，

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{C\to\infty}\int_a^\infty dx \int_c^C f(x,y)dy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)dy.$$

定理証完.

定理 4. 若 $f(x,y)$ 是

$$x \geqslant a, \quad y \geqslant c$$

中的非負連續函数；若

$$I(x) = \int_c^\infty f(x,y)dy \quad 与 \quad I_1(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$$

都是連續函数，那末在下面两个二重积分

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)dy \quad 与 \quad \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx$$

中有一个存在时，另一个也存在，而且二者相等.

在証明以前先証明

定理 5 (Dini). 若 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)=\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上非負的連續函数，則 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收斂.

証. 級数的余式

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x)$$

是两个連續函数之差,故仍为連續函数. 由于 $u_n(x) \geqslant 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 故

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \varphi_n(x) \geqslant \cdots.$$

固定 x, 由于級数的收斂性,故

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

倘級数非一致收斂,則对某一 $\varepsilon > 0$, 存在 x_n, 使

$$\varphi_n(x_n) \geqslant \varepsilon.$$

由 Bolzano-Weierstrass 定理可知,在 $\{x_n\}$ 中可以找出一个子貫 $\{x_{n_k}\}$, 以 $[a, b]$ 上一点 x_0 为极限. 故

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0).$$

当 $n_k \geqslant m$ 时

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon,$$

故

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon.$$

由此得到矛盾,故得定理.

定理 4 的証明. 取 $\{y_n\}$ 为递增且趋向于 ∞ 的貫,命

$$F(x, y_n) = \int_c^{y_n} f(x, y) dy,$$

則

$$I(x) = F(x, y_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \{F(x, y_n) - F(x, y_{n-1})\}.$$

由定理 5 可知, $I(x)$ 在 $x \geqslant a$ 中的任何有限区間上一致收斂. 同理可知, $I_1(y)$ 在 $y \geqslant c$ 中的任何有限区間上一致收斂. 故由定理 3 得定理 4.

例 3. 在 § 3 中已經算出 Dirichlet 积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

現在再用另一方法証明之.

考慮

$$J = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x} dx \quad (a > 0, k > 0).$$

因为

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \cos ax \, dx = \frac{k}{a^2 + k^2}$$

当 $a \geqslant 0$ 时一致收斂,故由定理 14.2, 对于 $a > 0$,

$$\frac{dJ}{da} = \frac{k}{a^2 + k^2},$$

因此

$$J = \operatorname{arctg}\frac{a}{k} + c.$$

当 $a = 0$ 时，$J = 0$，故得

$$J = \operatorname{arctg}\frac{a}{k}.$$

由 Abel 定理（定理 13.3）可知，当 $k \geqslant 0$ 时，J 一致收敛．故由定理 13.5 得到

$$\lim_{k\to 0^+} J = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \lim_{k\to 0^+}\operatorname{arctg}\frac{a}{k} = \frac{\pi}{2}.$$

特别取 $a = 1$，就得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

例 4.　求

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

作代换 $x = ut$，则

$$J = u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt.$$

各边都乘以 $e^{-u^2}du$ 并积分之，则得

$$J\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = J^2 = \int_0^\infty e^{-u^2}u\,du\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt.$$

由于

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt = e^{-u^2}J$$

及

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2},$$

前者是 u 的連續函数，而后者是 t 的連續函数，故由定理 4 可知，

$$J^2 = \int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

因此

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 5.　求

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{\alpha^2 + x^2}\,dx, \quad z = \int_0^\infty \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2 + x^2}\,dx, \ (\alpha, \beta > 0)$$

当 $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ 时，z 是一致收斂的，故

$$\frac{dy}{d\beta} = -z.$$

因为

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\beta>0),$$

所以

$$\frac{dy}{d\beta}+\frac{\pi}{2}=\alpha^2\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}dx.$$

现在又能在积分号下取微商了，故得

$$\frac{d^2y}{d\beta^2}=\alpha^2\int_0^\infty \frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx=\alpha^2 y.$$

因此

$$y=C_1e^{\alpha\beta}+C_2e^{-\alpha\beta}.$$

由于

$$|y|\leqslant\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha},$$

故必须 $C_1=0$，否则命 $\beta\to\infty$，将得出矛盾. 又当 $\beta\to 0$ 时，可在积分号下取极限，于是得出 $C_2=\frac{\pi}{2\alpha}$. 故得

$$y=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta},$$

$$z=-\frac{dy}{d\beta}=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}.$$

例 6. 求 Fresnel 积分 $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ 与 $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$.

命 $x^2=t$，则

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}du,$$

故

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-kt}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-kt}\sin t\,dt\int_0^\infty e^{-tu^2}du.$$

由定理 3 可知，上面的积分可以交换，故

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-kt}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+(k+u^2)^2}.$$

由 Abel 定理，左方的积分关于 $k\geqslant 0$ 一致收敛，故可在积分号下令 $k\to 0$ 而取极限. 又对右方的积分，也能在积分号下取极限，于是得到

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

所以

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

同法可得

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

§16. 上下限依于参变数的积分

定理 1. 仍假定 $f(x, y)$ 在

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上連續，并且假定

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y), \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

是二条連續曲綫，并且 $a \leqslant \alpha(y) \leqslant b$, $a \leqslant \beta(y) \leqslant b$, 則积分

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx$$

是在 $[c, d]$ 上的 y 的連續函数.

这定理看来复杂，但已无实质上的困难. 我們取一个特殊值 $y = y_0$，則积分可以分为三部分：

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\,dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)\,dx.$$

第一个积分，由于它的上下限都是常数，所以可知

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\,dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\,dx.$$

又由

$$\left|\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx\right| \leqslant M|\beta(y) - \beta(y_0)|$$

及

$$\left|\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)\,dx\right| \leqslant M|\alpha(y) - \alpha(y_0)|,$$

此处 $M = \max|f(x, y)|$，由 $\alpha(y)$ 与 $\beta(y)$ 的連續性可知，当 $y \to y_0$ 时，这两积分趋于 0. 定理証毕.

定理 2. 仍有定理 1 的假定，且假定有連續偏微商 $f'_y(x, y)$，又設微商 $\alpha'(y)$ 与 $\beta'(y)$ 都存在，則积分 $I(y)$ 的微商等于

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)\,dx + \beta'(y)\cdot f[\beta(y), y] - \alpha'(y) f[\alpha(y), y].$$

仍如定理 1 的証明方法，对于第一个积分有

$$\left(\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\,dx\right)_{y=y_0} = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0)\,dx.$$

另一方面，由中值定理我們有

$$\frac{1}{y - y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx = \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} f(\bar{x}, y),$$

此处 $\bar{x}$ 是 $\beta(y)$ 与 $\beta(y_0)$ 之間的一个数值. 因此当 $y \to y_0$ 时，这积分趋于

$$\beta'(y_0) f[\beta(y_0), y_0].$$

另一項也容易得出。

§17. 重　　貫

有两个自然数做足碼的数貫

$$a_{m,n}\ (m=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots)$$

称为重貫.

如果有一数量 A 存在，它有次之性質，就称它为重貫的极限：給了任意 $\varepsilon>0$，有一个正整数 N 存在，使当 $m>N$，$n>N$ 时

$$|a_{m,n}-A|<\varepsilon.$$

用符号

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} a_{m,n}=A$$

来代表它，或者称为重貫 $a_{m,n}$ 收斂于 A. 与积分的方法相同，我們可以証明

定理 1. 假定 1)

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} a_{m,n}=A$$

存在，2)

$$P_n=\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$$

也存在，則得

$$\lim_{n\to\infty} P_n=\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{m,n})=\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} a_{m,n}.$$

如果 3)

$$Q_m=\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$$

也存在，則两个求极限的手續可以交換，即

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{m,n})=\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}).$$

定理 2. 如果对固定的 n，a_{mn} 是 m 的一个递增貫，又对固定的 m，a_{mn} 是 n 的一个递增貫，則

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} a_{m,n}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n}=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$$

或存在或都等于 ∞.

習題 1. 試尽量多地把貫的性質推广到重貫.

§18. 二 重 級 数

給定由两个自然数足碼决定的无穷数集

$$a_{m,n}\qquad m,n=1,2,3,\cdots.$$

我們可以想象它們是排成无穷矩陣的：

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots a_{1n}, & \cdots, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots a_{2n}, & \cdots, \end{matrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1},\ a_{m2},\ a_{m3},\ \cdots a_{mn},\ \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

把这些数量加在一起就是二重級数,問題在于如何把这一批数量加起来。

首先进入我們考虑的是一行一行地加起来,然后再总加起来,也就是

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right].$$

另一方法是一列一列地加起来,然后再总加起来:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right].$$

这两种加法結果是否相等. 不但如此,还可以有象

$$S_N=\sum_{m+n\leqslant N} a_{m,n},\quad \lim_{N\to\infty} S_N$$

这样的三角求和法,也可以有象

$$T_N=\sum_{m^2+n^2\leqslant N^2} a_{m,n},\quad \lim_{N\to\infty} T_N$$

这样的圓求和法。

求和方法很多,所得結果是否相同? 从后面例 4、例 5 可以看到,它們未必相同. 但在最簡单的情形,即 $a_{m,n}\geqslant 0$ 的情形中,我們有以下的

定理 1. 对于正項二重級数,各种求和法的結果都一样. 也即或者有有限和,由任何方法所得出的結果都相同,或者按各种求和方法都得到 $+\infty$ 的結果.

証. 我們将依次考虑各种可能性. 用 (m, n) 表示第一象限中的整点(坐标都是整数的点). 用 $\Delta_p(p=1, 2, \cdots)$ 表示一列具有以下性质的有限域: $\Delta_p\subset\Delta_{p+1}$, 也即前一域都套在后一域中, 又第一象限中的任一整点必属于某一 Δ_p. 将足标属于 Δ_p 的諸項之和記为 $\sum\limits_{\Delta_p}$.

从級数中任意选出有限多項,并作它們的和:

$$a_{m_1,n_1}+a_{m_2,n_2}+\cdots+a_{m_k,n_k}.$$

所有这种和数成一数集,它或者有有限的上确界 G,或者无界. 在前一种情形中,显然

$$\sum_{\Delta_p}\leqslant G$$

对全体 p 都成立;但另一方面,必有一有限和 $>G-\varepsilon$,但当 p 很大时, $\sum\limits_{\Delta_p}$ 含有此有限和的每一項,所以

$$\sum_{\Delta_p}>G-\varepsilon.$$

又因 $\sum\limits_{\Delta_p}$ 非減,所以

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{\Delta_p}=G.$$

这也就是說,按这种特殊方法求和,級数是收斂的,并且它的和就等于 G. 在这种情形中,称重級数为收斂,显然,它与 Δ_p 的选择无关.

在后一种情形中,对于任給的正数 H,必有有限和

$$a_{m_1,n_1}+a_{m_2,n_2}+\cdots+a_{m_k,n_k}>H,$$

所以存在 p_0, 使当 $p>p_0$ 时

$$\sum_{\Delta_p}>H.$$

因此

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{\Delta_p}=\infty.$$

在此情形中,称重級数为发散,并且它也与 Δ_p 的选取无关.

所以如果求和方法仅限于有限部分和的話,那末定理已經証明. 但是我們的定理应当包含容許无限部分和的求和方法,所以还須継續証明.

先假定重級数收斂. 用 D 表一区域,它可能有限也可能无限. 当 (m, n) 属于 D 时,命 $b_{m,n}=a_{m,n}$, 否則命 $b_{m,n}=0$. 显然,当 $\sum a_{m,n}$ 收斂时, $\sum b_{m,n}$ 也收斂. 記

$$\sum_D=\sum_D a_{m,n}=\sum b_{m,n},$$

并以此作为左方的定义,則显然有

$$\sum_D\leqslant G.$$

現在命 $D_p(p=1, 2, \cdots)$ 为任意一列具有 Δ_p 的特征性质的域,但現在 D_p 容許为无限域,則有

$$\sum_{D_p}\leqslant G.$$

另一方面,与前面相同地可以証明:存在 p_0, 使当 $p>p_0$ 时,

$$\sum_{D_p}>G-\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{D_p}=G.$$

最后若重級数发散,則或者有一 p,使 $\sum\limits_{D_p}$ 发散,对此情形,定理已得;或者对一切 p, $\sum\limits_{D_p}$ 都收斂,对此情形,又与前面同样可以証明,对于充分大的 p,

$$\sum_{D_p}>H,$$

此处 H 为任意給定的正数. 所以

$$\sum_{\Delta_p} \to \infty,$$

于是定理得証.

最有用的特例是

定理 2. 如果 $a_{m,n} \geqslant 0$, 則

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}. \tag{1}$$

此式的意义是: 如果等式 (1) 的一方收斂,則另一方也收斂,并且二者相等. 我們将另外給它二个証明.

証明一. 不妨假設 (1) 式左方收斂. 这意味着

$$A_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \quad (m = 1, 2, \cdots) \quad 及 \quad S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m$$

都收斂. 于是因为 $a_{m,n} \leqslant A_m$, 所以

$$A^{(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$$

也都收斂. 因为

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} A_m = S_1,$$

而左方是 N 的单調增加貫,因此 (1) 式右方收斂,并且不大于 S_1.

現在重复上面的証明,但将 m, n 互换, 我們又得到 (1) 式左方不大于右方. 联合这两結果,便得定理.

証明二. 仍旧假設 (1) 式左方收斂. 因为

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n},$$

所以我們需要証明

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

为此,我們又只需証明

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n} \to 0, \ (N \to \infty). \tag{2}$$

記 $u_m(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n}$,則因 $0 \leqslant u_m(N) \leqslant A_m$, 而 $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ 收斂, 所以 (2) 的左方关于 N 一致收斂. 于是由定理 4.2 得到

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{m,n} \right) = 0.$$

定理証毕.

对于能取正、負值的 $a_{m,n}$, (1) 式有时成立, 有时不成立. 对此情形, 在需要証明它

成立时，我們往往象証明（二）那样，把問題先化成（2）的証明，然后再用各种特殊方法証明它成立。

定理 3. 設 $0 \leqslant a_{m,n} \leqslant b_{m,n}$，又 $\sum b_{m,n}$ 收斂，則 $\sum a_{m,n}$ 也收斂。

証. 从定理 1 的証明可以看到，正項重級数在它的有限部分和数的集合有有限上界时收斂. 今 $\sum b_{m,n}$ 收斂，所以它的有限部分和数有上界，又因 $0 \leqslant a_{m,n} \leqslant b_{m,n}$，所以 $\sum a_{m,n}$ 的有限部分和数也有上界，因此 $\sum a_{m,n}$ 收斂。

下面再来討論 $a_{m,n}$ 能取正、負值或复数值的重級数。

定义. 如果 $\sum |a_{m,n}|$ 收斂，則称 $\sum a_{m,n}$ 为一絕对收斂級数。

定理 4. 对于一个絕对收斂的重級数，各种求和方法所得的結果也都相同. 或者說，絕对收斂的重級数必定收斂。

証. 我們只討論 $a_{m,n}$ 为实数的情形，对于 $a_{m,n}$ 能取复数值的情形，讀者試自証明之。

当 $a_{m,n} \geqslant 0$ 时，命 $\alpha_{m,n} = a_{m,n}$，$\beta_{m,n} = 0$；而当 $a_{m,n} < 0$ 时，命 $\alpha_{m,n} = 0$，$\beta_{m,n} = -a_{m,n}$. 于是我們有 $a_{m,n} = \alpha_{m,n} - \beta_{m,n}$，及

$$0 \leqslant \alpha_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|, \quad 0 \leqslant \beta_{m,n} \leqslant |a_{m,n}|.$$

由假定及定理 3 可見，$\sum \alpha_{m,n}$，$\sum \beta_{m,n}$ 都是收斂的正項重級数，而命 α 与 β 分别为它們的和. 于是采用定理 1 中的記号，可有

$$\sum_{\Delta_p} a_{m,n} = \sum_{\Delta_p} \alpha_{m,n} - \sum_{\Delta_p} \beta_{m,n} \to \alpha - \beta.$$

当 Δ_p 換成可以是无限域的 D_p 时，上述关系仍旧眞确. 但在此时，等式被取作左方的定义. 显然，重級数的和 $\alpha - \beta$ 与 Δ_p 及 D_p 的选取无关。

定理 5. 命 $s_{m,n} = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} a_{p,q}$，如果

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} s_{m,n} = s$$

且 $\sum_{q=1}^{\infty} a_{p,q}$，$\sum_{p=1}^{\infty} a_{p,q}$ 都收斂，則

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}\right] = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}\right] = s.$$

例 1. 当 $\alpha > 1$，$\beta > 1$ 时，

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-\alpha} n^{-\beta}$$

收斂。

例 2. 当 $\alpha > 1$ 时，

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha}}$$

收斂.

由

$$m^2 + n^2 > 2mn$$

及例 1 卽得.

例 3 (Epstein ζ 函数). 命 $a > 0$, $b^2 < ac$, 則当 $\alpha > 1$ 时,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^{\alpha}}$$

收斂.

利用

$$\frac{am^2 + 2bmn + cn^2}{m^2 + n^2}$$

有极小值的性質, 可得結果.

例 4. 命

$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{若} \quad m = n + 1 \quad (n \geq 1) \\ -1 & \text{若} \quad m = n - 1 \quad (n \geq 2) \\ 0 & \text{若} \quad \text{不然}, \end{cases}$$

則

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \neq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

例 5. 若 $m, n \geq 1$ 及

$$a_{m,n} = \frac{1}{m^2 - n^2} \ (\text{若 } m \neq n), \quad a_{mn} = 0 (\text{若 } m = n),$$

則

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \left(= \frac{\pi^2}{8} \right),$$

而

$$(a_{11}) + (a_{12} + a_{21}) + (a_{13} + a_{22} + a_{31}) + \cdots = 0.$$

例 6.

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{m}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = 1.$$

例 7. 証明

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m + n + \frac{1}{2}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m + n + \frac{1}{2}\right)}. \tag{3}$$

并由此与

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

推出

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{4}$$

證． 因为 a_{mn} 有正有負，所以等式 (3) 无法从前面的定理推出，而需特殊的証明。(3)式左方显然等于(命 $r=m+n$)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\frac{3}{2}}+\frac{2}{\frac{5}{2}}-\cdots\right)^2=$$

$$=16\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)^2=\pi^2.$$

又对每一 $n\neq 0$，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{(-1)^n}{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{m+n+\frac{1}{2}}\right)=0,$$

所以如果 (3) 式成立，則得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}=\pi^2,$$

由此不难推出 (4) 式。

对于任何 N，我們有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-N}^{N}=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty},$$

所以我們只須証明当 $N\to\infty$ 时，有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\to 0,\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{-N-1}\to 0.$$

这里我們只証明前一个和趋于 0，另一个和趋于 0 的事实可同样証明之。

当 $m\geqslant -N-1$ 时，我們有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}}\right|<\frac{1}{m+N+\frac{3}{2}}.$$

所以

$$\left|\sum_{m=-N-1}^{\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty}\right|\leqslant\sum_{m=-N-1}^{\infty}\frac{1}{\left|m+\frac{1}{2}\right|\left(m+N+\frac{3}{2}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{-N-1\leqslant m\leqslant-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}}\frac{1}{\frac{1}{2}N\left(m+N+\frac{3}{2}\right)}+$$

$$+\sum_{-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}<m\leqslant N}\frac{1}{\frac{1}{2}N\left|m+\frac{1}{2}\right|}+\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2},$$

它显然趋向于 0. 又对任何 m，我們有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} =$$

$$= (-1)^m \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}} - \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}} = (-1)^m \pi - \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{(-1)^n}{m+n+\frac{1}{2}},$$

所以

$$\sum_{m=-\infty}^{-N-2} \sum_{n=N+1}^{\infty} = \pi \sum_{m=-\infty}^{-N-2} \frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}} - \sum_{m=-\infty}^{-N-2} \sum_{n=+\infty}^{N} \frac{(-1)^n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}.$$

右方前一项显然趋向于 0，而后一項可与前面同样处理，而証明它也趋于 0，于是 (3) 式成立。

§ 19. 級数的乘积

设

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots, \quad b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

为二个級数，命 $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$，称級数

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$$

为这两級数的乘积.

若级数 $\sum a_n$，$\sum b_n$ 都絕对收斂，則乘积 $\sum c_n$ 也絕对收斂，并且它的和 c 也就是该二級数之和 a，b 的乘积 ab.

这可由上节結果立刻推出，因为重級数 $\sum a_n b_m$ 絕对收斂，先依行加起，再依列加起的結果等于 ab. 而

$$\sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{m+n \leqslant N} a_m b_n,$$

这也是一种求和方法，所以它的极限也是 ab. 实际講来，我們还有进一步的結果.

定理 1. 如果 $\sum a_n$，$\sum b_n$，$\sum c_n$ 各收斂于 a，b，c，則 $c = ab$.

証. 我們已知，当 $|r| < 1$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$$

絕对收斂，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$$

也絕对收斂. 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收斂，所以用 Abel 定理得到

$$\lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = a, \lim_{r\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = b, \lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

級数乘法的定义并不唯一，以上的一种称为 Cauchy 乘法。

还有一种称为 Dirichlet 乘法，定义如次：

$$c_n' = \sum_{pq=n} a_p b_q, \quad n = 1, 2\cdots.$$

也是可以証明如果 $\sum a_p$, $\sum b_q$ 都絕对收于 a, b, 則

$$\sum c_n'$$

也絕对收斂于 ab。

Cauchy 乘法的定义导源于冪級数的乘法，而 Dirichlet 乘法的定义导源于 Dirichlet 級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

的乘法：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_n b_m}{(mn)^s} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{n,m=l} a_n b_m.$$

例 1 (Lambert 級数). 考虑級数

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{1-x^k}. \tag{1}$$

假定

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

当 $0 < x < \rho(<1)$ 时收斂，則 Lambert 級数 (1) 也收斂。

因此

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} x^{lk} = \sum_{m=1}^{\infty} x^m \sum_{lk=m} a_k$$

分别取 $a_k = 1$ 及 $a_k = k$, 則得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) x^n$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n,$$

此处 $d(n)$ 表示 n 的因子个数，而 $\sigma(n)$ 表示 n 的各个因子之和。

例 2. 命

$$\varphi(x, z) = e^{\frac{x}{2}(z - z^{-1})}, \quad z \neq 0.$$

由

$$e^{\frac{x}{2}z} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{z^m}{m!}, \quad e^{-\frac{x}{2}z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{2}\right)^k \frac{z^{-k}}{k!}$$

可知

$$\varphi(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} \frac{(-1)^k}{m!k!} z^{m-k} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n,$$

此处

$$J_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, & 若 \quad n \geqslant 0, \\ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, & 若 \quad n < 0, \end{cases}$$

易見

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

函数 $J_n(x)$ 称为 Bessel 函数.

例 3. 命

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m.$$

是两个在 $|x| < 1$ 内絕对收斂的級数.

由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m x^{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m f(x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n),$$

取 $a_m = \alpha^m$, $b_m = 1$, 即得

$$f(x) = \frac{\alpha x}{1 - \alpha x}, \quad g(x) = \frac{x}{1 - x},$$

即得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha x^m}{1 - \alpha x^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{1 - x^n}.$$

§ 20. 多变数的冪級数

依变数 x, y 的正整数冪次排列的形如

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} a_{lk} x^l y^k \quad (x, y \text{ 为复数或实数}) \tag{1}$$

的重級数,叫做两变数 x, y 的冪級数. 我們現在来討論重冪級数的收斂范围. 收斂范围的研究有很多地方不与单变数的相同,但仍有

定理 1. 如果在 $x = x_0$, $y = y_0$ 时級数收斂,则当

$$|x| < |x_0|, \quad |y| < |y_0|$$

时級数也收斂.

証. 由于重級数收斂,所以有一数 L 存在,使

$$|a_{lk} x_0^l y_0^k| < L.$$

而如果 $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$, 则

$$|a_{lk} x^{l} y^k| \leqslant |a_{lk} x_0^l y_0^k| \left|\frac{x}{x_0}\right|^l \cdot \left|\frac{y}{y_0}\right|^k.$$

即得

$$\sum |a_{lk}x^l y^k| \leqslant L \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^l \left|\frac{y}{y_0}\right|^k.$$

右边是收斂的，所以得到定理。

从这儿也許有人会推测两变数的冪級数的收斂范围可能是 $|x| < R_1$, $|y| < R_2$. 这一猜测是錯誤的。

定义. 如果 $\mathfrak{M}$ 是两个复数 x, y 的区域，在其中各点上，冪級数 (1) 都收斂，而在其外各点上，重級数发散，在边界点上可能发散也可能收斂。这样的区域称为重級数 (1) 的收斂范围。

例 1. 級数

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} x^l y^k$$

的收斂范围是 $|x| < 1$, $|y| < 1$.

例 2.

$$\sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{x^l y^k}{l! k!}$$

无处不收斂。

例 3.

$$\begin{aligned}\sum_{l \geqslant k}^{\infty} x^l y^k &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \cdots + xy + x^2y + x^3y \\ &\quad + \cdots + x^m y + \cdots + x^2y^2 + x^3y^3 + \cdots \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots)[1 + xy + (xy)^2 + \cdots] \\ &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-xy}.\end{aligned}$$

这級数的收斂范围是 $|x|<1$, $|xy|<1$.

§ 21. 利用級数解隐函数

我們再研究隐函数的解出問題：假定

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

的左方在 (x_0, y_0) 点的一邻域内能依 $x - x_0$ 与 $y - y_0$ 的冪次展成为絕对收斂級数，并假定其常数項＝0，而 $y-y_0$ 項的系数不为 0，这两条件相当于 $F(x_0, y_0)=0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 于是被方程 (1) 所确定了的函数 $y = y(x)$ 也能在 $x - x_0$ 的某一邻域内展成为 $x - x_0$ 的冪級数。

証. 并不失去普遍性，我們可以假定 $x_0 = y_0 = 0$. 由于冪級数中 y 的系数 $\neq 0$，所以方程 (1) 可以改写成为

$$y = c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 + \cdots. \tag{2}$$

我們所寻求的是找出

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots, \tag{3}$$

使其适合于(2).

首先我們假定(3)的絕对收斂性,并把(3)代进(2)得

$$\begin{aligned} a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots) + \\ + c_{02}(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2(a_1x + a_2x^2 + \cdots) + \\ + c_{12}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 + c_{03}(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

再比較系数得

$$\begin{aligned} &a_1 = c_{10}, \\ &a_2 = c_{20} + c_{11}a_1 + c_{02}a_1^2, \\ &a_3 = c_{11}a_2 + 2c_{02}a_1a_2 + c_{30} + c_{21}a_1 + c_{12}a_1^2 + c_{03}a_1^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned} \tag{5}$$

(2)式右边有一特点,其中含有 y 的項或者是 y 的高于 1 次的項,或者 1 次的 y,此时其对应系数都含有 $x^l(l \geqslant 1)$,因此在方程組(5)的第 n 个方程中,左边一定是 a_n,而右边則是 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 的函数. 由此保証能够依次地逐个确定系数 a_n:

$$\begin{aligned} &a_1 = c_{10}, \\ &a_2 = c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2, \\ &a_3 = (c_{11} + 2c_{02}c_{10})(c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2) + c_{30} + c_{21}c_{10} + c_{12}c_{10}^2 + c_{03}c_{10}^3, \cdots. \end{aligned} \tag{6}$$

順便提一下,(4)中破除括弧时,字母 a, c 只用了加、乘的計算,所以如果把(5)式右端看成 c, a 多項式,它的系数都是正的(并且还是自然数). 于是(6)中右端的系数也是正的,这一注解后来有用.

我們現在的問題归結为去証明:系数为由(6)式定义的 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的冪級数(3),在 $x = 0$ 的某一邻域中絕对收斂. 因此这个冪級数适合于(2)式.

与研究(2)式的同时,我們研究

$$y = r_{10}x + r_{20}x^2 + r_{11}xy + r_{02}y^2 + r_{30}x^3 + r_{21}x^2y + r_{12}xy^2 + r_{03}y^3 + \cdots, \tag{2'}$$

其中所有的系数 r_{ij} 都是正的,且

$$|c_{ij}| \leqslant r_{ij}.$$

我們对应的定义

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = r_{10}, \\ &\alpha_2 = r_{20} + r_{11}r_{10} + r_{02}r_{10}^2, \\ &\alpha_3 = (r_{11} + 2r_{02}r_{10})(r_{20} + r_{11}r_{10} + r_{02}r_{10}^2) + \\ &\qquad + r_{30} + r_{21}r_{10} + r_{12}r_{10}^2 + r_{03}r_{10}^3, \cdots \end{aligned} \tag{6'}$$

及冪級数

$$y = \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \cdots. \tag{3'}$$

由于系数都是正的,所以

$$|a_n| \leqslant \alpha_n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

如果能够找到(2′),使(3′)有非零收斂半径,定理就証明了.

由假定，有 r 与 ρ 存在，使当

$$|x| < r, \quad |y| < \rho$$

时，(2) 式收斂，所以有 M 使

$$|c_{ij}x^iy^j| \leqslant M,$$

卽得

$$|c_{ij}| \leqslant \frac{M}{r^i\rho^j}.$$

就命 $r_{ij} = M/r^i\rho^j$，則 (2′) 就是

$$\begin{aligned} y &= \frac{M}{r}x + \frac{M}{r^2}x^2 + \frac{M}{r\rho}xy + \frac{M}{\rho^2}y^2 + \cdots \\ &= \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)} - M - \frac{M}{\rho}y. \end{aligned}$$

卽得

$$y^2 - \frac{\rho^2}{\rho+M}y + \frac{M\rho^2}{\rho+M}\cdot\frac{x}{r-x} = 0.$$

这方程的函数可以实际解出，但我們仅需使 $x = 0$, $y = 0$ 的那一个根，卽

$$y = \frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4M(\rho+M)}{\rho^2}\frac{x}{r-x}}\right].$$

引进

$$r_1 = \frac{r\rho^2}{\rho^2 + 4M(\rho+M)}$$

来化簡表达式，則得

$$y = \frac{\rho^2}{2(\rho+M)}\left[1 - \left(1-\frac{x}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

由此可以看出，如果利用二項函数的級数，y 可依 x 的冪次展开，且当 $|x| < r_1 < r$ 时絕对收斂．也就是說，(3′) 收斂，因而 (3) 絕对收斂．

以上的方法称为"优函数法"，在微分方程論中常用及之．

这結果的一个重要特例是逆函数，如果

$$y - y_0 = a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n \cdots$$

且 $a_1 \neq 0$，則依以上的方法可以得出一冪級数

$$x - x_0 = b_0(y-y_0) + b_2(y-y_0)^2 + \cdots,$$

这也是一个在某确定范围內收斂的冪級数，詳細算法已見第七章． 而現在說明了所求出的級数在 y_0 附近收斂．

这些結果都是所謂"局部"性的，仅知道在某一点附近，而不知确是多么近，或多么远．

例 1 (Lagrange 級数)． 討論方程

$$y = a + x\varphi(y), \tag{7}$$

此处 $\varphi(y)$ 在 $y = a$ 点附近能展开为收斂的冪級数．

当 $x=0$ 时，$y=a$. 我們可以用冪級数解出 y 来. 更一般地，我們研究下面的問題.

若 $u=f(y)$ 在 $y=a$ 附近有收斂的冪級数，将 y 在 $x=0$ 处的冪級数代入，则 u 在 $x=0$ 附近有收斂的冪級数. 現在我們来求 u 依照 x 的冪次的展开式.

将 (7) 式分别对 x 及 a 求微商，得

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y),$$

$$[1-x\varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a}=1.$$

由此得到

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}. \tag{8}$$

故对于 $u=f(y)$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}=\varphi(y)\frac{\partial u}{\partial a}. \tag{9}$$

于是对于任何可微函数 $F(y)$，由 (8), (9) 不难推出

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[F(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{10}$$

現在我們用归納法来証明

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right], \tag{11}$$

当 $n=1$ 时，此即 (9) 式. 假定对于不超过 n 的自然数，(11) 式正确. 当 $n+1$ 时，由 (9), (10) 可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}&=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right]\\&=\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^n(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\varphi^{n+1}(y)\frac{\partial u}{\partial a}\right].\end{aligned}$$

故 (11) 式成立.

現在将 u 展成以 x 为冪的 Taylor 級数:

$$u=u_0+x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_0+\cdots.$$

由 (11) 可知，

$$\left.\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right|_0=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)f'(a)],$$

故得

$$\begin{aligned}f(y)=f(a)+x\varphi(a)f'(a)+\frac{x^2}{2!}\frac{d}{da}[\varphi^2(a)f'(a)]+\cdots\\+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}(\varphi^n(a)f'(a))+\cdots,\end{aligned} \tag{12}$$

此即 Lagrange 級数.

取 $f(y)=y$，即得

$$y=a+x\varphi(a)+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{d}{da}[\varphi^2(a)]+\cdots+\frac{x^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)]+\cdots. \tag{13}$$

例 2. 在例 6.1.4 中已經討論过确定行星在它軌道上的位置的 Kepler 方程

$$x=q\sin x+\alpha,$$

此处 x 是行星的偏近角点、α 是平均近角点，而 q 是行星軌道离心率．由 (13) 可知，

$$x=\alpha+q\sin\alpha+\frac{q^2}{2!}\frac{d\sin\alpha}{d\alpha}+\cdots+\frac{q^n}{n!}\cdot\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}(\sin^n\alpha)+\cdots.$$

Laplace 首先証明了当 $q<0.6627\cdots$ 时，上面的級数收斂．

習題 1. 試証

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k=1-k\cdot\frac{x}{4}+\frac{k(k+3)}{2!}\left(\frac{x}{4}\right)^2-$$
$$-\frac{k(k+4)(k+5)}{3!}\left(\frac{x}{4}\right)^3+\cdots.$$

提示：取 $a=1$，$\varphi(y)=\frac{1}{4y}$，$f(y)=y^{-k}$．

習題 2. 求証

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}}=1+aX_1+a^2X_2+\cdots+a^nX_n+\cdots,$$

此处 $X_n=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ 为 n 次 Legendre 多項式(見 § 6.13)．

提示：取 $\varphi(y)=\frac{y^2-1}{2}$．

§ 22. 常微分方程的解的存在性与唯一性

定理 1 (Cauchy). 假定 $f(x,y)$ 在区域

$$(D)\qquad |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b\quad (a>0,\ b>0)$$

上連續，且滿足 Lipschtz 条件

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant K|y_2-y_1|,$$

此处 K 为正常数，則微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

有唯一的解答 $y=\varphi(x)$，确定于区間 $|x-x_0|\leqslant h$ 中，其中

$$h=\min\left(a,\frac{1}{2K},\frac{b}{M}\right),\quad M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|,$$

且 $y_0=\varphi(x_0)$．

証．方程 (1) 的任何解 $y=y(x)$ 皆滿足

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))d\xi. \tag{2}$$

反之,(2) 的任何連續解都满足 (1) 及初始条件 $y_0 = y(x_0)$. 因此我們就来討論积分方程 (2).

把 $y(\xi) \equiv y_0$ 代入 (2) 式右方,得

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0) d\xi.$$

显然, $y_1(x)$ 当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时是連續的,且 $y_1(x_0) = y_0$. 由于

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \max_{|\xi - x_0| \leqslant h} |f(\xi, y_0)| h \leqslant Mh \leqslant b,$$

y_1 也沒有超越 D 之外,仿此依次做出

$$\begin{cases} y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi)) d\xi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi)) d\xi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

于是我們得到函数貫

$$y_0, y_1(x), y_2(x). \cdots y_n(x), \cdots, \tag{4}$$

其中每一函数 $y_n(x)$ 都具有上述性質.

我們来証明:当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时,函数貫 (4) 一致收斂. 为此,先証明

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n. \tag{5}$$

当 $n = 1$ 时,

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0) d\xi \right| \leqslant M|x - x_0|.$$

用归納法,假定 (5) 当 $n = k$ 时成立,則当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, y_k(\xi)) - f(\xi, y_{k-1}(\xi))] d\xi \right| \\ &\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_k) - f(\xi, y_{k-1})| d\xi \right| \\ &\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |y_k - y_{k-1}| d\xi \right| \leqslant \frac{MK^k}{k!} \left| \int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|^k d\xi \right| \\ &= \frac{MK^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}. \end{aligned}$$

故得 (5) 式.

由于級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{MK^{k-1}}{k!} h^k$$

收斂,所以級数

$$Y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots$$

在 $|x - x_0| \leqslant h$ 中一致收斂,即函数貫 (4) 在 $|x - x_0| \leqslant h$ 中一致收斂于 $Y(x)$.

又由于

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi, Y)-f(\xi, y_n)]d\xi\right| \leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|Y-y_n|d\xi\right|,$$

故当 $n\to\infty$ 时，

$$Y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi, y_{n-1}(\xi))d\xi\right]=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi, Y(\xi))d\xi,$$

即 $Y(x)$ 适合 (2) 及初始条件 $Y(x_0)=y_0$. 倘有另一連續解 $Z(x)$, 則

$$Z(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi, Z)d\xi,$$

故得

$$\max_{|x-x_0|\leqslant h}|Y(x)-Z(x)|=\max_{|x-x_0|\leqslant h}\left|\int_{x_0}^{x}(f(\xi, Y)-f(\xi, Z))d\xi\right|$$

$$\leqslant K\max_{|x-x_0|\leqslant h}|Y(x)-Z(x)|h\leqslant\frac{1}{2}\max_{|x-x_0|\leqslant h}|Y(x)-Z(x)|,$$

因此必須 $Y(x)\equiv Z(x)$. 定理証完.

附記. 由

$$|Y(x)-y_m(x)|\leqslant\sum_{k=m}^{\infty}\frac{MK^k}{(k+1)!}|x-x_0|^{k+1}$$

可以估計第 m 次近似値 $y_m(x)$ 与准确解之間的誤差.

例. 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \quad (|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1)$$

过 (0, 0) 的近似解.

显然函数 x^2+y^2 适合 Lipschtz 条件,积分一下得

$$y(x)=\int_0^x[t^2+y^2(t)]dt=\frac{x^3}{3}+\int_0^x y^2(t)dt.$$

以 $y_0(x)=0$ 代入,则得

$$y_1(x)=\frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x)=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x\frac{1}{9}t^6dt=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7,$$

$$y_3(x)=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x\left(\frac{1}{9}t^6+\frac{2}{189}t^{10}+\left(\frac{1}{63}\right)^2t^{14}\right)dt$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7+\frac{2}{11\cdot 189}x^{11}+\frac{1}{15\cdot 63^2}x^{15},$$

可以継續算出諸 $y_4(x), y_5(x), \cdots$.

§23. 积分方程解的存在性与唯一性

定理 1. 假定 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的連續函数, $K(x, \xi)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$ 上連續,則当 λ 充分小时,积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

在 $[a,b]$ 上有唯一的連續解 $\varphi(x)$.

證. 任取 $[a,b]$ 上的連續函数 $\varphi_0(x)$, 則由

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_0(\xi)d\xi$$

所确定的函数 $\varphi_1(x)$ 亦是 $[a,b]$ 上的連續函数. 依次类推,作出

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_{n-1}(\xi)d\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

于是我們得到 $[a,b]$ 上的連續函数貫 $\{\varphi_n(x)\}$. 命

$$M=\max_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant\xi\leqslant b}}|K(x,\xi)|,\quad N=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|,\tag{1}$$

則得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant[\lambda M(b-a)]^{n-1}N.\tag{2}$$

因当 $n=1$ 时, (2)式已成立. 由归納法,假定 $n=k$ 时(2)式成立, 則当 $n=k+1$ 时,

$$|\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)|\leqslant\lambda\int_a^b|K(x,\xi)||\varphi_k(\xi)-\varphi_{k-1}(\xi)|d\xi$$
$$\leqslant\lambda M(b-a)[\lambda M(b-a)]^{k-1}N=[\lambda M(b-a)]^kN.$$

故得 (2) 式.

取 λ 充分小, 使 $0<\lambda M(b-a)<1$, 則由于級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda M(b-a))^k$$

收斂,可知級数

$$\varphi_1(x)+(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))+\cdots+(\varphi_n(y)-\varphi_{n-1}(x))+\cdots=\varphi(x)$$

一致收斂,即函数貫 $\{\varphi_n(x)\}$ 一致收斂于連續函数 $\varphi(x)$. 因此

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_{n-1}(\xi)d\xi\right]$$
$$=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

倘还有另一連續函数 $\psi(x)$ 适合积分方程,則

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\psi(\xi)d\xi,$$

故得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)|=\lambda\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^b K(x,\xi)[\varphi(\xi)-\psi(\xi)]d\xi\right|$$
$$\leqslant\lambda M(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)-\psi(x)|,$$

因此必須 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$. 定理証完.

§ 24. 微分方程組的解的存在性与唯一性

定理 1. 給定一組原始值 $x_0, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}$，又假定 1) 函数 $f_i(x_1, y_1, \cdots, y_n)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 在閉区域

$$(D) \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y_i - y_i^{(0)}| \leqslant b \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

上連續、M 为諸函数在 (D) 中絕对值的最大值，即对于 D 中的点有 $|f_i| \leqslant M(1 \leqslant i \leqslant n)$；2) 在区域 D 內，这些函数适合 Lipschtz 条件，即

$$|f_i(x_1y_1' \cdots y_n') - f_i(x_1y_1'', \cdots, y_n'')| \leqslant K\{|y_1' - y_1''| + \cdots + |y_n - y_n''|\},$$

此处 K 为一正常数，則微分方程組

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x_1y_1, \cdots, y_n) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{1}$$

有唯一的一組解

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x),$$

它們确定于区間 $|x - x_0| \leqslant h$ 中，此处 $h = \min\left(a, \frac{1}{2nK}, \frac{b}{M}\right)$ 且滿足

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \quad \cdots, \quad y_n(x_0) = y_n^{(0)}.$$

証. 1) 作一次逼近函数

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)})d\xi \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{2}$$

諸 $y_i^{(1)}(x)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是連續函数，又当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时，

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)})d\xi\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

因此一次逼近函数不会超出区域 D. 类似地，逐步定义

$$y_i^{(2)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(1)}, \cdots, y_n^{(1)})d\xi, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(m-1)}, \cdots, y_n^{(m-1)})d\xi, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

用归納法可以証明，当 $|x - x_0| \leqslant h$ 时，$|y_i^{(m)} - y_i^{(0)}| \leqslant b(m = 1, 2, \cdots)$.

2) 今往証明

$$|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)| \leqslant M(nK)^{m-1}\frac{|x - x_0|^m}{m!} \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{3}$$

当 $m = 1$ 时

$$|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)})d\xi\right| \leqslant M|x - x_0| \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

假定 (3) 式当 $m = k$ 时成立，則当 $m = k + 1$ 时，

$$|y_i^{(k+1)}(x) - y_i^{(k)}| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} [f_i(\xi, y_1^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)}) - f_i(\xi, y_1^{(k-1)}, \cdots, y_n^{(k-1)})]d\xi\right|$$

$$= M(nK)^k\frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

故得(3)式．又因級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(nK)^{m-1}\frac{h^m}{m!}$$

收斂，所以級数

$$y_i^{(0)}+(y_i^{(1)}(x)-y_i^{(0)})+\cdots+(y_i^{(m)}(x)-y_i^{(m-1)}(x))+\cdots=Y_i(x)$$
$$(1\leqslant i\leqslant n)$$

在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上一致收斂，即貫 $\{y_i^{(m)}(x)\}$ 一致收斂于 $Y_i(x)(1\leqslant i\leqslant n)$．

由于

$$\left|\int_{x_0}^{x}\{f_i(\xi,y_1^{(m)},\cdots,y_n^{(m)})-f_i(\xi,Y_1,\cdots,Y_n)\}d\xi\right|$$
$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}\{|y_1^{(m)}-Y_1|+\cdots+|y_n^{(m)}-Y_n|\}d\xi\right|,$$

所以

$$Y_i=\lim_{m\to\infty}y_i^{(m)}=\lim_{m\to\infty}\left[y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,y_1^{(m-1)},\cdots,y_n^{(m-1)})d\xi\right]$$
$$=y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,Y_1,\cdots,Y_n)d\xi\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

将两端对 x 求微商，得

$$\frac{dY_i}{dx}=f_i(x,Y_1(x),\cdots,Y_n(x))\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

且

$$y_i(x_0)=y_i^{(0)}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

倘方程組(1)还有另一組解 $Z_1,\cdots Z_n$，則

$$Z_i=y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,Z_1,\cdots Z_n)d\xi\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

命

$$\max_{|x-x_0|\leqslant h}[|Y_1(x)-Z_1(x)|+\cdots+|Y_n(x)-Z_n(x)|]=\theta,$$

則得

$$|y_i-Z_i|=\left|\int_{x_0}^{x}[f_i(\xi,Y_1,\cdots,Y_n)-f_i(\xi,Z_1,\cdots,Z_n)]d\xi\right|$$
$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{l=1}^{n}|Y_l(\xi)-Z_l(\xi)|\,d\xi\right|\leqslant h\theta K\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

将这 n 个不等式相加，則得

$$\theta\leqslant nhK\theta.$$

此不可能，除非 $\theta=0$，即 $Z_i(x)\equiv y_i(x)\quad(1\leqslant i\leqslant n)$．故得定理．

考虑一般的 n 阶微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).\tag{4}$$

这与以下的微分方程組是等价的：

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\quad\frac{dy_1}{dx}=y_2,\cdots,\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}$$
$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}).$$

所以由定理(1)得到

定理 2. 若 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 对于所有的变数連續，而对于 $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 适合 Lipschtz 条件，則微分方程(4)有唯一的解适合原始条件，当 $x = x_0$ 时，$y = y_0$，$y' = y'_0, \cdots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$。

§25. 压縮映象原理

定理 1. 假定 $\{\varphi\}$ 为集合 $\mathfrak{M}$ 上的函数族，滿足：

1) 每一函数 φ 都在 $\mathfrak{M}$ 上有界，即

$$|\varphi| \leqslant M_\varphi,$$

此处 M_φ 是与 φ 有关的常数；

2) $\{\varphi\}$ 中任何一个一致收斂的函数貫的极限，亦是这函数族中的函数；

3) $\{\varphi\}$ 上有一运算 A，$A(\varphi)$ 将 φ 变为 $\{\varphi\}$ 中某一函数；

4) 存在适合 $0 \leqslant m < 1$ 的常数 m，使 $\{\varphi\}$ 中任意二函数 φ_1, φ_2 都滿足条件

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leqslant m \overline{\underset{\mathfrak{M}}{Bd}} |\varphi_2 - \varphi_1|,$$

則方程

$$\varphi = A(\varphi)$$

在 $\{\varphi\}$ 中有唯一的解。

証. 在 $\{\varphi\}$ 中任取一个函数 φ_0，作出

$$\varphi_1 = A(\varphi_0).$$

由 3) 可知，$\varphi_1 \in \{\varphi\}$。依次类推，作出 $\varphi_0, \varphi_2, \cdots$，由 4) 知，$\{\varphi_i\}$ 一致收斂，由 2) 知，其极限卽为所要求的 φ。

由压縮映象原理立刻可以推出与唯一性有关的結果。

例如，命 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的連續函数，$K(x, \xi)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$，$a \leqslant \xi \leqslant b$ 上連續，命 $\mathfrak{M}$ 为閉区間 $[a, b]$，$\{\varphi\}$ 为 $[a, b]$ 上的連續函数的全体：

$$A(\varphi) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

則当 λ 充分小时，由压縮映象原理可知，积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

在 $[a, b]$ 上有唯一的連續解。

習題 1. 試由压縮映象原理推出定理 7.1 与定理 8.1。

習題 2. 假定 $f(x)$ 在 $-\infty < x < \infty$ 上定义，且对任何实数 x_1, x_2，皆滿足

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_2 - x_1|,$$

此处 $K < 1$ 为常数，則方程

$$x = f(x)$$

有唯一的解。

習題 3. 試推广压縮映象原理，使之能包含定理 10.1.

§ 26. 利用冪級数解微分方程

§ 21 的优函数法可以用来証明微分方程解的存在性.

定理 1 (Cauchy). 假定 $f(x, y)$ 在 $x = x_0$, $y = y_0$ 的一个邻域内可以展开为收斂的冪級数，則微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

有一个解 $y = y(x)$. 它适合于 $y_0 = y(x_0)$，而且在 x_0 的邻域内 y 可以展开为冪級数(这是通过 (x_0, y_0) 的唯一解).

具体些，取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 我們的假定是

$$f(x, y) = \sum_{l, m=0}^{\infty} a_{l, m} x^l y^m, \quad |x| \leqslant r \quad |y| \leqslant \rho, \tag{2}$$

在此假定下，微分方程 (1) 有唯一的解

$$y = \sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l, \tag{3}$$

这級数当

$$|x| < r(1 - e^{-\rho/2Mr})$$

时收斂，此处 M 是一个与 $f(x, y)$ $(|x| \leqslant r, |y| \leqslant \rho)$ 有关的常数.

証. 以 (3) 代入 (1) 得

$$\sum_{l=1}^{\infty} l c_l x^{l-1} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots$$

$$= a_{00} + a_{10}x + a_{01}\Big(\sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l\Big) + a_{20}x^2 + a_{11}x\Big(\sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l\Big) + a_{02}\Big(\sum_{l=1}^{\infty} c_l x^l\Big)^2 + \cdots.$$

比較系数得

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{00}, \\ 2c_2 &= a_{10} + a_{01}c_1, \\ 3c_3 &= a_{01}c_2 + a_{20} + a_{11}c_1 + a_{02}c_1^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

这是一种算法，經过"加"、"乘"，可以逐个地算出 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ 来.

由于

$$\sum_{l, m=0}^{\infty} a_{l, m} r^l \rho^m$$

收斂，故有 M 存在，使

$$|a_{l,m}| r^l \rho^m \leqslant M, \quad 或即 \quad |a_{l,m}| \leqslant \frac{M}{r^l \rho^m}.$$

因此得出函数 $f(x, y)$ 的优函数

$$\sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{M}{r^l \rho^m} x^l y^m = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}.$$

微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}$$

有解

$$y - \frac{y^2}{2\rho} = -rM\log\left(1-\frac{x}{r}\right) + c,$$

由于当 $x=0$ 时，$y=0$，所以得出 $c=0$。解这二次方程得

$$y = \rho\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right).$$

又因 $x=0$ 时，$y=0$，我們得一根

$$y = \rho\left(1 - \sqrt{1+\frac{2Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right). \tag{4}$$

当 $\frac{2Mr}{\rho}\left|\log\left(1-\frac{x}{r}\right)\right| < 1$，也就是当

$$|x| < r\left(1 - e^{-\frac{\rho}{2Mr}}\right)$$

时，(4) 可以展成 x 的冪級数，而这冪級数是方程 (1) 的解的优函数。

§27. 微分方程組

現在考慮

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \cdots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{1}$$

假定在点 $(x_0, (y_1)_0, \cdots, (y_n)_0)$ 的一个邻域内，f_i 都可以表为收斂的冪級数，則此微分方程組有一个解，当 $x = x_0$ 时，有

$$y_1 = (y_1)_0, \cdots, \quad y_n = (y_n)_0,$$

且在 $x = x_0$ 的某一邻域中，它表成为冪級数。

不妨假定 $x_0 = 0$，$(y_1)_0 = 0$，$\cdots$，$(y_n)_0 = 0$，命

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n) = \sum_{l, m_1, \cdots, m_n = 0}^{\infty} a^{(i)}_{l, m_1, \cdots, m_n} x^l y_1^{m_1}, \cdots, y_n^{m_n}$$

在 $|x| \leqslant r$，$|y_i| \leqslant \rho$ 中收斂。

以

$$y_i = \sum_{l=1}^{\infty} c_l^{(i)} x^l$$

代入 (1)，比較系数，易見这也是可以仅用加乘就能逐步定出 $c_l^{(1)}, \cdots, c_l^{(n)} \cdots (l = 1, 2, \cdots)$ 的計算方法。

与上节同法，有M存在，使

$$|a^{(i)}_{l,m_1,\cdots,m_n}|r^l\rho^{m_1+\cdots+m_n}\leqslant M.$$

因此f_i有优函数

$$\sum_{l,m_1,\cdots,m_n=0}^{\infty}\frac{M}{r^l\rho^{m_1+\cdots+m_n}}x^l y_1^{m_1}\cdots y_n^{m_n}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y_1}{\rho}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{\rho}\right)}.$$

求方程

$$\frac{dy_1}{dx}=\cdots=\frac{dy_n}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y_1}{\rho}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{\rho}\right)}$$

的解．因当$x=0$时，$y_1=\cdots=y_n=0$，故显見$y_1=y_2=\cdots=y_n$，所以得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^n}.$$

解此方程得

$$y=\rho-\rho\sqrt[n+1]{1+\frac{(n+1)Mr}{\rho}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)},$$

当$|x|<r(1-e^{-\rho/(n+1)Mr})$时，它可以展开为冪級数．这是方程(1)的解答的优函数．

附記． 考慮一般性的微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

这与以下的方程組等价：

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\quad \frac{dy_1}{dx}=y_2,\cdots,\quad \frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}).$$

所以得以下的．

定理． 如果F在$x=x_0$, $y=y_0$, $y'=(y')_0$, $\cdots$, $y^{(n-1)}=(y^{(n-1)})_0$的附近可以展开为冪級数，則該微分方程有一个解：当$x=x_0$时，有$y=y_0$, $y'=(y')_0$, $\cdots$, $y^{(n-1)}=(y^{(n-1)})_0$，且在$x=x_0$的某一邻域内可以表为冪級数．

§28. 偏 微 分 方 程

定理 1 (Cauchy–Ковалевская)． 假定$\varphi(y)$在y_0附近有收斂的冪級数，且$\varphi(y_0)=z_0$、$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=y_0}=q_0$，函数

$$f(x,y,z,q)$$

在x_0, y_0, z_0, q_0附近有收斂的冪級数，則方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

有一解$z=z(x,y)$，它在(x_0,y_0)附近可以展开成收斂的冪級数，而且$z(x_0,y)=\varphi(y)$．

证. 1）简化. 作代换 $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, 故我們可以假定 $x_0 = y_0 = 0$. 又命 $Z = z - \varphi(y)$, 故可以假定 $\varphi(y) \equiv 0$. 作了这些代换之后, $Z(0, y) = z(0, y) - \varphi(y) \equiv 0$. 我們还可以假定 $f(0, 0, 0, 0) = 0$, 否則, 假若 $f(0, 0, 0, 0) = a$, 那末命 $Z = z - ax$ 即可. 这样一来, 問題就化为解下面的問題:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \sum\limits_{i,j,k,l=0}^{\infty} a_{i,j,k,l} x^i y^j z^k \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^l; \\ \qquad \left(\begin{matrix} a_{0,0,0,0} = 0, \ |x| \leqslant r, \ |y| \leqslant r, \ |z| \leqslant r \\ \left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right| \leqslant \rho. \end{matrix} \right), \\ z(0, y) \equiv 0. \end{cases} \tag{1}$$

2）冪級数展开. 命

$$z = \sum_{s=1}^{\infty} c_s(y) x^s,$$

代入 (1) 式得

$$\sum_{s=1}^{\infty} s c_s(y) x^{s-1} = \sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} a_{ijkl} x^i y^j \left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s(y) x^s\right)^k \left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s'(y) x^s\right)^l.$$

比較 x 的乘方的系数得

$$c_1(y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j00} y^j,$$

$$2c_2(y) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{1j00} y^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_{0j10} c_1(y) y^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_{0j01} c_1'(y) y^j$$

....

由于左端 x^s 的系数为 $(s+1)c_{s+1}(y)$, 而右端 x^s 的系数則为 a_{ijkl} 与 $c_1(y), \cdots, c_s(y)$; $c_1'(y), \cdots, c_s'(y)$ 的正系数的多項式, 故仅用加乘运算就可以逐步决定諸 $c_s(y)$. 由于 $c_1(y) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{0j00} y^j$, 用归納法可知級数 $c_s(y)$ 的系数也是 a_{ijkl} 的正系数多項式.

3）优函数. 由于級数

$$\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} a_{ijkl} r^i r^j r^k \rho^l$$

的收斂性, 得知有 M 存在, 使

$$|a_{ijkl}| \leqslant \frac{M}{r^{i+j+k} \rho^l},$$

因此

$$|a_{ijkl}| \leqslant \frac{(i+j+k)!M}{i!j!k!\alpha^i r^{i+j+k} \rho^l},$$

此处 α 是一小于 1 的正数. 于是我們得到 $f(x, y, z, q)$ 的优函数

$$\sum_{i,j,k,l=0}^{\infty} \frac{(i+j+k)!M}{i!j!k!\alpha^i r^{i+j+k} \rho^l} x^i y^j z^k q^l - M$$

$$= M\left[\frac{1}{\left(1-\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+y+z}{r}\right)\left(1-\dfrac{q}{\rho}\right)}-1\right]$$

(請注意引进 α 的作用)．因此問題就在于求証

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{M}{\left(1-\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+y+z}{r}\right)\left(1-\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\rho}\right)}-M\\ z(0,y)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m y^m,\quad a_m\geqslant 0\end{cases}\tag{2}$$

有一解，使它在 $(0,0)$ 附近可以展为 x, y 的冪級数，也就是如果給了一个非負系数的冪級数 $\sum a_m y^m$，而(2)在 $(0,0)$ 附近有一个 x,y 的冪級数的解，那末这个解就是(1)的解的优函数．因而証明了(1)的解的存在性．

我們且不去解偏微分方程(2)，而先考虑以下的常微分方程的問題，然后从下面的問題中給出(2)式中的 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_m y^m$，并且給出(2)式的一特解．

求出具有正系数的冪級数

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m t^m$$

(在 $t=0$ 附近收斂)，适合于

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{df}{dt}=\dfrac{M}{\left(1-\dfrac{f+t}{r}\right)\left(1-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{df}{dt}\right)}-M,\\ f(0)=0.\end{cases}\tag{3}$$

将(3)式改写成为

$$\frac{1}{\alpha\rho}\left(\frac{df}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)\left(\frac{df}{dt}\right)+\frac{M}{1-\dfrac{f+t}{r}}-M=0,$$

解得

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}&=\frac{\alpha\rho}{2}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)^2-\frac{4M}{\alpha\rho}\left(\frac{t+f}{r}\right)\Big/\left(1-\frac{t+f}{r}\right)}\right]\\&=\frac{\alpha\rho}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)\left(1-\sqrt{1-w}\right),\end{aligned}\tag{4}$$

这儿

$$w=\frac{4M\alpha\rho}{(\rho-\alpha M)^2}\left(\frac{t+f}{r}\right)\Big/\left(1-\frac{t+f}{r}\right).$$

由于当 $|w|<1$ 时

$$1-\sqrt{1-w}=\frac{1}{2}w+\frac{1}{2\cdot 4}w^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}w^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}w^4+\cdots.$$

因此当 α 充分小时，可使

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}>0$$

及(4)式右边可以展开为

$$t+f$$

的正系数冪級数. 由 § 26 的处理方法可知，(3)式有一个冪級数

$$f(t)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m t^m, \qquad a_m\geqslant 0$$

的解.

再回到原来的問題. 取

$$z=f\left(\frac{x}{\alpha}+y\right),$$

則方程(3)变为方程(2)，而且

$$z(0,y)=f(y)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m y^m.$$

卽得所証.

至于深刻地理解冪級数的各种应用，必須有复变函数論的知識. 这里所講的，仅仅是个开头而已.

第十四章　曲綫的微分性質

§1. 矢量的微商

我們現在推广微分法到依賴于某一参变数 τ 的变矢量 $\mathbf{a}(\tau)$，也就是

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\tau)=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

的对 x, y, z 軸的三个支量 a_1, a_2, a_3 都是 τ 的函数的情况. 我們确定某一点 O 作为所有的这些矢量的起点，当参变数 τ 改变时，变矢量 $\mathbf{a}(\tau)$ 的另一端在空間画一条曲綫 (C).

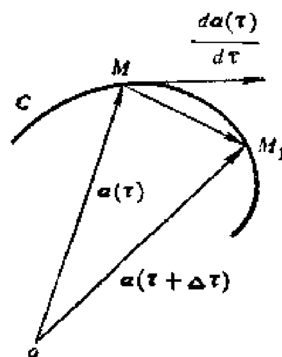


图 33

假定当参数取值 τ 与 $\tau+\Delta\tau$ 时，变矢量对应的位置是 OM 与 OM_1，綫段 MM_1 对应于矢量差

$$\mathbf{a}(\tau+\Delta\tau)-\mathbf{a}(\tau).$$

关系式

$$\frac{\mathbf{a}(\tau+\Delta\tau)-\mathbf{a}(\tau)}{\Delta\tau}$$

所得出的矢量是平行于 MM_1 的矢量，当 $\Delta\tau\to 0$ 时，如果极限存在，卽得矢量 $\mathbf{a}(\tau)$ 的微商

$$\frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\mathbf{a}(\tau+\Delta\tau)-\mathbf{a}(\tau)}{\Delta\tau}.$$

显然，这微商是一个矢量，它的方向是沿曲綫 (C) 在点 M 的切綫方向.

再求微商得二級微商 $\frac{d^2}{d\tau^2}\mathbf{a}(\tau)$，余类推.

如果

$$\mathbf{a}(\tau)=[a_1(\tau),\ a_2(\tau),\ a_3(\tau)],$$

可得

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{a}(\tau)=[a_1'(\tau),\ a_2'(\tau),\ a_3'(\tau)]$$

及

$$\frac{d^m}{d\tau^m}\mathbf{a}(\tau)=[a_1^{(m)}(\tau),\ a_2^{(m)}(\tau),\ a_3^{(m)}(\tau)],$$

卽矢量的微商是支量微商所成的矢量.

立卽得出一个函数乘一个矢量的微商公式

$$\frac{d}{d\tau}[f(\tau)\mathbf{a}(\tau)]=\frac{df(\tau)}{d\tau}\mathbf{a}(\tau)+f(\tau)\frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}.$$

又由于

$$\mathbf{a}(\tau)\cdot\mathbf{b}(\tau)=a_1(\tau)b_1(\tau)+a_2(\tau)b_2(\tau)+a_3(\tau)b_3(\tau),$$

可得

$$\frac{d}{d\tau}[\mathbf{a}(\tau)\cdot\mathbf{b}(\tau)] = a_1'(\tau)b_1(\tau) + a_2'(\tau)b_2(\tau) + a_3'(\tau)b_3(\tau)$$

$$+ a_1(\tau)b_1'(\tau) + a_2(\tau)b_2'(\tau) + a_3(\tau)b_3'(\tau)$$

$$= \frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}\cdot\mathbf{b}(\tau) + \mathbf{a}(\tau)\cdot\frac{d\mathbf{b}(\tau)}{d\tau}.$$

这是内积微商公式.

由此立即得出:設 $\mathbf{a}(\tau)$ 为单位矢量,即 $\mathbf{a}(\tau)\cdot\mathbf{a}(\tau)=1$, 則

$$\mathbf{a}(\tau)\cdot\frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}=0.$$

所以**单位矢量和它的微商垂直**.

又由

$$\mathbf{a}(\tau)\times\mathbf{b}(\tau) = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1),$$

可知

$$\frac{d}{d\tau}[\mathbf{a}(\tau)\times\mathbf{b}(\tau)] = (a_2'b_3 - a_3'b_2,\ a_3'b_1 - a_1'b_3,\ a_1'b_2 - a_2'b_1)$$

$$+ (a_2b_3' - a_3b_2',\ a_3b_1' - a_1b_3',\ a_1b_2' - a_2b_1')$$

$$= \frac{d\mathbf{a}(\tau)}{d\tau}\times\mathbf{b}(\tau) + \mathbf{a}(\tau)\times\frac{d\mathbf{b}(\tau)}{d\tau}.$$

这是矢量积的微商公式.

如果把参数 τ 看为时間 t, 則以原点为起点的矢量

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=[\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)]$$

的另一端所成的軌迹: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ 可以看作一个质点的运动曲綫,它对 t 的微商

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

就是这点的运动的速度矢量,而

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

就是这一质点加速度矢量.

在曲綫 (C) 上取一点作为出发点,用从这点沿曲綫(C)长度 s 来表出这曲綫上的点,即以 s 为参变数. 前已証明,由 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 所对应的点 M_1, M_2 之間的弧长等于

$$\int_{(M_1)}^{(M_2)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.$$

弧的微分表达式

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}}.$$

如果弧长 s 为参变数,則微商 $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ 各等于曲綫切綫的方向余弦,就是等于这切綫的正方向与坐标軸交角的余弦. 更确切些,速度矢 $\mathbf{v}$ 的长度是

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

而速度的方向余弦是

$$\cos(\widehat{vx})=\frac{dx}{ds}=\frac{\frac{dx}{dt}}{v},$$

$$\cos(\widehat{vy})=\frac{dy}{ds}=\frac{\frac{dy}{dt}}{v},$$

$$\cos(\widehat{vz})=\frac{dz}{ds}=\frac{\frac{dz}{dt}}{v}.$$

我們把这切綫方向余弦定义为曲綫在点 (x, y, z) 的方向余弦，它們与 dx, dy, dz 成比例，因此切綫方程可以写成为

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

或

$$\frac{X-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{Y-\psi(t)}{\psi'(t)}=\frac{Z-\chi(t)}{\chi'(t)},$$

这儿 (X, Y, Z) 是切綫上点的坐标.

§2. 平面上的运动

命 $\mathbf{r}$ 表示平面上一点 M 的位置的矢量，我們可以把 $\mathbf{r}$ 表成为

$$r\mathbf{R},\quad \mathbf{R}=(\cos\theta, \sin\theta).$$

这就是极坐标表示法，$\mathbf{R}$ 是一单位矢量，我們可以立刻看到

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}=(-\sin\theta, \cos\theta)\quad (定义为\ \mathbf{P}),$$

这是和 $\mathbf{R}$ 垂直的矢量.

微分 $\mathbf{r}=r\mathbf{R}$，则得

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{R}+r\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{R}+r\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{R}+r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P}.$$

这公式把一点的速度分解成为两部分，前者 $\mathbf{v}_r=\frac{dr}{dt}\mathbf{R}$ 表示速度沿向径的分量，而后者

$$\mathbf{v}_p=r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P}$$

表示沿垂直于向径的方向的分量. $\frac{d\theta}{dt}$ 称为角速度，在圓周上运动时，即 $\frac{dr}{dt}=0$，可知

$$\mathbf{v}=r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P},$$

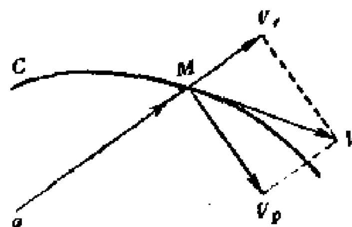


图 34

即

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}.$$

加速度矢量等于

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{R} + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{R}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{P} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{P} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{P}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\ &= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{R} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{P},\end{aligned}$$

这儿用了

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\theta} = (-\cos\theta, -\sin\theta) = -\mathbf{R}.$$

如果我們的运动是由于一个向心力所引起的，即 $\mathbf{F} = f\mathbf{R}$. 由公式 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$（力等于質量乘加速度），則与以上的公式相比較就可以看出

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

也就是

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = 常数 = h.$$

而 $\frac{1}{2}r^2d\theta$ 就等于向径所扫过的面积元素 dA. 所以

$$\frac{dA}{dt} = h,$$

即如果經过的时間相等，則向径所扫过的面积也相等.

这就是著名的 Kepler 行星运行第一規律.

§3. 平面曲綫的曲率

把 s 作为参变数，則

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) = \mathbf{t}$$

就成为一个单位切矢量. 这个单位切矢量的微商

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}\right)$$

垂直于单位切矢量，它称为**曲率矢量**. 曲率矢量的長度

$$|\mathbf{n}| = \frac{1}{\rho}$$

的倒数 ρ 称为**曲率半径**.

命

$$\mathbf{t} = (\cos\alpha, \sin\alpha),$$

其中 α 就是切矢量 $\mathbf{t}$ 与 x 軸所成的角度. 因此

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)\frac{d\alpha}{ds}.$$

角度 α 对弧长 s 的微商 $k=\frac{d\alpha}{ds}$ 称为平面曲綫 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 的曲率. 令

$$\frac{1}{\rho}=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|,$$

故曲率絕对值的倒数就是曲率半径[1].

易知

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}$$

及

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}&=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{ds/dt}\right)\frac{dt}{ds}\\&=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\\&=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\\&=\left[\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]\Big/\left(\frac{ds}{dt}\right)^4.\end{aligned}$$

由 $\mathbf{r}=(\varphi(t),\psi(t))$ 及

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\varphi'^2+\psi'^2,$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\frac{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}{(\varphi'^2+\psi'^2)^2}(-\psi',\varphi'),$$

因而得出

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}},$$

$$\frac{1}{\rho}=|k|=\frac{|\varphi'\psi''-\varphi''\psi'|}{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}}.$$

如果用显函数表示法,即 $x=x,\ y=f(x)$, 此处 x 是参变数,则得

$$k=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho}=|k|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

又如果用极坐标表示法,即 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r=r(\theta)$, θ 是参数,得

$$\varphi'=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad \varphi''=\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta.$$

1) 一般微分几何教科书中,定义曲率矢量 n 的长度为曲率,因此曲率值大于零或等于零. 我們这样的定义,即可正可負,当确定了弧长的計算起点和曲綫的方向后,这个正負符号就反映了曲綫上凹或下凹的几何特性.

$$\psi' = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta, \quad \psi'' = \frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta.$$

即得

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}},$$

$$\frac{1}{\rho} = |k| = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

关于曲率 k 的正負号可以作如下的說明：在 $y'' > 0$ 时，曲率 $k > 0$，这时曲綫向上凹；在 $y'' < 0$ 时，曲率 $k < 0$，这时曲綫向上凸。

例. 圓 $x^2 + y^2 = R^2$ 的参数表示式是 $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, 所以

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}.$$

所以曲率半径就是圓的半径 R，曲率也是常数 $\frac{1}{R}$.

§4. 曲綫的本性方程

用坐标系統来表示曲綫的性質，倒底具有人为的性質，这个人用这个坐标系，那个人用那个坐标系，得出来的表示法可以是很不同的. 其原因在于坐标系統并不是曲綫的基本性質，而我們仅仅借用坐标系統来表达曲綫的性質而已.

曲綫的基本因素应当是弧长 s（不管坐标系統如何，只要在其上取一起点，定一确定的方向，取一单位长度，則曲綫的弧长便完全确定）及曲率 $k = \frac{d\alpha}{ds}$.

对每一条曲綫，都可以在这两个因素之間建立起依从关系

$$k = g(s), \tag{1}$$

这个方程称为曲綫的本性方程.

定理. 具有同一本性方程的諸曲綫，只能在平面上的位置有所不同，換言之，如果有两条曲綫都适合 (1) 式，則可經过平移

$$(x, y) \to (x + h, y + k)$$

与旋轉

$$(x, y) \to (x\cos\theta + y\sin\theta, \ -x\sin\theta + y\cos\theta),$$

把一条搬到另一条.

証. 先經过平移，把两条曲綫計算弧长的起点重合起来，再繞这点旋轉一下，使它們在这点的切綫重合起来. 这两条曲綫的动点坐标各为 (x_1, y_1), (x_2, y_2)；切綫与 x 軸的交角各为 α_1, α_2；曲率各为 k_1, k_2.

由 (1) 可知，对所有的 s 都有

$$k_1 = k_2,$$

也就是

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{d\alpha_2}{ds}.$$

因此 $\alpha_1 = \alpha_2 + c$，c 是一常数．但当 $s = 0$ 时，已知 $\alpha_1 = \alpha_2$，所以 $c = 0$．

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{dx_2}{ds},$$

$$\frac{dy_1}{ds} = \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{dy_2}{ds}.$$

所以 x_1、x_2 相差一个常数，y_1，y_2 相差一个常数．但当 $s = 0$ 时，$x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，因此

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2.$$

所以二曲綫重合起来了．

这个証法也說明了根据本性方程还原为坐标表示法的方法：先从

$$\frac{d\alpha}{ds} = g(s) \quad [\text{对任意的連續函数 } g(s)]$$

得

$$\alpha = \alpha(s) = \int_0^s g(u)du + \alpha_0,$$

此处 α_0 是常数，再从等式

$$dx = \cos\alpha\, ds, \quad dy = \sin\alpha\, ds$$

得出

$$x = \int_0^s \cos\alpha\, ds + x_0, \quad y = \int_0^s \sin\alpha\, ds = y_0,$$

此处 x_0，y_0 也是常数．

不难看出，曲綫的平行移动会影响 x_0，y_0，而旋轉会影响 α．

注意 1．曲綫长度的起算点的选择，方向的选择，可能引起本性方程的变化．

2．两条处于軸对称位置的曲綫，它們的本性方程仅在右端差一符号，即

$$k = g(s)$$

与

$$k = -g(s).$$

实际上，对称地选择两条曲綫弧长的起算点与方向时，它們的曲率符号相反．如图 35．反之，分别具有上两式的曲綫，可借平行移动使它們处于对称的位置．

例 1．求对应于本性方程 $R^2 = 2as$ 的曲綫．

因为我們只要求出一条曲綫即可，所以在选择积分常数的时候，可以依照对我們最便利的方法选择．

由

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}}$$

得

$$s = \frac{a}{2}\alpha^2, \quad ds = a\alpha\, d\alpha.$$

因此

$$dx = \cos\alpha\, ds = a\alpha\cos\alpha\, d\alpha,$$

$$dy = \sin\alpha\, ds = a\alpha\sin\alpha\, d\alpha,$$

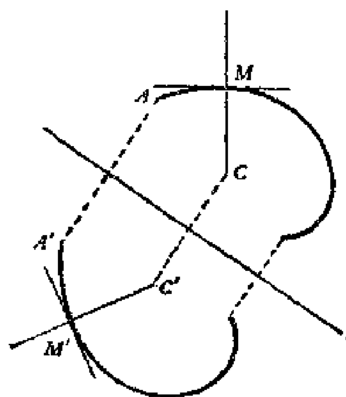


图 35

故

$$x = a(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha), \quad y = a(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

例 2. 求对应于本性方程 $R = ms$ 的曲线.

由

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{ms}$$

得

$$s = e^{m\alpha},$$

$$ds = me^{m\alpha}d\alpha,$$

$$dx = \cos\alpha \cdot me^{m\alpha}d\alpha,$$

$$dy = \sin\alpha \cdot me^{m\alpha}d\alpha.$$

因此

$$x = \frac{m}{1+m^2}(m\cos\alpha + \sin\alpha)e^{m\alpha},$$

$$y = \frac{m}{1+m^2}(m\sin\alpha - \cos\alpha)e^{m\alpha}.$$

现在将直角坐标化为极坐标:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}e^{m\alpha}.$$

命 $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{m}$,则

$$\frac{y}{x} = \frac{m\sin\alpha - \cos\alpha}{m\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega).$$

故 $\theta = \alpha - \omega$,所以得到曲线的极坐标表达式

$$r = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}e^{m\theta}e^{m\omega}.$$

这就是对数螺线.

例 3. 試求悬鏈綫 $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 的本性方程.

由

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}$$

得

$$R = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

另一方面,

$$s = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2},$$

故得本性方程

$$R = a + \frac{s^2}{a}.$$

例 4. 試求星形綫 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ 的本性方程。

取第一象限的那支的中点 $\left(\text{对应 } t = \frac{\pi}{4}\right)$ 为弧长的起算点，則

$$s = \frac{3a}{2}\sin^2 t - \frac{3a}{4}.$$

故

$$R = \frac{ds}{dt} = 3a\sin t\cos t.$$

因此本性方程为

$$R^2 = 4\cdot\frac{3a}{2}\sin^2 t\,\frac{3a}{2}\cos^2 t = 4\left(\frac{3a}{4} + s\right)\left(\frac{3a}{4} - s\right) = \frac{9a^2}{4} - 4s^2.$$

§ 5. 曲率圓与漸屈綫

在曲綫上取参数为 $t,\ t + \Delta t,\ t + 2\Delta t$ 的三个点，对这三点作一圓。 当 $\Delta t \to 0$ 时，这圓的极限位置称为曲率圓，也称密切圓。

命圓的方程是

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

即得

$$[\varphi(t) - a]^2 + [\psi(t) - b]^2 = R^2, \tag{1}$$

$$[\varphi(t + \Delta t) - a]^2 + [\psi(t + \Delta t) - b]^2 = R^2, \tag{2}$$

$$[\varphi(t + 2\Delta t) - a]^2 + [\psi(t + 2\Delta t) - b]^2 = R^2. \tag{3}$$

由 (2) 減 (1) 再除以 Δt，幷令 $\Delta t \to 0$，可知

$$[\varphi(t) - a]\varphi'(t) + [\psi(t) - b]\psi'(t) = 0. \tag{4}$$

由 (1) 加 (3) 減去两倍的 (2)，再除以 Δt^2，幷命 $\Delta t \to 0$，可知

$$[\varphi(t) - a]\varphi''(t) + [\psi(t) - b]\psi''(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = 0. \tag{5}$$

解出 (4) 与 (5)，可知

$$\varphi(t) - a = \frac{\psi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''},$$

$$\psi(t) - b = \frac{-\varphi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}.$$

所以我們的圓的圓心是

$$\left.\begin{aligned} a &= \varphi - \frac{\psi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}, \\ b &= \psi + \frac{\varphi'(\varphi'^2 + \psi'^2)}{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

而圓的半径平方等于

$$R^2=\left(\frac{\psi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}\right)^2+\left(\frac{\varphi'(\varphi'^2+\psi'^2)}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}\right)^2=\frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^3}{(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')^2}.$$

这就是曲綫在 t 这一点曲率半径的平方，我們取

$$R=\frac{(\varphi'^2+\psi'^2)^{3/2}}{|\varphi'\psi''-\psi'\varphi''|}=\left|\frac{ds}{d\alpha}\right|.$$

在曲綫由函数 $y=f(x)$ 表示的情况下，

$$a=x-\frac{1+y'^2}{y''}y',\quad b=y+\frac{1+y'^2}{y''},\quad R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

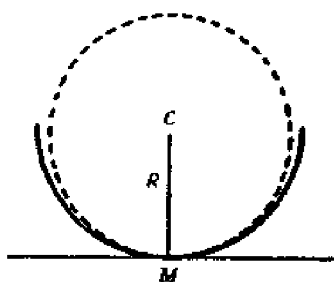


图 36

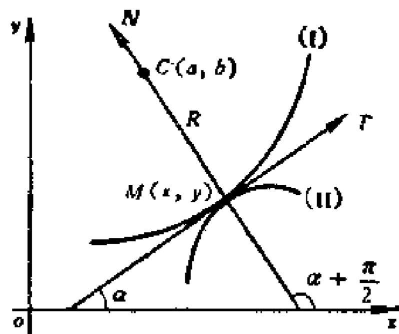


图 37

由图 37 知

$$x-a=-R\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y-b=-R\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),$$

故圆心也可以表为

$$a=x-R\sin\alpha,$$

$$b=y+R\cos\alpha.$$

曲率圓显然有以下的一些性质（参考图 36，37）：

1）与曲綫在 t 点相切；

2）它的凹向与曲綫在这一点的凹向相同；

3）它的半径与曲綫在这一点的曲率半径相同。

定义. (a,b) 称为曲率中心，曲率中心的軌迹称为原曲綫的漸屈綫，而原曲綫称为这漸屈綫的漸伸綫。

例 1. 求拋物綫 $y^2=2px$ 的漸屈綫。

由 $yy'_x=p$ 得 $yy''_{x^2}+y'^2_x=0$，即 $y^3y''_{x^2}=-p^2$。

因此曲率中心的坐标 (ξ,η) 为

$$\xi=x-yy'_x\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=x+\frac{y^2+p^2}{p}=3x+p=\frac{3y^2}{2p}+p,$$

$$\eta=y+y\frac{y^2+(yy'_x)^2}{y^3y''_{x^2}}=y-\frac{y}{p^2}(y^2+p^2)=-\frac{y^3}{p^2}.$$

从以上两个方程中消去 y，得渐屈綫方程

$$\eta^2=\frac{8}{27p}(\xi-p)^3.$$

例 2. 求椭圆 $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ 的渐屈綫.

由于

$$x'_t=-a\sin t,\quad x''_{t^2}=-a\cos t,$$
$$y'_t=b\cos t,\quad y''_{t^2}=-b\sin t,$$

代入 (6) 就得曲率中心 (ξ,η) 的坐标为

$$\xi=a\cos t-\frac{b\cos t(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)}{ab}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$
$$\eta=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t.$$

由此消去 t，就得到椭圆的渐屈綫

$$(a\xi)^{2/3}+(b\eta)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}.$$

例 3. 求对数螺綫 $r=ae^{m\theta}$ 的渐屈綫.

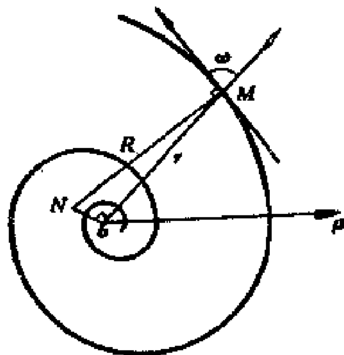


图 38

因为

$$\frac{dr}{d\theta}=mae^{m\theta}=mr,$$

故

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{1}{m},$$

$$R=\frac{(r^2+m^2r^2)^{3/2}}{r^2+2m^2r^2-m^2r^2}=r\sqrt{1+m^2}=\frac{r}{\sin\omega}.$$

命 $N(r_1,\theta_1)$ 为曲率中心，则 $ON\perp OM$，故

$$r_1=r\operatorname{ctg}\omega=mr,\quad \theta_1=\frac{\pi}{2}+\theta.$$

故得渐屈綫

$$r_1=mae^{m\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)}=a_1e^{m\theta_1}\ (\text{这里 } a_1=mae^{-\frac{m\pi}{2}}).$$

§ 6. 一般的一阶微分方程

一般的一阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y')=0. \tag{1}$$

如果易于解出 y'，虽然不止一个解：

$$y'=\varphi_1(x,y),\quad y'=\varphi_2(x,y),\ \cdots,\quad y'=\varphi_r(x,y), \tag{2}$$

则我們可以逐步解出 (2) 来，这些解当然都是原方程的解.

例. 求方程

$$xy'^3-(x^2+2y)y'^2+2x(y+2)y'-4x^2=0$$

的解.

分解因子得

$$y' - x = 0, \quad y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}.$$

第一式的解是 $y = \frac{1}{2}x^2 + c$，第二式是 0 次齐次的，因此换变数 $y = ux$，得出

$$\frac{du}{\pm\sqrt{u^2 - 4}} = \frac{dx}{x}.$$

积分之，得

$$u \pm \sqrt{u^2 - 4} = \frac{x}{k},$$

这儿 k 是常数. 有理化得

$$\left(u - \frac{x}{k}\right)^2 - (u^2 - 4) = 0,$$

卽得

$$\frac{x^2}{k^2} - \frac{2y}{k} + 4 = 0$$

或

$$x^2 = 2k(y - 2k).$$

因此原方程的解是两組拋物綫

$$y = \frac{1}{2}x^2 + c$$

与

$$x^2 = c'(y - c').$$

如果 (1) 式并不容易(或在初等函数范围內不可能)解出 y' 来，我們可以用以下的几何方法：

命 $\frac{dy}{dx} = p$，把解方程 (1) 的問題看成为在曲面

$$F(x, y, p) = 0 \tag{3}$$

上求适合于条件

$$dy = p\,dx \tag{4}$$

的曲綫的問題.

如果 (3) 有参变数表示法

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad p = \omega(u, v), \tag{5}$$

則由 (4) 可知

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \omega(u, v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right]. \tag{6}$$

因此，解微分方程 (1) 的問題一变而为解

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\omega\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}}{\omega\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}} \tag{7}$$

的問題了. 如果能解出 (7),

$$v = g(u, c),$$

則

$$x = \varphi(u, g(u, c)), \quad y = \psi(u, g(u, c)).$$

这就是方程 (1) 的解.

但一般講来,求参数表达式 (5) 与解方程 (7) 都并不容易,甚至不可能用初等函数表出来.

例 1. 求

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0 \tag{8}$$

的解.

把 (8) 看成为 (x, y, p) 所定义的曲面,把 y, p 看成为参数,则得

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}. \tag{9}$$

由 $dx = \frac{1}{p} dy$ 得

$$\frac{1}{p} dy = \left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right) dp - \left(\frac{p^2}{4y^2} - \frac{2}{p}\right) dy,$$

卽得

$$dp \frac{p^3 - 4y^2}{2yp^2} = \frac{p^3 - 4y^2}{4y^2 p} dy.$$

除去因子

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2yp}, \tag{10}$$

得出

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y}.$$

解得 $p = cy^{\frac{1}{2}}$. 因而代入 (9),

$$x = \frac{c^2}{4} + \frac{2}{c} y^{\frac{1}{2}},$$

就是方程 (8) 的解. 引进新常数 $c_1 = \frac{1}{4} c^2$,得出更整齐的形式:

$$y = c_1(x - c_1)^2. \tag{11}$$

注意我們消去了因子 (10), 这个因子的分子

$$p^3 - 4y^2 = 0$$

給出另一解来. 代进 (8) 式,可以获得

$$27y = 4x^3,$$

它也是 (8) 式的解. 又由 (10) 的分母, $y = 0$ 也是一个解.

带一个参变数的一阶微分方程的解称为通解,以上的討論說明了,通解之外还有两个特解:

$$y = 0, \quad y = \frac{4}{27} x^3.$$

这是怎样得来的?

例 2. Clairaut 方程

$$y = xy' + f(y'). \tag{12}$$

考虑曲面

$$y = xp + f(p). \tag{13}$$

取 x 与 p 为参数,利用 $dy = p\,dx$, 求 (13) 的微分,可得

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx},$$

即得

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

由 $\frac{dp}{dx} = 0$ 得 $p = c$, 代入 (13) 得 (12) 的解答

$$y = cx + f(c).$$

但由另一因子 $x + f'(p) = 0$ 得

$$x = -f'(p), \quad y = -pf'(p) + f(p).$$

把 p 看为参变数,这也是 (12) 的解.

总之,这儿有这样的現象:給了一个微分方程 (1), 我們在它的通解

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{14}$$

之外(即带有一个参变数的解之外), 还可能有解. 其他解的出現是由于曲綫族的一种几何性質:存在一条曲綫 L, 其上任一点都和 (14) 中的某一綫相切. 这样的曲綫的切綫显然与 Φ 的某一切綫相同, 即 y' 相同. 因此也适合于 (1) 式. 这种性质的曲綫称为曲綫族 (14) 的包絡綫.

§7. 包 絡 綫

命

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

是一个曲綫族,在 (x, y) 平面上某区域內每一点至少有曲綫族的一条曲綫通过.

現在想找到曲綫 L,使 L 的每一点都与 (1) 族的某一曲綫相切,而且曲綫 L 的每一段都与族 (1) 的无穷多条曲綫相切(不同的 c 对应于不同的曲綫), 这样的 L 称为族 (1) 的包絡或包絡綫.

如果包絡存在,则包絡上每一点 (x, y) 必与族 (1) 中之一条曲綫

$$\Phi(x, y, c_0) = 0$$

相切,这 c_0 是由点 (x, y) 所決定的,命之为 $c_0 = c(x, y)$, 即包絡上的点一定适合于

$$\Phi(x, y, c(x, y)) = 0.$$

在包絡上, y 又是 x 的函数. 不妨把 $c(x, y)$ 看成为 x 的函数 $c(x)$,也就是

$$\Phi(x, y, c(x)) = 0. \tag{2}$$

对 x 微分 (2) 式得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial \Phi}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0,$$

这式所得出的 $\frac{dy}{dx}$ 是包絡綫上的切綫方向。

从另一方面看,曲綫族 (1) 中經过 (x, y) 的曲綫 L_c 一定适合于

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$

此处所得出的 $\frac{dy}{dx}$ 是曲綫 L_c 的切綫方向. 由假定可知,两个切綫方向是一致的,所以

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0.$$

这就是在一点包絡 (2) 与通过該点的 L_c 有公共切綫的必要条件.

如果 $\frac{dc}{dx}=0$,即 c 为常数,所得出的曲綫 (2) 就是 (1) 中的曲綫. 如果 $\frac{dc}{dx}\neq 0$,則在包絡綫上常有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c}=0. \tag{3}$$

曲綫族 $\Phi(x, y, c)=0$ 上的点,如果适合

$$\frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial y}=0,$$

則称为奇点. 曲綫族 $\Phi(x, y, c)=0$ 过奇点的曲綫,在奇点沒有确定的切綫.

上面証明了:包絡綫 $y=y(x)$ 适合 (2) 和 (3),其中 $c=c(x)$ 不是常数. 反之,幷不是 (2) 和 (3) 的解 $y=y(x)$ 都是包絡.

容易証明,适合方程 (2) 和 (3) 的曲綫 $y=y(x)$,如果不包含曲綫族 $\Phi(x, y, c)=0$ 的奇点,則必为包絡綫.

例 1. 求

$$y=c(x-c)^2$$

的包絡.

对 c 求微商,得

$$(x-c)^2-2c(x-c)=0,$$

即得 $c=x$, $c=\frac{1}{3}x$. 代入原式得

$$y=0, \quad y=\frac{4}{27}x^2.$$

这就是上节的特解.

例 2. 求

$$y=cx+f(c)$$

的包絡.

对 c 微商，得

$$x + f'(c) = 0,$$

即得上节例 2 的特解。

例 3. 仰角为 α 的弹道曲綫是

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

这儿 g 是引力常数，v_0 是初速. 对 α 来說，这成一族曲綫，求这族的包絡.

对 α 微分得

$$x \sec^2 \alpha - \frac{g \sin \alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha} x^2 = 0,$$

得 $x = 0$ 及

$$4gv_0^2 y = 2v_0^4 - 2g^2x^2.$$

这就是包絡綫.

这包絡綫就是所謂的安全抛物綫，也就是炮弹打不到这抛物綫以外去.

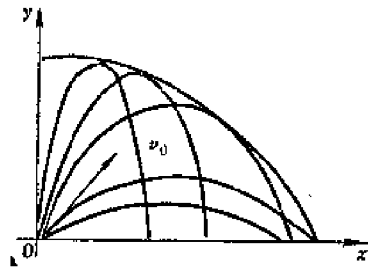


图 39

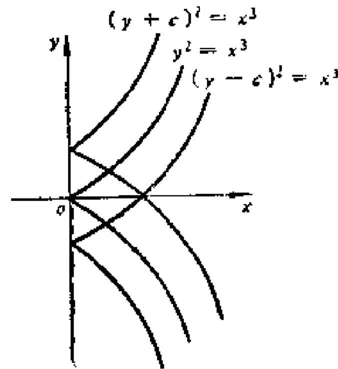


图 40

例 4. 半立方抛物綫族

$$(y + c)^2 = x^3.$$

对 c 微分得

$$2(y + c) = 0.$$

消去 c 得 $x = 0$. y 軸不是包絡綫，而是奇点 $y = -c$, $x = 0$ 的軌迹.

§8. 追 踪 問 題

我們現在考慮一个导弹 M 追踪一个目标的問題. 为了簡单起見，我們假定这样的一个追踪是在一平面內进行的. 这平面假定就是 x, y 平面. 目的物可能經常改变它的速度和方向，而我們的导弹也經常改变速度和方向. 假定目的物經常以角度 φ 来避开导弹的方向，而导弹經常以角度 θ 来迎击目标.

命 $\mathbf{r}_T$ 与 $\mathbf{v}_T$ 表示目标的位置矢量与速度矢量，命 $\mathbf{r}_M$ 与 $\mathbf{v}_M$ 表示导弹的位置矢量与速度矢量，命 ψ 表示图中所示的角度.

显然有

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_T-\mathbf{r}_M.$$

这代表导弹与目的物的相对位置矢量．由

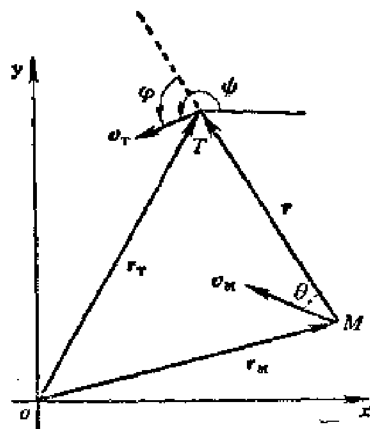


图 41

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}_T-\mathbf{v}_M$$

得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_T-\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_M.$$

这就是

$$r\frac{dr}{dt}=rv_T\cos\varphi-rv_M\cos\theta,$$

即

$$\frac{dr}{dt}=v_T\cos\varphi-v_M\cos\theta \tag{1}$$

（这儿用了 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{ab})$）．

微分 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_T=rv_T\cos\varphi$，即得

$$\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{v}_T}{dt}+(\mathbf{v}_T-\mathbf{v}_M)\cdot\mathbf{v}_T=v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi)+r\cos\varphi\frac{dv_T}{dt}. \tag{2}$$

命 $\mathbf{t}$ 表目标曲綫的单位切矢量，即 $\mathbf{v}_T=v_T\mathbf{t}$，及

$$\frac{d\mathbf{v}_T}{dt}=\frac{dv_T}{dt}\mathbf{t}+v_T\frac{d\mathbf{t}}{dt},$$

所以

$$\frac{d\mathbf{v}_T}{dt}=\frac{dv_T}{dt}\mathbf{t}+v_T\frac{d\psi}{dt}\mathbf{n}$$

$\left(\text{因}\ \dfrac{d\mathbf{t}}{dt}=\dfrac{d\psi}{dt}\mathbf{n}\right)$．方程（2）变成

$$-rv_T\frac{d\psi}{dt}\cdot\sin\varphi+v_T^2-v_Mv_T\cos(\theta-\varphi)=v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi). \tag{3}$$

这就是追踪者与被追踪者之間的速度与方向的关系式．

例 1．狗逐兔問题．当 $t=0$ 时兔在原点，沿着 y 軸以常速率 v_T 向正方向跑去．狗在 x 軸上 $(a,0)$ 处开始逐兔的速度也是常数速 v_M．追逐的情况是狗总是面对着兔子追去，即 $\theta=0$：现在我們由（1）及（3）得

$$\frac{dr}{dt}=v_T\cos\varphi-v_M,$$

又由于兔沿 y 軸跑，所以 $\psi=\frac{\pi}{2}$，即由(3)得

$$v_T^2-v_Mv_T\cos\varphi=v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi).$$

因此

$$v_T\frac{d}{dt}(r\cos\varphi)+v_M\frac{dr}{dt}=v_T^2-v_M^2.$$

积分之，得

$$v_T r\cos\varphi + v_M r = (v_T^2 - v_M^2)t + c.$$

当 $t=0$ 时，$r=a$，$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $c=v_M a$，即

$$(v_T\cos\varphi + v_M)r = (v_T^2 - v_M^2)t + v_M a.$$

在狗追上兔子的时候，$r=0$，所以知道所需要的时間等于

$$t=\frac{av_M}{v_M^2-v_T^2}.$$

例 2. 設目的物在半径为 a 的圓周上以等速 V 运动，导弹从圓心出发追踪．当 $t=0$ 时，目的物在 $(r,0)$，导弹在圓心．若导弹的速度也是 V，且圓心、导弹、目的物常在一条直綫上，求証当目的物行至 $(0,r)$ 时，导弹正好追上它．

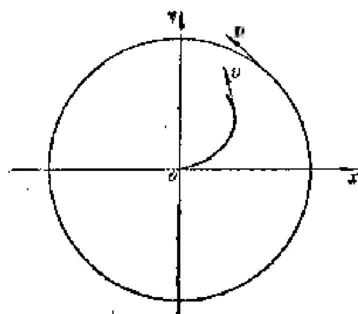


图 42

設时間 t 时，目的物在 $[r(t),\ \theta(t)]$，导弹在 $[r_1(t),\ \theta_1(t)]$，則

$$V^2 = a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{a},\quad \theta = \frac{V}{a}t + c.$$

因 $t=0$ 时 $\theta=0$，所以 $c=0$，

$$\theta_1 = \theta = \frac{V}{a}t. \tag{4}$$

又由

$$\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = V^2 - \left(\frac{r_1 d\theta_1}{dt}\right)^2 = V^2\left[1-\left(\frac{r_1}{a}\right)^2\right],$$

$$\frac{dr_1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r_1}{a}\right)^2}} = V\,dt,$$

得

$$a\sin^{-1}\frac{r_1}{a} = Vt + c_1.$$

由 $t=0$ 时 $r_1=0$，得 $c_1=0$，因此

$$a\sin^{-1}\frac{r_1}{a} = Vt.$$

当导弹追到目的物时，$r=r_1=a$，故

$$Vt = a\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

由 (4)，(5) 可知

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

即当目的物行至$(0, a)$时被导弹追上.

§9. 空間曲綫的基本元素

空間曲綫(C)也是可以用原点0到变点p的变矢量$\mathbf{r}(s)$来表示它的. 命s表示弧长,则

$$\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds},\quad \mathbf{t}\cdot\mathbf{t}=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

是一单位矢量. 这称为曲綫在点p的切綫矢量. 由于$\mathbf{t}$是单位矢量,所以$\frac{d\mathbf{t}}{ds}$与$\mathbf{t}$垂直, $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$告訴我們当弧长s变化时,方向$\mathbf{t}$的变化情况. 我們定义

$$k^2=\frac{d\mathbf{t}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds},\quad 即\quad k=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

这k称为曲綫(C)在p点的曲率,k是随着点而变的.

由

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=k\mathbf{n}$$

所定义的单位矢量$\mathbf{n}$称为曲綫(C)在p点的主法綫的单位矢量. $\rho=\frac{1}{k}$称为曲率半径. 在任一点p, $\mathbf{t}$与$\mathbf{n}$是互相垂直的.

命

$$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n},$$

$\mathbf{b}$垂直于$\mathbf{t}$与$\mathbf{n}$,这样的$\mathbf{b}$称为次法綫方向的单位矢量(由于$\mathbf{t}$与$\mathbf{n}$是垂直的单位矢量,所以$\mathbf{b}$是单位矢量).

这三个与坐标軸有相同的定轉向的单位矢量$\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$組成一个在曲綫(C)上p点的活动坐标架,而空間曲綫(C)在p点的其他任何矢量都可以在这坐标架上分解.

我們現在确定$\frac{d\mathbf{b}}{ds}$与$\frac{d\mathbf{n}}{ds}$的分解情况.

由$\mathbf{b}\cdot\mathbf{t}=0$可得

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}\cdot\mathbf{t}+\mathbf{b}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}=0.$$

又因为$\mathbf{b}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}=k\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}=0$, 所以知道

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}\cdot\mathbf{t}=0,$$

也就是$\frac{d\mathbf{b}}{ds}$是垂直于$\mathbf{t}$的矢量. 又因为$\mathbf{b}$是单位矢量,所以$\frac{d\mathbf{b}}{ds}$也垂直于$\mathbf{b}$. $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$既然垂直于$\mathbf{t}$与$\mathbf{b}$, 它的方向就一定与$\mathbf{n}$相同. 因此

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\mathbf{n}.$$

$\frac{1}{\tau}$ 称为这曲綫的**挠率**，τ 称为**挠率半径**(或第二曲率半径)。

注意. $\frac{1}{\tau}$ 是可正可負的，这与 $\frac{1}{\rho}$ 总是非負的性質不同。 当然，这些矢量的存在是基于它們的微商存在性的。

再考虑 $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$. 由 $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{t}$ 可知

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=\mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{t}}{ds}+\frac{d\mathbf{b}}{ds}\times\mathbf{t}=\mathbf{b}\times k\mathbf{n}+\frac{1}{\tau}\mathbf{n}\times\mathbf{t}=-k\mathbf{t}-\frac{1}{\tau}\mathbf{b}.$$

这样我們得出了著名的 Frenet-Serret 公式：

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n},\quad \frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{t}+\frac{1}{\tau}\mathbf{b}\right),\quad \frac{d\mathbf{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\mathbf{n}.$$

回到原来出发的坐标，假定单位矢量 $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ 对 x, y, z 軸的方向余弦如下表：

	x	y	z
$\mathbf{t}$	α	β	γ
$\mathbf{n}$	α_1	β_1	γ_1
$\mathbf{b}$	α_2	β_2	γ_2

則 Frenet-Serret 公式可以写成为

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{\rho},\quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{\rho},\quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{\rho}.$$

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha_2}{\tau},\quad \frac{d\beta_1}{ds}=-\frac{\beta}{\rho}-\frac{\beta_2}{\tau},\quad \frac{d\gamma_1}{ds}=-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\gamma_2}{\tau},$$

及

$$\frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{1}{\tau}\alpha_1,\qquad \frac{d\beta_2}{ds}=\frac{1}{\tau}\beta_1,\qquad \frac{d\gamma_2}{ds}=\frac{1}{\tau}\gamma_1.$$

試考察曲率 $\frac{1}{\rho}$ 恆等于 0 的情况，即得

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\beta}{ds}=\frac{d\gamma}{ds}=0.$$

这說明了 α, β, γ 是常数. 由

$$\frac{dx}{ds}=\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\beta,\quad \frac{dz}{ds}=\gamma$$

可知，(C) 是一条直綫，即**曲率等于 0 的曲綫是直綫**。

再考虑挠率恆等于 0 的情况，即

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=0,$$

即 $\mathbf{b}=(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 是一常数矢量．由于 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{t}$ 垂直，故

$$\alpha_2\frac{dx}{ds}+\beta_2\frac{dy}{ds}+\gamma_2\frac{dz}{ds}=0.$$

积分之，应得

$$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=\delta.$$

这說明挠率等于 0 的曲綫 (C) 是一条平面曲綫．

由矢量 $\mathbf{t}$ 与 $\mathbf{n}$ 所确定的平面称为曲綫的密切平面，$\mathbf{b}$ 是这平面的法綫方向．

§10. 原坐标表示法

命

$$\mathbf{r}=(x, y, z),$$

則

$$\mathbf{t}=\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right), \quad \mathbf{n}=\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}\right)=\rho\frac{d\mathbf{t}}{ds},$$

此处

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

又挠率

$$\frac{1}{\tau}=\frac{d\mathbf{b}}{ds}\cdot\mathbf{n}=\left(\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}\right)\cdot\mathbf{n}=\left[\mathbf{t}\times\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right)\right]\cdot\rho\frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

$$=\rho\left(\mathbf{t}\times\frac{d\rho}{ds}\frac{d\mathbf{t}}{ds}+\mathbf{t}\times\rho\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\rho^2\left(\mathbf{t}\times\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

$\left(\text{因为 }\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{t}}{ds}\text{ 与 }\frac{d\mathbf{t}}{ds}\text{ 垂直}\right)$，也就是

$$\frac{1}{\tau}=-\rho^2\left(\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}\times\mathbf{t}\right)\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}=-\rho^2\left(\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\times\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}.$$

注意 $(-\rho^2)$ 的系数是由三矢量

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}$$

所成的平行六面体的体积．即

$$\left(\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\times\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\begin{vmatrix} x''' & y''' & z''' \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

以上的表达法是用弧长 s 来表达的，我們現在回到一般的参变数 t，即

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t),$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2.$$

可知

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^{1/2}},$$

所以

$$\frac{d^2t}{ds^2}=-\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^{3/2}}\frac{dt}{ds}=-\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}.$$

因而

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\varphi'(t)\frac{dt}{ds}\right)=\varphi''(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\varphi'(t)\frac{d^2t}{ds^2}$$
$$=\frac{\varphi''}{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}-\varphi'\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}.$$

同理得到 $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$, 因而得出

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\frac{\varphi''^2+\psi''^2+\chi''^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}$$
$$-2\frac{(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3}+\frac{(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3}$$
$$=\frac{(\varphi''^2+\psi''^2+\chi''^2)(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)-(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3}.$$

再由恆等式

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2$$
$$=(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2$$

或

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\end{vmatrix}=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2$$

可知

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\bar{A}^2+\bar{B}^2+\bar{C}^2}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^3},$$

而

$$\bar{A}=\psi'\chi''-\psi''\chi',\quad \bar{B}=\chi'\varphi''-\varphi'\chi'',\quad \bar{C}=\varphi'\psi''-\psi'\varphi''.$$

密切平面的公式可由它垂直于 $\mathbf{b}$ 得之。由 $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$, 即

$$\mathbf{b}=\rho\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)\times\left(\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2},\frac{d^2z}{ds^2}\right),$$

所以 $\mathbf{b}$ 的三个支量与

$$A=\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2},$$

$$B=\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2},$$

$$C=\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$$

成比例,所以密切平面的方程是

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

我們已經知道

$$\frac{dx}{ds}=\varphi'\frac{dt}{ds},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\varphi''}{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}-\varphi'\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi''}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2},$$

等等，所以

$$A=\{\psi'[\chi''(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)-\chi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')]-$$
$$-\chi'[\psi''(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)-\psi'(\varphi'\varphi''+\psi'\psi''+\chi'\chi'')]\}\cdot$$
$$\cdot\frac{\frac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)^2}=(\psi'\chi''-\chi'\psi'')\frac{\frac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)}.$$

同样得出

$$B=(\chi'\varphi''-\varphi'\chi'')\frac{\frac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)},$$

$$C=(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')\frac{\frac{dt}{ds}}{(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)}.$$

因此得出

$$A:B:C=(\psi'\chi''-\chi'\psi''):(\chi'\varphi''-\varphi'\chi''):(\varphi'\psi''-\psi'\varphi''),$$

卽密切平面方程是

$$\begin{vmatrix} X-\varphi & Y-\psi & Z-\chi \\ \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' \end{vmatrix}=0.$$

現在容易証明：在曲綫上取三点 t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$, 过这三点作一平面，当 $\Delta t\to 0$ 时，卽得密切面。

§11. 螺 旋 綫

設有一柱面，其母綫平行于 z 軸，xy 平面截取柱面所得的曲綫是

$$(l)\quad x=\varphi(\sigma),\quad y=\psi(\sigma),$$

此处 σ 是 (l) 的弧长，它的起点是 A. 在 (l) 上取某点 N，作綫段 NM 平行于 z 軸. 若

$$NM=k\sigma,$$

此处 k 为常数，σ 为 (l) 弧的長度，点 M 的軌迹 (L) 就被称为螺旋綫.

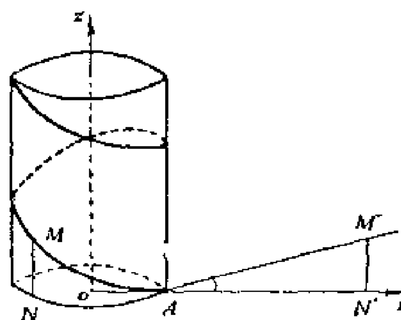


图 43

以下我們将討論螺旋綫的若干性質：

1) 螺旋綫的切綫与某一确定的方向成定角.

証. (L) 的参数表示是

$$x=\varphi(\sigma),\quad y=\psi(\sigma),\quad z=k\sigma.$$

以 A 作为 (L) 的起算点，s 为 (L) 的弧长. 由于 (l) 上切綫的方向余弦是 $[\varphi'(\sigma),\psi'(\sigma)]$，所以

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=[\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)+k^2]d\sigma^2=(1+k^2)d\sigma^2$$

$$ds = \sqrt{1+k^2}d\sigma, \quad s = \sqrt{1+k^2}\sigma.$$

我們来考察 (L) 上切綫与 z 軸所成的角度的余弦 γ:

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

明所欲証.

2）螺旋綫上任一点的主法綫与母綫垂直.

証. 由 Frenet-Serret 定理可知

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{\rho} = 0,$$

即 $\gamma_1 = 0$. 故明所欲証.

3）沿螺旋綫、曲率半径与挠率半径之比为常数,特别当柱面是圆柱面时,曲率与挠率都是常数.

証. 螺旋綫的活动标架与 z 軸所成的角度的余弦 $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$. 因 $\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$ 及 γ, γ_1 为常数,故 γ_2 亦为常数,故由 Frenet-Serret 公式可知

$$-\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\gamma_2}{\tau} = 0.$$

因此 $\frac{\rho}{\tau}$ 是个常量.

又以 r 表示 (l) 的曲率半径,則

$$\frac{1}{r^2} = \varphi''^2(\sigma) + \psi''^2(\sigma).$$

由 $ds = \sqrt{1+k^2}d\sigma$ 有

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \left[\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2\right]\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^4$$
$$= \frac{\varphi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2} + \frac{\psi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2} = \frac{1}{(1+k^2)^2r^2},$$

即

$$\rho = (1+k^2)r.$$

若 (l) 是圓周,則 r 为常数. 因此 ρ 与 τ 都为常数.

联接曲面上两点,使距离最短的曲面上的曲綫称为曲面上的短程綫. 平面上的短程綫就是直綫.

4）柱面上的短程綫就是螺旋綫.

証. 繞着通过 A 的母綫,把柱面在 xz 平面上鋪平,則 AN 与 NM 之比为 $\frac{1}{R}$,故螺旋綫就是 xz 平面上的直綫,而将柱面鋪平时,柱面上曲綫的距离是不变的. 故明所欲証.

§12. 空間曲綫的唯一性定理

定理 1. 具有相同弧长 s,曲率 $f(s)>0$ 及挠率 $g(s)$ 的曲綫,可以經过运动(坐标軸

的平移及轉动)使一条搬到另一条.

証. 設 c 与 c' 是具有相同弧长、曲率及挠率的二曲綫,設这二曲綫弧长的起算点各为 o, o'. 先行一个运动,使 o' 变到 o、c' 上的点 o' 的活动标架变为 c 上的点 o 的活动标架. 若經过运动后,c' 变为 $\bar{c}$,而 c 与 $\bar{c}$ 在弧长 s 对应的点的活动标架各矢量的方向余弦各为

	x	y	z
t	α	β	γ
n	α_1	β_1	γ_1
b	α_2	β_2	γ_2

与

	x	y	z
t	$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$
n	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\gamma}_1$
b	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\gamma}_2$

由 Frenet-Serret 公式得

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{\rho},\quad \frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha_2}{\tau},\quad \frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{\alpha_1}{\tau},$$

$$\frac{d\bar{\alpha}}{ds}=\frac{\bar{\alpha}_1}{\rho},\quad \frac{d\bar{\alpha}_1}{ds}=-\frac{\bar{\alpha}}{\rho}-\frac{\bar{\alpha}_2}{\tau},\quad \frac{d\bar{\alpha}_2}{ds}=\frac{\bar{\alpha}_1}{\tau},$$

此处

$$\rho=\frac{1}{f(s)},\quad \tau=\frac{1}{g(s)}.$$

所以

$$\frac{d}{ds}(\alpha\bar{\alpha}+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2)=0.$$

于是

$$\alpha\bar{\alpha}+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2=c\quad(c\text{ 为常数}).$$

当 $s=0$ 时,$\alpha=\bar{\alpha}$, $\alpha_1=\bar{\alpha}_1$, $\alpha_2=\bar{\alpha}_2$ 且 $\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$(此乃由于 α, α_1, α_2 可以看作是沿 x 軸的单位矢量在活动标架上的投影). 因此

$$\alpha\bar{\alpha}+\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2=1,$$

故

$$(\alpha-\bar{\alpha})^2+(\alpha_1-\bar{\alpha}_1)^2+(\alpha_2-\bar{\alpha}_2)^2=0.$$

所以

$$\alpha=\bar{\alpha},\quad \alpha_1=\bar{\alpha}_1,\quad \alpha_2=\bar{\alpha}_2.$$

同样得到

$$\beta=\bar{\beta},\quad \beta_1=\bar{\beta}_1,\quad \beta_2=\bar{\beta}_2,$$

$$\gamma=\bar{\gamma},\quad \gamma_1=\bar{\gamma}_1,\quad \gamma_2=\bar{\gamma}_2.$$

又两曲綫在对应点有同一弧长 s, 故

$$\frac{dx}{ds}=\alpha=\bar{\alpha}=\frac{d\bar{x}}{ds},\quad \frac{dy}{ds}=\frac{d\bar{y}}{ds},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{d\bar{z}}{ds},$$

$$x=\bar{x}+c_1,\quad y=\bar{y}+c_2,\quad z=\bar{z}+c_3,$$

此处 c_1, c_2 与 c_3 都是常数. 当 $s=0$ 时, $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}$, $z=\bar{z}$. 因此 $c_1=c_2=c_3=0$, 故得定理.

关于空間曲綫的存在性問題, 即任意給了两个連續函数 $f(s)>0$ 及 $g(s)$, 問是否存

在一条空間曲綫以 s 为弧长，$f(s)$ 为曲率，$g(s)$ 为挠率？

我們可以从定理 13.24.1 中推出

定理 2. 已給連續函数 $f(s)>0$ 及 $g(s)$，設 $p_0(p=p_0)$ 为空間任意点，α_0、β_0、γ_0 为任意三个右旋的彼此垂直的单位矢量，则一定存在一条空間曲綫以 s 为弧长，$f(s)$ 为曲率，$g(s)$ 为挠率，而且它的始点是 p_0，即

$$\mathbf{r}(s_0)=\mathbf{r}_0$$

在 p_0 点的活动坐标架的基本分量是

$$\alpha(s_0)=\alpha_0,\quad \beta(s_0)=\beta_0,\quad \gamma(s_0)=\gamma_0.$$

証. 解方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\alpha}{ds}=f(s)\beta,\\[2mm] \dfrac{d\beta}{ds}=-f(s)\alpha-g(s)\gamma,\\[2mm] \dfrac{d\gamma}{ds}=+g(s)\beta,\end{cases}$$

其初始条件为

$$\alpha(s_0)=\alpha_0,\quad \beta(s_0)=\beta_0,\quad \gamma(s_0)=\gamma_0.$$

由 § 13.24 得到一組唯一的解.

命

$$\alpha^*=\beta\times\gamma,\quad \beta^*=\gamma\times\alpha,\quad \gamma^*=\alpha\times\beta,$$

则

$$\frac{d\alpha^*}{ds}=\frac{d\beta}{ds}\times\gamma+\beta\times\frac{d\gamma}{ds}=f(s)\beta^*,$$

$$\frac{d\beta^*}{ds}=\frac{d\gamma}{ds}\times\alpha+\gamma\times\frac{d\alpha}{ds}=-f(s)\alpha^*-g(s)\gamma^*,$$

$$\frac{d\gamma^*}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}\times\beta+\alpha\times\frac{d\beta}{ds}=+g(s)\beta^*,$$

且可以証明

$$\alpha^*(s_0)=\alpha_0,\quad \beta^*(s_0)=\beta_0,\quad \gamma^*(s_0)=\gamma_0.$$

故由解的唯一性定理知，

$$\alpha^*=\alpha,\quad \beta^*=\beta,\quad {}^*\gamma=\gamma,$$

即 α, β, γ, 組成彼此垂直的右旋单位矢量.

从

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\alpha$$

解出

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\int_{s_0}^{s}\alpha(s)ds,$$

这就是我們所要求的曲綫. 事实上，如果这条曲綫的曲率为 $\bar{f}(s)$，挠率为 $\bar{g}(s)$，其基本向量为 $\bar{\alpha}(s)$, $\bar{\beta}(s)$, $\bar{\gamma}(s)$，则

$$\bar{\alpha}(s) = \frac{d\bar{x}}{ds} = \alpha(s),$$

而

$$\bar{f}(s)\bar{\beta} = \frac{d\bar{\alpha}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} = f(s)\beta.$$

但

$$\bar{f}(s) > 0, \quad f(s) > 0,$$

故

$$\bar{f}(s) = f(s), \quad \bar{\beta} = \beta.$$

于是

$$\bar{\gamma} = \bar{\alpha} \times \bar{\beta} = \alpha \times \beta = \gamma.$$

而

$$\bar{g}(s)\bar{\beta} = \frac{d\bar{\gamma}}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} = g(s)\beta.$$

故

$$\bar{g}(s) = g(s).$$

証毕.

事实上,定理 2 的唯一性就是定理 1,但定理 1 的証明更直接些.

§13. 曲率圆与曲率球

設曲綫的参数表示是

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

此处 s 为弧长. 过曲綫上三点 $P(s)$, $Q(s+\Delta s)$, $R(s+2\Delta s)$ 作球[1],当 $\Delta s \to 0$ 时,此球的极限位置满足以下三关系式(参看 §5):

$$[x(s)-a]^2 + [y(s)-b]^2 + [z(s)-c]^2 = R^2, \tag{1}$$

$$[x(s)-a]\alpha(s) + [y(s)-b]\beta(s) + [z(s)-c]\gamma(s) = 0, \tag{2}$$

$$[x(s)-a]\alpha_1(s) + [y(s)-b]\beta_1(s) + [z(s)-c]\gamma_1(s) = -\rho. \tag{3}$$

故由 (2) 可知,球心在垂直于切綫的平面上. 由 (3) 可知,球心至曲綫上点的綫段在主法綫上的投影长度为曲率半径.

特别当球心在密切平面上时,则中心坐标应为

$$a = x(s) + \rho\alpha_1(s), \quad b = y(s) + \rho\beta_1(s), \quad c = z(s) + \rho\gamma_1(s).$$

此点称为曲率中心,这一球的球面与密切平面的交綫是一圆,称为曲率圆或密切圆. 此圆的半径为 ρ,曲率中心的軌迹称之为曲綫的漸屈綫.

現在決定一个球,通过曲綫点 $P(s)$ 及其三邻近点 $Q(s+\Delta s)$, $R(s+2\Delta s)$, $T(s+3\Delta s)$,当 $\Delta s \to 0$ 时,这球的极限位置除満足 (1), (2), (3) 外,还满足

$$[x(s)-a]\alpha_2(s) + [y(s)-b]\beta_2(s) + [z(s)-c]\gamma_2(s) = \tau\rho'. \tag{4}$$

由 (2), (3), (4) 可以决定球心 (a, b, c). 現在引入局部坐标 (A, B, C),即满足方程組的三数:

$$a = x(s) + A\alpha(s) + B\alpha_1(s) + C\alpha_2(s), \tag{5}$$

---

1) 过三点可作无穷多个球,而今为其中之任一个.

$$b = y(s) + A\beta(s) + B\beta_1(s) + C\beta_2(s), \tag{6}$$

$$c = z(s) + A\gamma(s) + B\gamma_1(s) + C\gamma_2(s). \tag{7}$$

将 (5), (6), (7) 三式分别乘以 $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$, 然后相加得

$$A = [a - x(s)]\alpha(s) + [b - y(s)]\beta(s) + [c - z(s)]\gamma(s) = 0.$$

同理得

$$B = \rho, \quad C = -\rho'\tau.$$

故得球心的坐标为

$$a = x(s) + \rho\alpha_1(s) - \tau\rho'\alpha_2(s),$$
$$b = y(s) + \rho\beta_1(s) - \tau\rho'\beta_2(s),$$
$$c = z(s) + \rho\gamma_1(s) - \tau\rho'\gamma_2(s).$$

球的半径为

$$\rho^2 + \left(\tau \frac{d\rho}{ds}\right)^2,$$

这一球称为曲率球或密切球.

§ 14. 曲面族与空間曲綫族的包絡

把 § 7 所講的推广到空間.

1) 先研究带一个参变量的曲面族

$$S_a \qquad \Phi(x, y, z, a) = 0. \tag{1}$$

曲面族中一曲面 $\Phi(x, y, z, a_0) = 0$ 上,如果有一点 (x_0, y_0, z_0), 矢量

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

是零矢量,则点 (x_0, y_0, z_0) 称为曲面族 $\Phi(x, y, z, a) = 0$ 的奇点. 在奇点上該曲面沒有确定的切平面.

对 a 微分得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = 0. \tag{2}$$

从 (1) 与 (2) 消去 a 得一曲面 S. 假設曲面 S 不包含曲面族 (1) 的奇点. 对一个固定的数值 a_0, 曲面族中有一曲面 S_{a_0}, 与 S 交于一条曲綫 l_0. 我們現在証明,沿着 l_0, S 与 S_{a_0} 有公共切面.

在 S_{a_0} 上 a 是常量 a_0, 所以

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = 0.$$

在曲面 S 上 a 是变量,我們应当写成

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial\Phi}{\partial a}da = 0.$$

由 (2), 这两个关系全同,因此 S_{a_0} 与 S 上公共点的无穷小改变 $[dx, dy, dz]$ 与矢量

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

垂直,所以 S_{a_0} 与 S 沿 l_0 相切.

因此,由 (1) 与 (2) 消去 a 所得出的方程,只要奇点不适合这个方程,那末它就是包絡,这儿相切性是沿某一曲綫相切的.

例. 球心在 z 軸上,半径为常数 r 的球面族

$$x^2+y^2+(z-a)^2=r^2.$$

对 a 求微商,得

$$-2(z-a)=0.$$

消去 a, 得柱面

$$x^2+y^2=r^2.$$

而相切的綫是一个圓周.

2) 考虑有两个参变量的曲面族

$$F(x, y, z, a, b)=0. \tag{3}$$

从

$$\frac{\partial F}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial b}=0 \tag{4}$$

中消去 a, b, 得出曲面 S. 不难証明,它与曲面族 (3) 相切,现在是点相切,而不是綫相切. 实际上,对固定的 $a=a_0$, $b=b_0$, 一方面我們得到 (3) 中的一确定曲面 S_0, 而另一方面,把 $a=a_0$ 及 $b=b_0$ 代入 (3)(4), 一般得出 S 上的一点 M_0, 而点 M_0 就是 S 与 S_0 的公共点.

例. 球心在 x, y 平面上、半径为常数 r 的球面

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2.$$

对 a, b 求偏微商得

$$-2(x-a)=0, \quad -2(y-b)=0.$$

消去 a 与 b 得 $z^2=r^2$,就是説,平面 $z=\pm r$ 是包絡. 包絡和每一个球都于一点相切.

附記. 与曲綫的情况相同,从 (3), (4) 消去所得出来的曲面可能不是包絡,而是奇异点的軌迹.

3) 考虑一个参变数的空間曲綫族

$$F_1(x, y, z, a)=0, \quad F_2(x, y, z, a)=0 \tag{5}$$

能否有包絡? 即能否找出曲綫 Γ, 在它所有点与 (5) 中的各曲綫相切?

我們可以把 (5) 作为 Γ 的定义方程及其中 a 非常数而是变量. 沿 (5) 得

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz=0.$$

而沿 Γ, 則

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0.$$

如果相切,則

$$\frac{\delta x}{dx}=\frac{\delta y}{dy}=\frac{\delta z}{dz}.$$

因而得出

$$\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0,\quad \frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a=0.$$

当 a 非常量,即 $\delta a\neq 0$, 我們有

$$\frac{\partial F_1}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial F_2}{\partial a}=0.\tag{6}$$

一般説来,四个方程不能确立一条曲綫,也就是説,空間的曲綫族沒有包絡.

但如果四个中的一个可由其他三个推出来，則我們可以确立一条空間曲綫，即把 x, y, z 表为参变量 a 的函数. 这样,我們就具有包絡了. 当然,这条空間曲綫也可能是曲綫族(5)的奇异点的軌迹.

第十五章 重积分

§1. 重积分的定义

假定 $f(x, y)$ 是一个在矩形

$$(R) \qquad a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

上定义了的函数. 对区間 $[a, b]$ 中的任一点 x,假定积分

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy, \ a \leqslant x \leqslant b \tag{1}$$

存在,并且假定积分

$$\int_a^b F(x)dx \tag{2}$$

也存在,如此我們可以算出

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx. \tag{3}$$

这数值被称为 $f(x, y)$ 在矩形 (R) 上的迭次积分,先对 y 求积分,再对 x 求积分而得出的迭次积分.

如果 $f(x, y)$ 在 R 上是連續的,則 (1) 的存在性是沒有問題的,而所定义的 $F(x)$ 也是在 $[a, b]$ 上的連續函数,因此 (2) 也是存在的. 所以任何一个連續函数的迭次积分是存在的. 但是我們这儿并沒有說明,这个数值是否也就是先对 x 求积分,再对 y 求积分所得出的数值,即

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx \quad 与 \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right)dy$$

是否相等的問題.

由单变数的情况可知,我們所用的連續性是可以減弱的.

我們現在回顾一下积分 (3) 的意义,利用分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d,$$

把矩形 R 分成为 mn 个小矩形

$$(R_{ij}) \qquad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \quad y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}.$$

积分 (2) 等于

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i')\Delta x_i$$

的极限, 此处 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 及 x_i' 是区間 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 中的任一点. 而所謂极限是指

当 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1} \Delta x_i \to 0$ 的情况而言. 但是为了簡便起見,我們用以下的符号:

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i')\Delta x_i\right).$$

又

$$F(x_i') = \int_c^d f(x_i', y)dy$$

是

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(x_i', y_j')\Delta y_j, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$$

的极限,而 y_j' 是 $y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}$ 中的任一点. 总之,迭次积分

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(x_i', y_j')\Delta x_i\Delta y_j\right).$$

这样很明显地指出,两个迭次积分是否相等的問題便是两个极限交换的問題. 重积分的概念便与重极限的概念相仿,可以述之如下:

假定 $f(x, y)$ 是 R 中的有界函数. 考虑和

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(x_i', y_j')R_{ij}, \tag{4}$$

此处 R_{ij} 是矩形 (R_{ij}) 的面积, (x_i', y_j') 是 R_{ij} 中的任一点. 如果"网眼"无限变小,即 $\max|\Delta x_i| \to 0$, $\max|\Delta y_j| \to 0$, 并且对 R_{ij} 中的任一 (x_i', y_j'), (4) 的极限是存在的,而且是唯一的,則 $f(x, y)$ 在 (R) 上称为可求积的,而以

$$\iint_{(R)} f(x, y)dR$$

表示这极限的数值. 这数值被称为 $f(x, y)$ 过 (R) 的积分.

与单变数相仿,我們定义

$$S = \Sigma M_{ij}R_{ij},\ M_{ij} = \overline{Bd}_{(x,y)\in R_{ij}} f(x, y)$$

及

$$s = \Sigma m_{ij}R_{ij},\ m_{ij} = \underline{Bd}_{(x,y)\in R_{ij}} f(x, y).$$

与单变数相仿,我們能証明:对任一有界函数, S 与 s 的极限是一定唯一存在的,因而有

定理 1. $f(x, y)$ 在 (R) 上的重积分存在的必要且充分条件是

$$\Sigma(M_{ij} - m_{ij})R_{ij} \tag{5}$$

的极限等于 0, 极限的意义是指网眼无限分細而言.

显然有以下的一批可积函数.

1) 在 (R) 上連續的函数一定是可积的.

2) 如果 $f(x, y)$ 在 R 上有有限个間断点, 或者 $f(x, y)$ 的間断点出現在有限多条簡单曲綫上,則 $f(x, y)$ 也是可积的. 什么叫做簡单曲綫? 这曲綫有一个参变数表示法

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{6}$$

此处 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 是 t 的有連續微商的函数，且仅有有限个极大极小。

我們討論仅有一条簡单曲綫上有間断点的情况，一般的情况也不难推得。

我們可以把曲綫 (σ) 分成为有限份，其中每一份所对应的 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是单調的（由于 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 仅有有限个极大极小）。我們不妨假定 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是不下降的函数。在网格 (R_{ij}) 中考虑这条曲綫所穿过的情况。如果曲綫从一个格子中穿出，仅有两个可能性，一是向上穿出，一是向右穿出，如右图（由右上角穿出的情况也不难处理）。这些被曲綫所穿过的矩形的总面积一定不大于

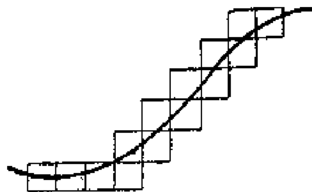


图 44

$$\Delta x_0(d-c)+\Delta y_0(b-a)$$

（也就是把这些"砖"向左平移，移到 $x=a$，如果已有"砖"在，則向上平移，結果不超过最左一条及最上一条的面积），此处

$$\Delta x_0=\max(\Delta x_i),\quad \Delta y_0=\max(\Delta y_j).$$

由于 $f(x, y)$ 是有界的，即有 M，使 $|f(x, y)|\leqslant M$. 作和

$$T=\sum f(x_i', y_j')R_{ij}',$$

此处 (R_{ij}') 过那些被曲綫所穿过的方格，显然有

$$|T|\leqslant M[\Delta x_0(d-c)+\Delta y_0(b-a)].$$

当格子无限变細后，$T\to 0$. 由此得証。

这証明不但对一条簡单曲綫对，也可以証明对有限条簡单曲綫也对。同时、也証明了：如果在有限条簡单曲綫上改变 $f(x, y)$ 的数值，并不影响原来积分的数值。

与重极限及迭次求极限相似的方法，可以証明：如果 $f(x, y)$ 在 (R) 上可求积，而且 (1) 与 (2) 存在，則

$$\iint_{(R)} f(x, y)dR=\int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx.$$

命 (σ) 是 (x, y) 平面上的一个有界域，$F(x, y)$ 是在 (σ) 上定义了的有界函数，我們不妨假定 (σ) 就包在一个矩形 (R) 之中，在 (R) 上我們定义

$$f(x, y)=\begin{cases}F(x, y), & \text{当 } (x, y) \text{ 属于 } (\sigma),\\ 0, & \text{当 } (x, y) \text{ 不属于 } (\sigma).\end{cases}$$

如果 $f(x, y)$ 在 (R) 上是可积函数，則我們称 $F(x, y)$ 在 (σ) 是可积函数，而且定义

$$\iint_{(\sigma)} F(x, y)d\sigma=\iint_{(R)} f(x, y)dR.$$

如果 (σ) 的边界是一条閉曲綫 c，任一平行于 y 軸的直綫至多交这曲綫于两点，这曲綫在 $x=a$ 与 $x=b$ 之間，并且 $x=a$ 及 $x=b$ 都与 c 有公共点，上一部分的曲綫方程是 $y=\varphi_1(x)$，下一部分的曲綫方程是 $y=\varphi_2(x)$。

由前已証明的結果

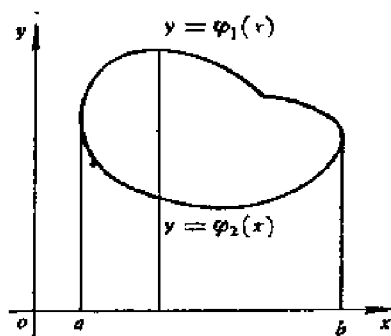


图 45

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y)dR = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x, y)dy\right)dx,$$

可知，如果对任一 x，

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x, y)dy (a \leqslant x \leqslant b)$$

存在，而且

$$\int_a^b \Phi(x)dx$$

存在，則

$$\iint\limits_{(\sigma)} F(x, y)d\sigma = \int_a^b \left(\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} F(x, y)dy\right)dx.$$

§2. 可求面积的域

命 (σ) 代表平面上的一个有限域．不妨假定它是在一个矩形 (R) 之中，定义函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } (x, y) \text{ 属于 } (\sigma), \\ 0, & \text{如果 } (x, y) \text{ 不属于 } (\sigma). \end{cases}$$

如果 $f(x, y)$ 在 (R) 上是一个可积函数，則 (σ) 称为可求面积的域，而积分

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y)dR$$

就定义为域 (σ) 的面积．

依照重积分的定义，S 就等于与 (σ) 有公共点的长方形 (R_{ij}) 的总面积，而 s 就等于完全处于 (σ) 內的长方形 (R_{ij}) 的总面积，而 $S-s\to 0$ 的意义便是与 (σ) 边界相交的长方形 (R_{ij}) 的总面积趋于零，而这也就是 (σ) 可求面积的必要且充分的条件．

S 所趋的极限我們也称为 (σ) 的外面积，而 s 所趋的极限称为 (σ) 的內面积，因此，外面积与內面积相等也是一域 (σ) 可求面积的必要且充分的条件．

如果 (σ) 的边界是可度长的，而且长度是有限的曲綫，則 (σ) 是可求面积的．因此，正方形(任意位置的正方形)，圓，橢圓等都是可求面积的图形．但是必須指出，我們并沒有証明，現在所定义的面积并不因坐标系的选择而变化，即如：一个斜放了的单位正方形的面积是否也等于 1，我們并沒有証明．

但是我們知道，两个沒有公共部份的区域如果都可求面积，則这两个面积的和也就等于这两个区域拼成的域的面积．如果一个区域在另一个区域之內，則前者面积不大于后者的面积．

为了要証明我們所定义的面积是和坐标系的选择无关，我們先証明一个最簡单的特例．

定理 1. 边平行于坐标軸的正方形繞原点旋轉和平移后，它的面积保持不变．

証． 正方形显然有平移不变的性质．

其次我們以原点为中心，作一单位圓，依 $x, y=\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots$ 作平行于 x, y 軸的网格。命 I 代表完全在圓内的方块数，E 代表与圓有公共点的方块数，則

$$qI<\text{圓面积}<qE,$$

此处 q 代表平行于 x, y 軸边长等于 $1/n$ 的正方形的面积，并且已知

$$\text{圓面积}=\lim_{n\to\infty} q\cdot I=\lim_{n\to\infty} q\cdot E.$$

依中心旋轉，旋轉后的这样方形的面积命之为 q'，則我們也有

$$q'\cdot I<\text{圓面积}<q'\cdot E,$$

$$\text{圓面积}=\lim_{n\to\infty} q'\cdot I=\lim_{n\to\infty} q'\cdot E.$$

命 $q/q'=\delta$，則立刻得出 $\delta=1$，卽正方形的面积不因旋轉而变。

現在我們可以証明，面积与坐标軸无关这一性質，卽証明，先固定两条互相垂直的綫，平行于这两直綫作网格，这样得出的面积是不因选择原来的二綫而变的。实际上，我們将証明更一般的定理。

定理 2. 把平面分为可求面积的区域 (Δv)，其中每一个区域的直径[1] 都不超过某一数 d，并且平面上任一个有界区域只与有限个这样的区域有公共点，这样定义了較一般的网格。我們現在考虑一个区域 (P)，都在 (P) 的內部的 (Δv) 区域的面积之和，記之为 $\mathscr{T}$，那些与 (P) 有公共点的 Δv 区域的面积之和，記之为 $\mathscr{E}$，如此則当 $d\to 0$ 时，$\mathscr{T}$ 趋向內面积，而 $\mathscr{E}$ 趋于外面积。

这說明了，任意的网，只要 $d\to 0$，都可以用来量面积，而且算出来的結果是一样。

証． 如果 (Δv) 就是平行于两軸距离等于 d 的正方形的网所对应的 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{T}$ 用 E 及 I 表它們。前已証明过 E 趋于外积分 A，而 I 趋于內积分 a。

由 a 的定义，对任一 $\varepsilon>0$，可以有一种正方形的网，使 $I>a-\varepsilon$，命 λ 代表 (I) 的边界与 (P) 边界的距离(卽各取一点的最短的距离，由于 (Δv) 是 P 的內点集，而且 (Δv) 是閉的．所以 $\lambda>0$)，如果取 $d<\frac{1}{2}\lambda$，則与 (I) 有公共点的 (Δv) 一定位于 (P) 的內部，同时 (I) 也在 $(\mathscr{T})$ 之中，所以(当 $d\to 0$ 时) $\mathscr{T}>a-\varepsilon$、

再証 $\mathscr{T}\leqslant a$，取任一个 $(\mathscr{T})$，命 λ' 代表 $(\mathscr{T})$ 的边界与 (P) 的边界的距离，作出具有 $\delta=\frac{1}{2}\lambda'$ 为边长的正方形网格，任何这样的与 $(\mathscr{T})$ 有公共点的正方形是由 (P) 的內点所組成的，就是

$$\mathscr{T}\leqslant I\leqslant a.$$

由不等式 $a-\varepsilon<\mathscr{T}\leqslant a$ 及其中 ε 的任意性，可知 $\mathscr{T}\to a$。

同法可証，当 $d\to 0$ 时，$\mathscr{E}\to A$。

定理 3. 面积不因旋轉而变化。

这定理是定理 1 与定理 2 的推論。

---

1) 有界区域的直径是指域內任两点的距离的确上界。

§3. 重积分换坐标

重积分

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y)dx\,dy$$

可以视为网格的面积 $\Delta x\Delta y$ 乘上在这网格中一点 (x, y) 的函数值 $f(x,y)$ 的总和的极限，而 $dx\,dy$ 称为在笛卡儿坐标下的面积元素.

在极坐标中，网格的面积(图 46)等于

$$\frac{1}{2}[(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\theta-\rho^2\Delta\theta]\doteq\rho\Delta\rho\Delta\theta$$

(略去高阶项)，所以 $\rho d\rho\,d\theta$ 也可以称为极坐标下的面积元素，因而得出

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y)dx\,dy=\iint_{(\sigma)} F(\rho, \theta)\rho d\rho\,d\theta.$$

这儿 $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$.

特别，当 $f(x, y)=1$ 的情况，我們有

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho d\rho\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(\rho_2^2-\rho_1^2)d\theta.$$

取 $\rho_2=\rho$ 及 $\rho_1=0$，即得我們前所已知的极坐标求面积的公式.

更一般些，依照

$$\varphi(x, y)=u,\quad \psi(x, y)=v \tag{1}$$

引进新变量 u 与 v 来代替 x 与 y，并且假定由方程 (1) 可以解出

$$x=\varphi_1(u, v),\quad y=\psi_1(u, v), \tag{2}$$

而且成一一对应的关系.

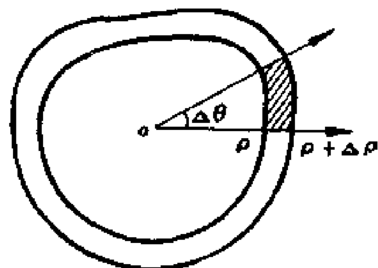


图 46

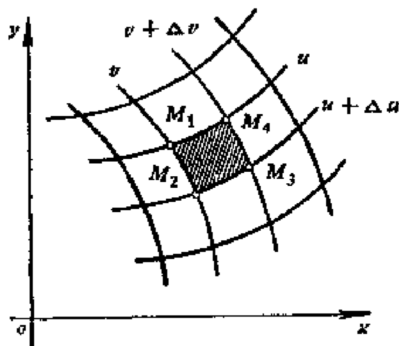


图 47

我們現在来确定用曲綫坐标 (u, v) 时的面积元素 $d\sigma$.

我們考虑两对邻近的坐标曲綫

$$\varphi(x, y)=u,\quad \varphi(x, y)=u+\Delta u,$$

$$\psi(x, y)=v,\quad \psi(x, y)=v+\Delta v.$$

我們計算这些綫之中的面积，也就是要求出 $M_1M_2M_3M_4$ 的面积(图 47).

不計高級无穷小，四点 M_1, M_2, M_3, M_4 坐标各等于：

$$x_1=\varphi_1(u,v),\quad y_1=\psi_1(u,v),$$

$$\begin{cases}x_2=\varphi_1(u+\Delta u,v)=\varphi_1(u,v)+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u,\\ y_2=\psi_1(u+\Delta u,v)=\psi_1(u,v)+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=\varphi_1(u+\Delta u,v+\Delta v)=\varphi_1(u,v)+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v,\\ y_3=\psi_1(u+\Delta u,v+\Delta v)=\psi_1(u,v)+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v,\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}x_4=\varphi_1(u,v+\Delta v)=\varphi_1(u,v)+\dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v,\\ y_4=\varphi_1(u,v+\Delta v)=\psi_1(u,v)+\dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v.\end{cases}$$

由这些公式直接推出

$$x_2-x_1=x_3-x_4,\quad y_2-y_1=y_3-y_4.$$

即得 $M_1M_2M_3M_4$ 是一个平行四边形，这平行四边形的面积等于三角形 $M_1M_2M_3$ 的面积的两倍；因此可知

$$\begin{aligned}d\sigma&=|x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+(x_2y_3-x_3y_2)|\\&=|(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3)|,\end{aligned}$$

代入坐标表达式可知，曲綫坐标的面积元素

$$d\sigma=\left|\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\right|du\,dv=|D|\,du\,dv$$

(請注意 D 的**絕对值**)，因此得出二重积分的換元公式，

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}F(u,v)|D|\,du\,dv,$$

此处 $F(u,v)$ 是 (u,v) 的函数，由 $f(x,y)$ 經变换而得出的。

在变换 (1) 中，我們也可以把 u, v 看成为垂直坐标，这样便把 (x,y) 平面上的区域 (σ) 变为 (u,v) 平面上的区域 (σ')，而积分公式改变成为

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma')}F(u,v)|D|\,du\,dv.$$

由此也可以看出，当区域 (σ) 变为区域 (σ') 时，$|D|$ 是 (σ) 中的无穷小面积与 (σ')

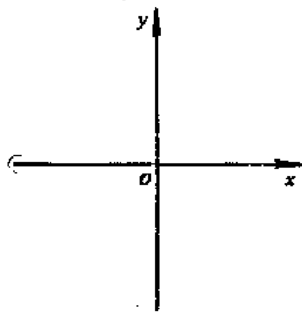


图 48

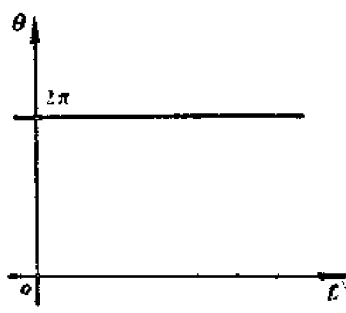


图 49

中对应的无穷小面积的比.

例 1. 以极坐标为例.

如果把 (r, θ) 看成为直角坐标，则由

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

得出一个由 (x, y) 平面到 (r, θ) 平面的变换，但一长条

$$0 < r < \infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

就变为 (x, y) 的原点除外的全平面，而且其間有一一对应的关系(图 48 及 49). 但对应于原点 $x = 0, \ y = 0$，在 (θ, r) 平面上是一条綫段 $r = 0, 0 \leqslant \theta < 2\pi$，这变换的函数行列式等于

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} \\ \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

即得前所証明的极坐标面积元素 $r dr\, d\theta$.

在 (x, y) 平面上的单位圆 $0 < x^2 + y^2 \leqslant 1$，經极坐标变换后变为

$$0 < r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

在 (r, θ) 平面上是一长方形.

例 2. 再引进一变换

$$x + y = u, \quad y = vu, \quad [x = u(1 - v)].$$

如此则

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x + y}.$$

函数行列式等于

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

現在考虑区域

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1.$$

經变换后的情况，即得

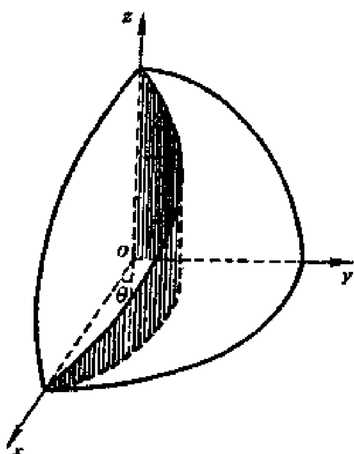


图 50

$$u = x + y < 1, \quad u(1 - v) > 0, \quad uv > 0.$$

化简得

$$1 > u > 0, \quad 1 > v > 0,$$

即 (x, y) 平面上的三角形 $x > 0, y > 0, x + y < 1$，經变换后得到 (u, v) 平面上的正方形，而且是一一对应的. 因而

$$\iint\limits_{\substack{x>0\\ y>0\\ x+y<1}} f(x, y)dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 F(u, v)u\, du\, dv.$$

例 3. 求界于半径为 a 的球与通过球心的半径为 $a/2$ 的正圆柱之間的体积(如图 50). 以球中心作为原点，球的方程是

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

柱軸交 x 軸，即經过 $x=\frac{a}{2}$，柱的方程是

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

卽

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

所求的体积显然是第一个卦限中的体积的四倍.

积分的区域是圓柱的半个底，它的界綫由半圓周

$$r=a\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

及 x 軸上的綫段所組成.

由 $z=\sqrt{a^2-r^2}$ 可知，所求的体积等于

$$\begin{aligned}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=a\cos\theta}d\theta\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3-a^3\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}a^3\left[\theta+\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

§4. 重积分的基本性質

1）常数因子可由积分号下提出来，卽

$$\iint\limits_{(\sigma)}af(P)d\sigma=a\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma.$$

2）函数的代数和的积分等于各項积分的代数和，卽

$$\iint\limits_{(\sigma)}[f(P)+g(P)]d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}f(P)\,d\sigma+\iint\limits_{(\sigma)}g(P)d\sigma.$$

这两性质合并后得出，对任二实数 a 与 b 常有綫性关系

$$\iint\limits_{(\sigma)}(af(P)+bg(P))d\sigma=a\iint\limits_{(\sigma)}f(P)d\sigma+b\iint\limits_{(\sigma)}g(P)d\sigma.$$

3）把区域 (σ) 分为有限多个部分区域，且它們沒有公共內点，则过整个区域的积分等于过各区域的积分的和.

例如，把 (σ) 分为 (σ_1) 与 (σ_2)，且 (σ_1) 与 (σ_2) 沒有公共內点，則

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(P)\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_1)}f(P)\,d\sigma+\iint\limits_{(\sigma_2)}f(P)\,d\sigma$$

（可加性）.

4) 如果在 (σ) 上，$f(P)\leqslant g(P)$，则

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma \leqslant \iint\limits_{(\sigma)} g(P)\,d\sigma.$$

特别是

$$\left|\iint\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma\right| \leqslant \iint\limits_{(\sigma)} |f(P)|\,d\sigma.$$

5) 如果 $\varphi(P)$ 在 (σ) 上不变号，則有下面的中值公式，卽在 (σ) 中有某一点 P_0，使

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(P)\varphi(P)\,d\sigma = f(P_0)\iint\limits_{(\sigma)} \varphi(P)\,d\sigma$$

($f(P)$ 是連續函数).

特別，当 $\varphi(P)=1$ 时有

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = f(P_0)\sigma,$$

此处 σ 是区域 (σ) 的面积.

多重积分的瑕积分(或称反常积分)，我們不再詳細討論(仅于 § 8 中举列說明)，我們仅請大家注意二点，1. 如果因为函数值而反常，則先作小域包有那些反常点，然后再看当域变小时的极限；2. 如果反常是由于域的无穷．則先作不反常的域，然后命不反常的域趋于該域.

例如：在求

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

时，可以从

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N} f(x,y)\,dx\,dy$$

出发，但現在的可能性比一个变数的情况多得多了，因为我們还可以考慮

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty\\M_1\to\infty\\M_2\to\infty}}\int_{-N_1}^{N_2}\int_{-M_1}^{M_2} f(x,y)\,dx\,dy \quad 及 \quad \lim_{N\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant N^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

等等.

例 1. 考虑定积分

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}},\quad \alpha\neq 1,$$

此处 (σ) 是整个平面，先考慮积分

$$I(R)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}}$$

換极坐标得

$$I(R)=\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^{\alpha}}=\frac{\pi}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(1+R^2)^{\alpha-1}}-1\right)$$

若 $\alpha<1$，則当 $R\to\infty$ 时，右边无限上升，所以原积分发散；若 $\alpha>1$，則 $\lim\limits_{R\to\infty} I(R)=\dfrac{\pi}{\alpha-1}$，

所以証明这积分的收斂性.

例 2. 由于

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \iint_{(\sigma)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho d\rho\, d\theta = -\pi e^{-\rho^2}\Big|_0^{\infty} = \pi,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

例 3. 考虑重积分

$$\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq 1}} \frac{y\, dx\, dy}{\sqrt{x}}.$$

我們先求

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^1 y\, dy = (1-\sqrt{\varepsilon}).$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时,得原积分的数值为 1.

§5. 三 重 积 分

抽象的三重(及多重)积分的定义与性质不难由与前相仿的方法获得.

以上所講的二重积分,固然可以理解为体积,但也可以理解为分布在平面区域 (σ) 上的質量. 如果区域 $\Delta\sigma$ 上的总質量等于 Δm, 则当 $\Delta\sigma$ 趋于一点 P 时,

$$\lim_{\Delta\sigma\to P} \frac{\Delta m}{\Delta\sigma} = \rho(P)$$

存在, 那末,我們称 $\rho(P)$ 是 P 点的密度, (σ) 上全部質量可以写成为漸近式

$$m \sim \sum_{(\sigma)} \rho(P)\Delta\sigma.$$

当网眼无穷精密时,即得这物質的总質量等于

$$\iint_{(\sigma)} \rho(P) d\sigma.$$

我們可以用相似的方法来研究空間的質量問題.

命 $\rho(x, y, z)$ 是該物質分布的密度,則在域 (σ) 上的总質量等于

$$\iiint_{(v)} \rho(x, y, z) dv,$$

它是

$$\sum_{(v)} \rho(x, y, z)\Delta v$$

的极限,当网眼无穷精密时的极限;这便是三重积分. 这样积分的計算可以分为三次一重积分算出(关于可求积分及可以由迭次积分求出的条件,一如以前所說过的).

在实际計算

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) dv$$

时，我們用以下的步驟：首先把区域 (v) 的界面 (s) 投影在 xy 平面上，得区域 (σ_{xy})，再通过 (σ_{xy}) 上的一点作一平行于 z 軸的直綫，穿入与穿出区域 (v) 的纵坐标以 z_1 与 z_2 来表它．作单积分(把 x, y 看为常数)

$$F(x, y)=\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz.$$

这单积分对 (σ_{xy}) 中的点定义，然后再求二重积分

$$\iint_{(\sigma_{xy})} F(x, y) d\sigma_{xy}.$$

这就是三重积分的数值．

以上的积分还可以化为迭次单积分，卽得

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) dv=\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz.$$

这也可以写成为

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

的形式，而 $dx\, dy\, dz$ 也称为直角坐标的单位元素，也就是以 dx, dy, dz 为边长的无穷小长方体的体积．

注意．以上的討論是指平行于 z 軸的直綫与 (v) 的交点不多于 2 的情况，但是对一般的情况的研究，并无特殊困难，只須分割成块，逐一求积分，再求总和卽得．

用同样的方法，我們可以得出换变数的公式

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) dx\, dy\, dz=\iiint_{(v)} F(u, v, w)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw,$$

此处 $F(u, v, w)$ 是經变换由 $f(x, y, z)$ 变出来的，而 $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ 是該变换的函数行列式．

在换变数的时候，我們必須注意，$\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ 在积分区域內是不变号的．

特别有

1）柱坐标

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad z=z$$

的变换的函数行列式等于

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}=r.$$

从而有

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) dv=\iiint_{(v)} F(r, \theta, z) r dr\, d\theta\, dz,$$

这儿 $F(r, \theta, z)$ 是 r, θ, z 的函数，它是由 $f(x, y, z)$ 經坐标变换而得到的．

2）球坐标

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta.$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi, & \sin\theta\sin\varphi, & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi, & \rho\cos\theta\sin\varphi, & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi, & \rho\sin\theta\cos\varphi, & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\theta,$$

所以有球坐标的积分公式

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z) dv = \iiint_{(v)} F(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi,$$

这儿 $F(\rho, \theta, \varphi)$是 ρ, θ, φ 的函数,它是由 $f(x, y, z)$經坐标变換而得到的.

例 1. 求充滿有不均匀物質的球段的質量,其密度正比于到这球段的底的距离(如图 51).

以球心作为原点,用 a 記球的半径, h 記球段的高, r_0 記球段的底半径.

在柱坐标系中球面的方程是

$$r^2 + z^2 = a^2.$$

密度的改变率由下面公式来表达:

$$f(r, \varphi, z) = b + cz,$$

其中 b 与 c 是已知的常数.

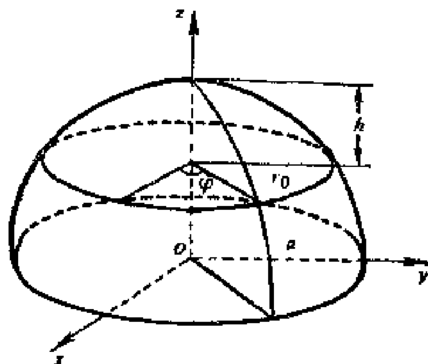


图 51

应用 1) 的公式得到

$$m = \iiint_{(v)} (b + cz) r \, dr \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} r dr \int_{a-h}^{\sqrt{a^2 - r^2}} (b + cz) dz$$

$$= 2\pi \int_0^{r_0} \left[bz + \frac{c}{2} z^2 \right]_{z=a-h}^{z=\sqrt{a^2-r^2}} r \, dr.$$

代入 z 的值再求积分,就得到

$$m = bv + c\pi \frac{r_0^4}{4},$$

其中 v 是这球段的容积.

例 2. 求一个密度不均匀的球的質量,設在同心球层上密度相同. 在这情形下,依照条件,可以算作密度只依賴于 ρ 而由函数 $f(\rho)$ 来表达,这就給出

$$m = \iiint_{(V)} f(\rho) \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^a f(\rho) \rho^2 d\rho$$

$$= 4\pi \int_0^a f(\rho) \rho^2 \, d\rho.$$

若密度是常数而等于 1 ,就得到球的容积的表达式

$$V = 4\pi \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

例 3. 設有界于坐标平面与平面 $x + y + z = a$ 之間的四面体 (V), 它由下列的不等式来确定:

$$x > 0;\quad y > 0;\quad z > 0;\quad x + y + z < a.$$

引用新的变量

$$x + y + z = q_1;\quad a(y + z) = q_1 q_2;\quad a^2 z = q_1 q_2 q_3.$$

我們把 (q_1, q_2, q_3) 解释作为直角坐标. 由上面的公式推知:

$$q_1 = x + y + z;\quad q_2 = \frac{a(y+z)}{x+y+z};\quad q_3 = \frac{az}{y+z}$$

或

$$x = \frac{q_1(a - q_2)}{a};\quad y = \frac{q_1 q_2(a - q_3)}{a^2};\quad z = \frac{q_1 q_2 q_3}{a^2}.$$

与 § 3 中完全一样, 四面体 (V) 变换为立方体 (V_1): $0 < q_1 < a$; $0 < q_2 < a$; $0 < q_3 < a$. 这里不难算出 $D = \frac{1}{a^3} q_1^2 q_2$, 于是变换公式就是

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{(V_1)} F(q_1, q_2, q_3)\frac{1}{a^3} q_1^2 q_2\,dq_1\,dq_2\,dq_3,$$

这儿 $F(q_1 q_2 q_3)$ 是由 $f(x, y, z)$ 經上述的坐标变换而得到的; 或者,如果确定出积分限的話,

$$\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} f(x, y, z)\,dz = \frac{1}{a^3}\int_0^a q_1^2 dq_1 \int_0^a q_2 dq_2 \int_0^a F(q_1, q_2, q_3)\,dq_3.$$

§ 6. 矩

现在考虑有几个質点

$$M_1, M_2, \cdots, M_n$$

的質点系,它們的質量各等于 $m_1, m_2, \cdots, m_n$,系中每質点到平面 (Δ),或綫 (l) 或点 (P) 的距离的 k 次方冪与該点的質量的乘积之和

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^k m_i,$$

称为这个質点系对 (Δ), 对 (l) 或对点 (P) 的 k 級矩.

零級矩就是这个系統的总質量

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

一級矩就是这个系对 (Δ), 对 (l) 或对 (P) 的靜力矩,而

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m},\quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m},\quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m},$$

称为这个系的重心. 二級矩则称为惯性矩. 例如,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i,\quad \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2) m_i,\quad \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) m_i$$

分别表示对 yz 平面, x 軸及原点的惯性矩,而

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i$$

表示对 x 軸的离心矩.

如果考虑的不是有限多个点系，而是連續分布的質点，那末依照質点是按直綫，平面或空間的分布，分别将上面的和换为单重，二重或三重积分．而以点 M 的密度 $f(M)$ 乘以单位长度，单位面积或单位体积来代替因子 m_i.

例如，三維空間区間 (v) 关于原点的慣性矩为

$$\iiint_{(v)} (x^2+y^2+z^2) f(M) dv.$$

例 1. 求均匀球底錐的重心，如图 52 所示，重心落在軸上，这时只須求

$$z_g = \frac{\iiint_{(V)} z dv}{V}.$$

这里我們有

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi a^3 (1-\cos\alpha),$$

$$\iiint_{(V)} z\, dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho\cos\theta \rho^2\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{a} \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{8} a^4 (1-\cos 2\alpha),$$

$$z_g = \frac{3}{16} a \frac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{3}{8} a(1+\cos\alpha) = \frac{3}{8}(2a-h),$$

其中 a 是球半径.

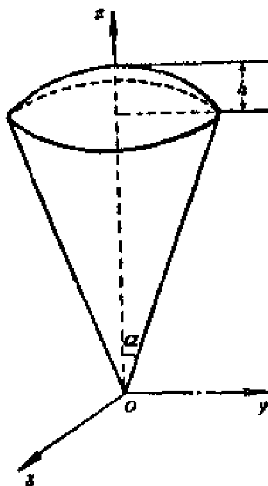


图 52

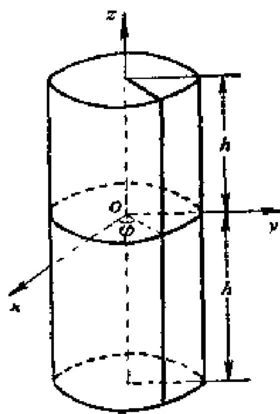


图 53

例 2. 若重心与坐标原点重合，則所有的静力矩等于零，这可以由下列关系式直接推出来:

$$\iiint_{(V)} xf\, dV = mx_g, \quad \iiint_{(V)} yf\, dV = my_g, \quad \iiint_{(V)} zf\, dV = mz_g.$$

例 3. 求均匀正圆柱体(如图 53)对于圆柱的轴以及它的正中断面的直径的惯性矩。密度算作是常量且等于 f_0, 我們有

$$J_z = f_0 \iiint\limits_{(V)} r^3\, dr\, d\varphi\, dz = 2f_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3\, dr \int_0^h dz = \pi a^4 h f_0 = m\,\frac{a^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} J_x &= f_0 \iiint\limits_{(V)} (z^2 + r^2 \sin^2\varphi) r\, dr\, d\varphi\, dz = \\ &= 2f_0 \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (z^2 + r^2 \sin^2\varphi) r\, dr \\ &= 2f_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h z^2\, dz \int_0^a r\, dr + 2f_0 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^h dz \int_0^a r^3\, dr \\ &= \frac{2}{3}\,\pi h^3 a^2 f_0 + \frac{\pi}{2}\, h a^4 f_0 = m\left(\frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right). \end{aligned}$$

其中 $2h$ 是柱体的高, a 是它的底半径, m 是它的质量。

例 4. 求均匀椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的惯性矩。

$$\begin{aligned} J_{xy} &= f_0 \iiint\limits_{(V)} z^2\, dx\, dy\, dz = f_0 \int_{-c}^{+c} z^2 \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz \\ &= 2\pi ab f_0 \left(\frac{c^3}{3} - \frac{c^3}{5}\right) = m\,\frac{1}{5}\,c^2, \end{aligned}$$

此处 m 为椭球体的质量。置换字母,不难求出:

$$J_{yz} = m\cdot\frac{1}{5}\,a^2; \quad J_{zx} = m\cdot\frac{1}{5}\,b^2,$$

$$J_x = J_{xy} + J_{xz} = m\frac{1}{5}\,(b^2 + c^2),$$

$$J_y = \frac{m}{5}\,(c^2 + a^2); \quad J_z = \frac{m}{5}\,(a^2 + b^2),$$

$$J_0 = J_{xy} + J_{yz} + J_{zx} = \frac{m}{5}\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

例 5. 求刚体繞 (δ) 軸轉动时的动能。

我們知道,当物体以角速度 ω 繞 (δ) 轉动时,物体每一点速度 $V = \omega r_\delta$ (r_δ 为这点到轉动軸的距离),把物体分成質量单元 Δm。以 ΔT 表对应于該单元的动能,于是就有

$$T = \Sigma \Delta T.$$

由于 Δm 的微小性,可以看成它的全部質量集中于它的任何一点 M,这时单元 Δm 的动能 ΔT 就等于

$$\Delta T = \frac{1}{2}\, V^2 \Delta m = \frac{1}{2}\, \omega^2 r_\delta^2 f(M) \Delta V.$$

因此

$$T = \iiint\limits_{(V)} \frac{1}{2}\, \omega^2 r_\delta^2 f(M) dV = \frac{1}{2}\, \omega^2 J_\delta,$$

其中

$$J_\delta = \iiint_{(V)} r_\delta^2 f(M) dV$$

是物体对于轉动軸 (δ) 的慣性矩。

§7. 曲面的面积

我們假定曲面 S 的方程是

$$z = f(x, y),$$

且命

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

曲面 (S) 在 xy 平面上的射影是区域 (σ). 我們把区域进行分割，命 $\Delta\sigma$ 是其上的一小块，并且假定它是 S 上的一小块 ΔS 的投影. 我們研究 $\Delta\sigma$ 与 ΔS 的关系. 在 $\Delta\sigma$ 中取一点 (x, y)，在 S 上有一点 $(x, y, f(x, y))$，在这点的切平面是

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = Z - z.$$

这切平面与 x, y 平面的夹角命之为 r，則

$$\cos r = \frac{1}{\mp\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

命 $\Delta S'$ 是切平面上的一块，它的投影是 $\Delta\sigma$，所以

$$\Delta\sigma = \Delta S' \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

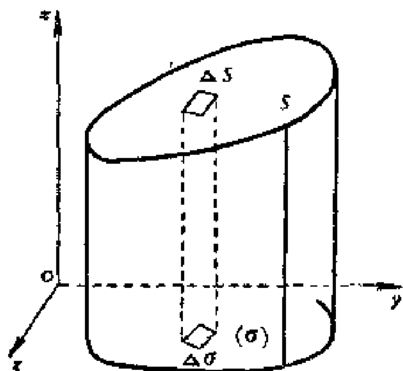


图 54

如果我們定义 S 的面积为这样的 $\Delta S'$ 的和的极限，則

$$S = \lim \sum \Delta S' = \lim \sum_{(\sigma)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, \Delta\sigma.$$

因而得出

$$S = \iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, d\sigma = \iint_{(\sigma)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

积分号下表达式称为曲面 S 的面积元素，以

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, d\sigma_{xy}$$

表它.

在这些公式里，我們假定 p 与 q 是 x, y 的連續函数.

这公式的缺点在于：定义是与 xy 平面有关的，換言之，如果另选一組坐标，这数值变否？

又如果通过 σ_{xy} 的一点平行于 z 軸的直綫，交曲面于一点以上，可以把曲面切开来算.

例 1. 計算半径为 a，中心在原点的球面，在第一卦限中，被圓柱

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

截取的部分的面积(图 55). 由球面方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

有

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

$$p=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{x}{z};\quad q=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{y}{z};$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}=\frac{a}{z};$$

$$S=\iint_{(\sigma)}\frac{a}{z}r\,dr\,d\varphi=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sqrt{a^2-r^2})\Big|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

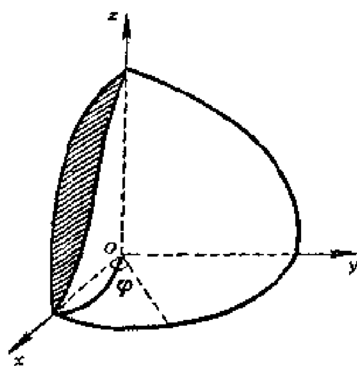


图 55

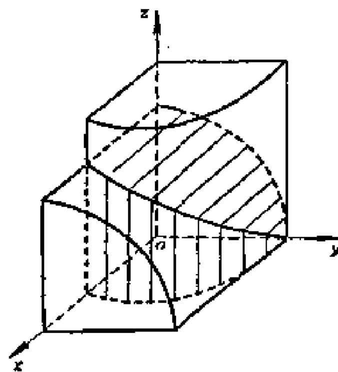


图 56

例 2. 求柱面

$$x^2+y^2=a^2$$

被柱面

$$y^2+z^2=a^2$$

截下的一部分的面积(如图 56).

本题以 y 与 z 作为自变数比较方便. 图上画出的面积等于所考虑的全部面积的 $\frac{1}{8}$, 所以就有

$$S=8\iint_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot dy\,dz,$$

其中

$$p=\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{x};\quad q=\frac{\partial x}{\partial z}=0;$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{a}{x}=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

于是

$$S=8a\int_0^a dz\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=8a\int_0^a \arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}dz$$

$$=8a\left[z\arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}\Big|_{z=0}^{z=a}+\int_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}dz\right]$$

$$= -8a\sqrt{a^2 - z^2}\Big|_{z=0}^{z=a} = 8a^2.$$

我們現在研究由參变数表出的曲面的面积公式。假定

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v).$$

如此則

$$p = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

換变数后

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$$
$$\times \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

由于

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial y}{\partial u} \\ -\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{pmatrix} \Big/ \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|,$$

可知

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial x}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial y}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial y}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|.$$

因此

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|^2$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$
$$+ \left(-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$$
$$= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$$
$$- \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

命

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

則曲面积的公式变为

$$\iint_{\Sigma}\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

所可注意者，$EG-F^2$ 是微分二次型

$$dx^2+dy^2+dz^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

的判別式。

§8. 物質对一点的引力

假定該点为 $c(x, y, z)$，它的質量等于 1，物質为 v，我們現在考慮这一物質 v 对 c 点的引力。

把物質 v 分为小块，命 Δm 为其中一块的質量，在这一块中任取一点 $M(\xi, \eta, \zeta)$，命 r 代表 c 与 M 的距离，即

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

假定这一块的質量集中 M 点，則这一块与点 c 的引力大小等于

$$\frac{\Delta m}{r^2}$$

(我們假定引力常数等于 1)，这力成一矢量，它在 x, y, z 三軸上的投影等于

$$\frac{\Delta m}{r^2}\frac{\xi-x}{r},\quad \frac{\Delta m}{r^2}\frac{\eta-y}{r},\quad \frac{\Delta m}{r^2}\frac{\zeta-z}{r}.$$

所以全部引力的三軸投影的近似式是

$$X\sim\Sigma\frac{\xi-x}{r^3}\Delta m,\quad Y\sim\Sigma\frac{\eta-y}{r^3}\Delta m,\quad Z\sim\Sigma\frac{\zeta-z}{r^3}\Delta m.$$

命 $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ 表物質在 M 点的密度，所以 $\Delta m\sim\mu\Delta v$，当分法无限精密时，得极限

$$X=\iiint_v\mu\frac{\xi-x}{r^3}dv,\quad Y=\iiint_v\mu\frac{\eta-y}{r^3}dv,\quad Z=\iiint_v\mu\frac{\zeta-z}{r^3}dv. \qquad (1)$$

积分中 $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ 过物質所占有的地位 v，而 X, Y, Z 是 x, y, z 的函数。

这三个积分是重瑕积分的例子，当然，如果 (x, y, z) 在 v 外，它們幷不是瑕积分，但当 (x, y, z) 在 v 中，被积函数有时变为∞，因而是瑕积分了。当然从物理性質我們知道这瑕积分是存在的，实質上，我們也可用数学严格証明如次：假定 μ_0 是函数 $\mu(x, y, z)$ 在 v 上的上界，如此

$$\left|\mu\frac{\xi-x}{r^3}\right|\leqslant\mu_0\frac{1}{r^2}.$$

我們考慮

$$\iiint_{(v)}\frac{1}{r^2}dv=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\substack{(v)\\(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2>\varepsilon^2}}\frac{dv}{r^2},$$

用以 (x, y, z) 为中心的球坐标：

$$\xi = x + \rho\sin\theta\cos\varphi,\quad \eta = y + \rho\sin\theta\sin\varphi,\quad \zeta = z + \rho\cos\theta,$$

则得

$$\iiint\limits_{\substack{(v)\\(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2>\varepsilon^2}} \frac{dv}{r^2} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\varepsilon}^{f(\theta,\varphi)} \sin\theta\, d\rho,$$

这儿 $r = f(\theta, \varphi)$ 是物质 v 的表面的球坐标方程. 当 $\varepsilon \to 0$ 时极限显然存在，也就是表达 X, Y, Z 的瑕积分都是存在的.

由于

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-\eta}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-\zeta}{r},$$

及

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x-\xi}{r}\right) = \frac{\xi - x}{r^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\eta - y}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\zeta - z}{r^3},$$

所以关于 X, Y, Z 的积分可以改写成为

$$X = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

$$Y = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

$$Z = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dv. \tag{2}$$

引進物質在 c 点的势量的积分

$$U = \iiint\limits_{(v)} \frac{\mu dv}{r} \tag{3}$$

如果允許积分号下求微分可以立即得

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4}$$

可以証明，当 $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ 連續时，在整个空間积分 X, Y, Z 是 (x, y, z) 的連續函数，U 是連續函数而且有一級偏微商，并可由 (4) 表出来.

如果允許我們再一次积分号下求微商，則得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) dv. \tag{5}$$

这些公式仅当点 $c(x, y, z)$ 在吸引物質之外时正确，就是在 (v) 之外时正确. 如果 c 在 (v) 内，則由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ 的积分表达式不再收斂,即势量 U 的二級微商不能在积分号下求微商两次得之。

由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]}{r^5}-\frac{3}{r^3}=0,$$

所以当 c 在 (v) 之外,U 适合于

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{6}$$

这方程称为 Laplace 方程. 所以,占有容积的物质的势量,在出现于这物質之外的点 $c(x, y, z)$ 满足 Laplace 方程.

我們再研究点 $c(x, y, z)$ 在 v 内的情况.

取一密度均匀 (μ 是常数) 及半径为 a 球心在原点的球,取 oc 为 z 軸,取球坐标 $(\rho、\theta、\varphi)$ 得

$$U=\mu\iiint\limits_{(v)}\frac{dv}{r}=\mu\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{\rho^2\sin\theta}{r}\,d\varphi\,d\theta\,d\rho, \tag{7}$$

此处显然有

$$r^2=\rho^2+z^2-2\rho z\cos\theta.$$

先求对 θ 的积分

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{r}.$$

在这积分中把 ρ 与 φ 視为常数,把变量 r 代替 θ, 则得

$$r\,dr=\rho z\sin\theta\,d\theta,\quad \frac{\sin\theta\,d\theta}{r}=\frac{dr}{\rho z}.$$

分两种情况来定出积分的区域. 若 $z>\rho$, 则当 θ 由 0 变到 π 时, r 由 $z-\rho$ 变到 $z+\rho$; 若 $z<\rho$, 则 r 由 $\rho-z$ 变到 $\rho+z$. 所以

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{r}=\begin{cases}\displaystyle\int_{z-\rho}^{z+\rho}\frac{dr}{\rho z}=\frac{2}{z}\ (z>\rho),\\[2ex] \displaystyle\int_{\rho-z}^{\rho+z}\frac{dr}{\rho z}=\frac{2}{\rho}\ (z<\rho).\end{cases}$$

代入 (7) 中,而分两种情形来討論.

首先是 c 在球外或球表面上,这是 $a\leqslant z$, 于是所有的区間 $(0, a)$ 上 ρ 的值 $\leqslant z$, 所以有

$$U=\mu\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a}\frac{2\rho^2\,d\rho}{z}=\frac{4\pi a^3\mu}{3z}=\frac{m}{z}, \tag{8}$$

其中 m 是球的全部質量.

再討論 c 在球内的情况:把这区間 $(0, a)$ 分为两份: $(0, z)$ 与 (z, a), 于是得

$$U = \mu\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^z \frac{2\rho^2\, d\rho}{z} + \int_z^a \frac{2\rho^2\, d\rho}{\rho}\right] = 2\pi\mu\left(a^2 - \frac{1}{3}z^2\right), \tag{9}$$

当 $z = a$ 时，即 c 在球表面上时，两公式所給的数值相等，所以 U 是連續函数.

再来計算引力，这引力是沿 z 軸方向的，所以仅需計算

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

当 c 在球外，則

$$Z = -\frac{m}{z^2}, \tag{10}$$

而 c 在球内时，則

$$Z = -\frac{4}{3}\pi\mu z. \tag{11}$$

当 $z = a$ 时，(10) 与 (11) 是一致的，所以引力 Z 有連續性.

公式 (8), (10), (11) 説明：均匀球对外一点的势量与引力可以由集中球的全部質量于球心得来，对于球内一点的引力与被引点到球心的距离成比例.

以上是为了計算簡单起見，而取了特殊的坐标軸，即 z 軸就是 oc 的方向，在以上的公式中，z 是点 c 与球心的距离. 在以 o 为原点的任一坐标系中，以 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 代表 z，如此

$$U = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ (c\ 在球外),$$

$$U = 2\pi\mu\left[a^2 - \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\right]\ (c\ 在球内).$$

前者适合 Laplace 方程是显而易見的，而后者适合于

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\mu\ (c\ 在球内).$$

将来我們将看到，对任何密度的容积，如果 c 在 (v) 内，則适合此方程.

再者，假定吸引的物在一曲面 S 上，具有密度 $\mu(M)$，像上面一样，用 $c(x, y, z)$ 表被吸引的質量为 1 的質点，r 表 cM 的距离，我們有势量

$$U = \iint_{(S)} \frac{\mu(M)}{r}\, dS$$

及引力的投影：

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \iint_{(S)} \mu(M)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dS,$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \iint_{(S)} \mu(M)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) dS,$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = \iint_{(S)} \mu(M)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dS.$$

这样的势量称为单层势量．因这例中 c 取在曲面 S 之外，所以所有的积分都是正常的．

补　充

§9. 求面积

我們可以借助于求积仪以求面积．如果不用求积仪，我們介紹以下两个簡而易行的方法．

1. 平行綫法

作一批等距离的平行綫，假定距离是 d．这一批平行綫被图形所截取的长度是 l_1，l_2，$\cdots$．这些长度的总和乘以 d 就可以用来作为这图形的面积．在这里一条的面积是用 $\frac{1}{2}(l_1+l_2)d$ 来計算的．这实际上就是梯形公式的应用．

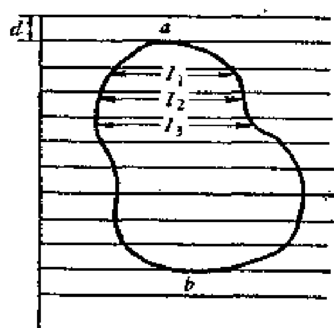


图 57

当然还可以用 $\frac{1}{3}(l_1+4l_2+l_3)d$ 来代表两条的面积．这对应于 Simpson 公式．

如果預先具备一张印有等距离 d 的平行綫的透明紙，那就更方便了，将透明紙蒙在图紙上，使透明紙的某两条綫切于欲求面积的图形的边界．例如图 57 中切于 a 点与 b 点，我們就可以在透明紙的上面，用尺或曲綫仪等来量这一批平行綫被图形截取的綫段的长度了．

为了減少誤差，把平行綫法按几种不同的方向，算出結果，再把这些結果求平均值，这样就能得到較为可靠的結果．

当面积不大，而边界又相当复杂时，用这一方法是不够好的．

这一方法可以用来求图形的重心．作平行于 oy 軸的一批等距离 d 的直綫，这些直綫将图形截成 n 条(图 58)．用上面的方法求出每一条的面积，設它們的面积依次为 s_1, s_2, $\cdots$, s_n．設 s_i 所在的条带的中綫至 oy 軸的距离为 x_i，則图形的重心至 oy 軸的距离等于

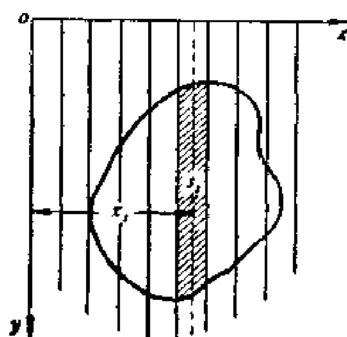


图 58

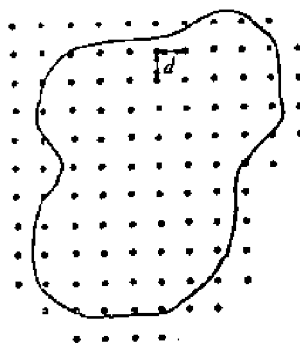


图 59

$$x_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}s_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}s_i}.$$

同法可以求出图形的重心至 ox 軸的距离 y_0.

2. 方格法

打以边长为 d 的方格，格子点落在图形内的个数乘以 d^2，就可以用来作为面积的近似値(图 59). 我們当然也可以在图形上按等距离摆上一批棋子，然后計算一下棋子数，便可以得出面积.

如果預先具备一张印有边长为 d 的正方形角点的透明紙，就更加方便了，将透明紙蒙在图形上，然后数一下落在图中的点数即可.

为了減少誤差，可以按不同的方向，計算几次，然后取其算术平均.

这个方法虽然簡单，但其精确度往往是比較高的，所以用得也頗广泛，用这个方法算出的面积的誤差，与图形的周界有关，在平面上引入直角坐标，我們有次之定理.

定理 1 (M. V. Jarnik). 命 l 表示一可求长的簡单的閉曲綫的长度，而以 A 表示曲綫所围成的区域的面积，N 为曲綫內部所含的整点的个数，則当 $l\geqslant 1$ 时

$$|A-N|<l.$$

所謂整点是指坐标为整数的点.

在証明之前，先証下面两个引理.

引理 1. 在边长为 1 的正方形中，任作一連續曲綫 C，C 的两个端点在正方形的周界上，若 C 与正方形的两对角綫相交，則曲綫 C 的长度 l 必不小于 1.

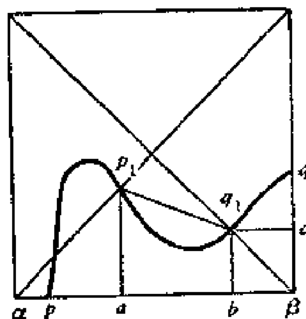


图 60

証. 若 C 的两个端点在正方形的一对对边上，則显然 $l\geqslant 1$. 若 C 的端点在正方形的二邻边上，如图 60，易見

$$\begin{aligned}l&\geqslant\overline{ap_1}+\overline{p_1q_1}+\overline{q_1c}\geqslant\\&\geqslant\overline{\alpha a}+\overline{ab}+\overline{b\beta}=\overline{\alpha\beta}=1.\end{aligned}$$

至于 C 的两个端点在同一个边上的情形，可以用同法証之. 引理証完.

引理 2. 在边长为 1 的正方形中，任作一不通过正方形中心的連續曲綫 C，C 的两端

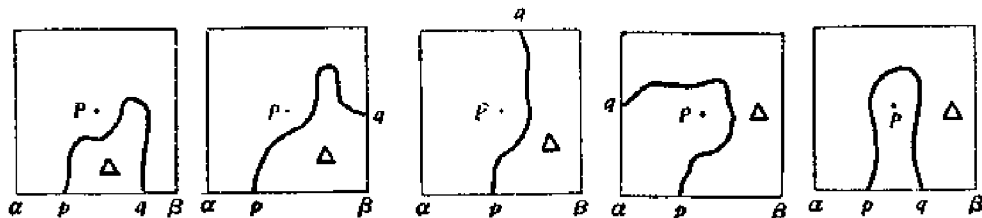


图 61

点在正方形的周界上. 曲綫C将正方形分为两部分,命Δ为其中不包含正方形中心的一部分,则Δ的面积必小于C的长度.

証. 今分别考虑以下各种情形(如图 61).

命p, q表示曲綫C的端点,P为正方形的中心,A, l各表Δ的面积及曲綫C的长度,则在前两种情形中,从C上任何一点到直綫$\alpha\beta$的距离必不能大于l,故Δ完全落在一个边长为1与l的矩形中,因此$A < l$. 在后三种情形中,由引1可知$l \geqslant 1$,所以有$A < 1 \leqslant l$. 故得引理.

定理 1 的証明. 以I表示曲綫所围成的区域. 在平面上作网,以直綫

$$x = m + \frac{1}{2}, \quad y = n + \frac{1}{2} \ (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

为經緯,则网眼是边长为1的正方形;又各正方形的中心就是整点. 以$Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$表示所有这些小正方形之含有I的一部分周界者,而以C_i表示有长曲綫之在Q_i中的部分,以Ω_i表示Q_i与I的共通部分,而定义

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } \Omega_i \text{ 中有整点}, \\ 0, & \text{若 } \Omega_i \text{ 中无整点}. \end{cases}$$

又以A_i表示Ω_i的面积,l_i表示C_i的长度,于是若能証明

$$|A_i - N_i| < l_i,$$

便得定理.

首先我們考虑整个I都在某一Q中的情形,因为$l \geqslant 1$,故易見定理成立. 因此我們可以不失普遍性地假定I并不整个地处在某一Q中,此时C_i为若干段曲綫之和,而这些曲綫段又将Q_i分为若干个部分$D_i^{(j)}$.

若整点不在任何$D_i^{(j)}$中,亦即当整点在C_i上时,有$N_i = 0$, $0 < A_i < 1$,此时C_i过正方形的中心. 由引理1有$l_i \geqslant 1$. 故得定理.

若整点在某一$D_i^{(j)}$中,以$A_i^{(j)}$表示$D_i^{(j)}$的面积,若$D_i^{(j)}$不在I中,此时$N_i = 0$, $A_i \leqslant 1 - A_i^{(j)}$;若$D_i^{(j)}$在$I$中,则$N_i = 1$,而$1 - A_i \leqslant 1 - A_i^{(j)}$,而面积$(1 - A_i^{(j)})$所对应的区域不含正方形的中心,故由引2即得

$$1 - A_i^{(j)} < l_i,$$

于是得到定理.

§10. 求 容 积

我們常常会碰到計算容积的問題,例如求水庫容积,估算矿藏儲量等等,以下介紹一些常用的方法.

1. 簡易方法

这一段我們介紹一些不借助于等高綫图来估計容积的方法,例如計算某一水庫的容

积．我們一共测得水庫 N 个点的深度 $h_1, h_2, \cdots, h_N$，又测出水庫的水平面的面积 B．則它的容积 V 可以用 B 乘以平均高度来計算，即

$$V = B\frac{\sum_{i=1}^{N} h_i}{N}. \tag{1}$$

有时公式(1)需要作适当的修正，例如我們一共测得了 N 个点的深度，其中有 K 个点位于水庫边上，那末就用

$$V = B\frac{\sum h - \frac{1}{2}\sum h_k}{(N-K)+\frac{1}{2}K} = B\frac{2\sum h - \sum h_k}{2N-K} \tag{2}$$

来計算容积，此处 $\sum h$ 为全部 N 个点的深度之和，$\sum h_k$ 为沿着水庫边上各点的深度之和．

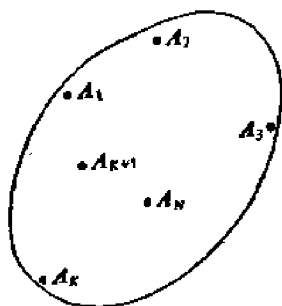


图 62

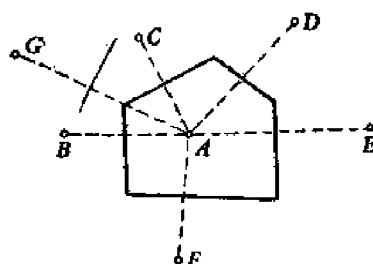


图 63

这种修正的想法在于認为水庫边上的点的影响范围只有中間的点的一半．

更精确地考虑到每一点的影响范围問題，在估算矿藏儲量时，有下面的 Болдырев 最近地区法．

将每个勘探点与其相邻近的勘探点用直綫联接起来，这些直綫段的中垂綫相交而成的多边形就叫做这个勘探点的影响圈．圈内任一点至該勘探点的距离都比至其他勘探点的距离近，如图 63 所示．这样就把矿藏的水平投影面积划分成了若干个多边形之和，如图 64 所示．容积 V 就可以用下式

$$V = \sum_{i=1}^{N} B_i h_i \tag{3}$$

来計算，此处 h_i 为第 i 个勘探点所采得的厚度，而 B_i 則为第 i 个勘探点的影响圈的面积．

为了簡易地划出諸綫段的中点和中垂綫起見，常常采用图 65 所示的模板．

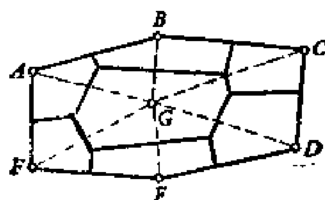


图 64

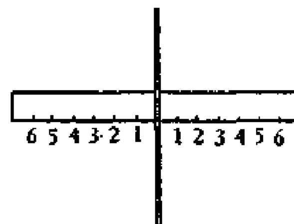


图 65

2. 借助于等高綫图的方法

假定沒有修水庫前，我們有一幅画了等高綫的地形图，高程差是 h，地图上的一圈，实际上便是一定高程的水平面．下面我們介紹几种借助于等高綫图来估計容积的方法．

(i) Соболевский 体积方格法．在等高綫图上，打上边长为 d 的方格．利用等高綫图估計一下，該方格中心的深度，例如图 67 中有阴影的一格的中心的深度为 2.6，則水庫

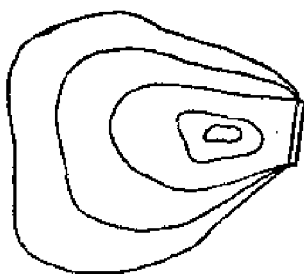


图 66

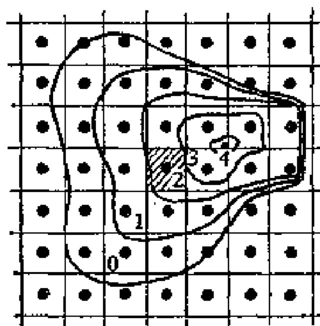


图 67

的容积 V 可以用所有落在等高綫图中的方格的中心的深度之和乘以 d^2 来計算，即

$$V = (\sum h)d^2, \tag{4}$$

此处 $\sum h$ 为落在等高綫图中的方格的中心的深度之和．

(ii) 截錐公式、梯形公式及 Бауман 公式．我們首先来估算水庫在相邻两等高綫所表示的水位之間的容积．以 A, B 各表示上，下两个等高綫所包围的截面（它們的面积亦記为 A, B），它們之間的距离为 h．常用下面三个公式来近似計算水庫在这两个水位間的容积．

截錐公式： $$v_1 = \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}), \tag{5}$$

梯形公式： $$v_2 = \frac{h}{2}(A + B), \tag{6}$$

Бауман 公式： $$v = h\left[\frac{1}{2}(A + B) - \frac{T(A, B)}{6}\right]. \tag{7}$$

通常当 $\frac{A-B}{A} > 40\%$ 时，用公式(5)，而当 $\frac{A-B}{A} < 40\%$ 时，用公式(6)．公式(7)中的 $T(A, B)$ 是用以下方法所画出的图形的面积，称它为 Бауман 改正数．



图 68

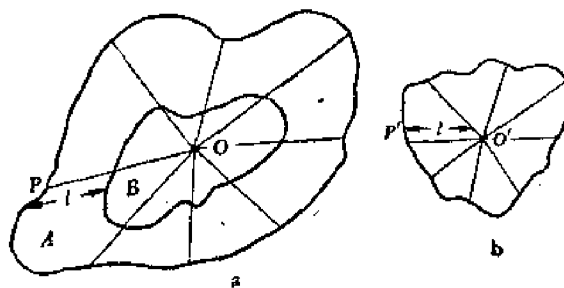


图 69

从制高点 O 出发,作放射綫 OP. 这射綫在地图上 A, B 之間的长度是 l. 另作一图,取一点 O'. 与 OP 同方向,取 $O'P'=l$. 当 P 沿着 A 的周界走一圈时,P' 也得一图形. 这图形的面积就称为 Бауман 改正数. 因为它依賴于两截面 A 与 B,所以我們用 $T(A,B)$ 来表示它.

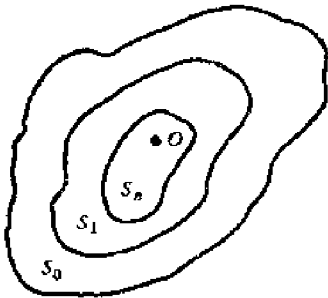


图 70

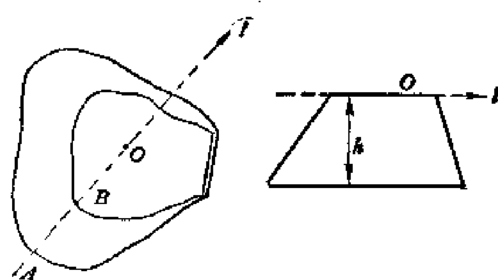


图 71

把算出来的体积一片一片地加起来,就得到水庫的容积. 换言之,設水庫的等高綫图的 $n+1$ 条等高綫所围成的截面依次为 $S_0, S_1, \cdots, S_n$, S_n 即最低点 O (它們的面积亦分别記为 $S_0, S_1, \cdots, S_n$), 則水庫的容积分别可以用下面的公式来計算:

$$\text{截錐公式:}\quad V_1=\left(\frac{S_0+S_n}{3}+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n-1}S_i+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{S_iS_{i+1}}\right)h \tag{8}$$

$$\text{梯形公式:}\quad V_2=\left(\frac{S_0+S_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}S_i\right)h \tag{9}$$

$$\text{Бауман 公式:}\quad V=\left(\frac{S_0+S_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}S_i\right)h-\frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}T(S_i, S_{i+1}). \tag{10}$$

关于 Бауман 公式,有次之定理.

定理 1 (Бауман). 已知物体的下底 A 与上底 B (其面积亦記为 A, B) 均为平面,且 A 平行于 B, h 为它們之間的高, O 为 B 上的某一点. 若用任意通过 O 而垂直于 B 的平面来截物体,所得的截面都是四边形,則物体的体积 v 恰如公式 (7) 所示.

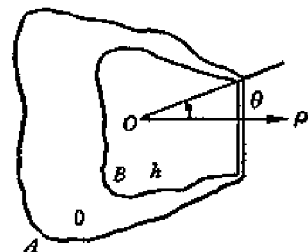


图 72

証. 以 O 为中心引进极坐标. 命高度为 z 的等高綫的极坐标方程为

$$\rho=\rho(z,\theta)\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

其中 $\rho(z,0)=\rho(z,2\pi)$. 今后我們常假定 $\rho(z,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant h)$ 是連續的. 我們不妨假定 A, B 的高程各为 0 及 h. 我們記

$$\rho_1(\theta)=\rho(0,\theta),\quad \rho_2(\theta)=\rho(h,\theta).$$

由假定可知

$$\rho(z,\theta)=\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\quad(0\leqslant z\leqslant h),$$

因此物体的体积 v 为

$$\frac{1}{2}\int_0^h\int_0^{2\pi} \rho^2(z,\theta)d\theta\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^h\left(\frac{z}{h}\rho_2(\theta) + \frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\right)^2 dz\, d\theta =$$

$$= \frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho_1^2(\theta)}{3} + \frac{\rho_2^2(\theta)}{3} + \frac{\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)}{3}\right)d\theta =$$

$$= \frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta\right] -$$

$$- \frac{h}{6}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho_1(\theta) - \rho_2(\theta))^2 d\theta\right] =$$

$$= \frac{h}{2}(A+B) - \frac{h}{6}T(A,B).$$

定理証完.

关于截錐公式、梯形公式及 Бауман 公式的关系,我們有次之結果.

定理 2. 不等式

$$v \leqslant v_1 \leqslant v_2 \tag{11}$$

恆成立. 当且仅当物体为截錐,且此錐体的頂点至底面 A 的垂綫通过点 O 时, $v = v_1$; 当且仅当 $A = B$ 时, $v_1 = v_2$.

証. 如 Бауман 定理証明中的假定. 由 Бауман 公式及 Буняковский-Schwarz 不等式可知

$$v = \frac{h}{6}\int_0^{2\pi}(\rho_1^2(\theta) + \rho_2^2(\theta) + \rho_1(\theta)\rho_2(\theta))d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{3}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sqrt{\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta}\right] =$$

$$= \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}) = v_1,$$

当且仅当 $\rho_1(\theta) = c\rho_2(\theta)(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, c 为常数$)$时,即当这物体为一个截头錐体,而此錐体的頂点至底面 A 的垂綫通过点 O 时,才会取等号(图 73).

又由于

$$v_2 - v_1 = \frac{h}{2}(A+B) - \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}) =$$

$$= \frac{h}{6}(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 \geqslant 0,$$

所以

$$v_1 \leqslant v_2,$$

当且仅当 $A = B$ 时取等号. 定理証完.

图 73

关于这三个公式的比較問題,我們認为主要应該从量綱来看. 面的量綱为 2,所以把面的量綱考虑为 1 所得出的公式,局限性往往是比較大的.

梯形公式是将中間截面看成上底与下底的算术平均而得到的，所以把面的量綱当作1.

Бауман 公式則是将中間截面作为量綱 2 来考虑的. 詳言之,它是假定了 $\rho(z,\theta)$ 为 $\rho(0,\theta)$ 与 $\rho(h,\theta)$ 关于 z 的綫性关系而得到的(見定理 1).

截錐公式亦是将中間截面的量綱考虑为 2,但比 Бауман 公式还多假定了 $\rho(0,\theta)=c\rho(h,\theta)(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 此处 c 为一常数.

因此我們認为 Бауман 公式更具有普遍性,所以用它来近似計算物体的体积,一般說来,应該比較精确.但这并不排斥对于某些个别物体,用其他两个公式更恰当些的可能性.例如有一梯形，其上底与下底的寬度相等（图 74).用梯形公式反而能获得它的眞正体积,而用 Бауман 公式与截錐公式来計算,結果就偏低了. 不过我們注意此时这梯形的截面的量綱为 1（由于延 y 軸未变).

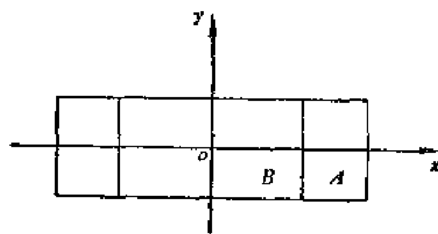


图 74

附記. 相对于 Бауман 公式,我們还可以估計用梯形公式与截錐公式的相对偏差. 例如当 $\frac{A-B}{A}<40\%$ 时,容易算出

$$\Delta=\frac{v_2-v}{v}\leqslant\frac{1}{11}<10\%.$$

(iii) 建議一个估計儲量的公式. Бауман 公式是假定 $\rho(z,\theta)$ 为 $\rho(0,\theta)$ 与 $\rho(h,\theta)$ 关于 z 的綫性关系而得到的. 如果我們将两相邻分层放在一起估計,即已知相邻三等高綫，我們用通过 $\rho(0,\theta)$, $\rho(h,\theta)$ 与 $\rho(2h,\theta)$ 的拋物綫所形成的曲面 $\rho=\rho(z,\theta)$ 来逼近物体这二分层的表面,因此我們建議如下的計算方法.

命 A, B, C 分別表示連續三等高綫所围成的截面(面积亦記为 A, B, C), A 与 B 及 B 与 C 之間的距离都是 h, 則这二片在一起的体积可以用以下公式来近似計算:

$$v_3=\frac{h}{3}(A+4B+C)-\frac{h}{15}(2T(A,B)+2T(B,C)-T(A,C)). \qquad (12)$$

如果不計 (12) 式右端的第二項,就是熟知的 Соболевский 公式(亦即 Simpson 公式).

把算出来的体积二片二片地加起来,就得到水庫的容积. 换言之,設水庫的等高綫图的 $2n+1$ 条等高綫所围成的截面依次为 $S_0, S_1, \cdots, S_{2n}$, S_{2n} 即制高点 O, 它們的面积亦依次記为 $S_0, S_1, \cdots, S_{2n}$ 而高程差为 h, 則水庫的容积由下式来近似計算.

$$V_1=\frac{h}{3}\left[S_0+S_{2n}+4\sum_{i=0}^{n-1}S_{2i+1}+2\sum_{i=1}^{n-1}S_{2i}\right]-\frac{h}{15}\left[2\sum_{i=0}^{n-1}T(S_{2i},S_{2i+1})+\right.$$
$$\left.+2\sum_{i=0}^{n-1}T(S_{2i+1},S_{2i+2})-\sum_{i=0}^{n-1}T(S_{2i},S_{2i+2})\right]. \qquad (13)$$

注意. 如果等高綫图含有偶数条等高綫，則最上面的一片可以单独估計，而其余的用公式 (13).

定理 3. 已知物体的上底 C 与下底 A 均为平面，B 为中間的截面（面积亦分别記为 C, A, B），且 A, C 都与 B 平行，A 与 B 之間及 B 与 C 之間的距离都是 h，O 为 C 上一点，若用任意通过 O 而垂直于 C 的平面截物体，所得的截面的周界均由两条直綫及两条抛物綫所构成，則物体的体积 v_3 恰如公式（12）所示。



图 75

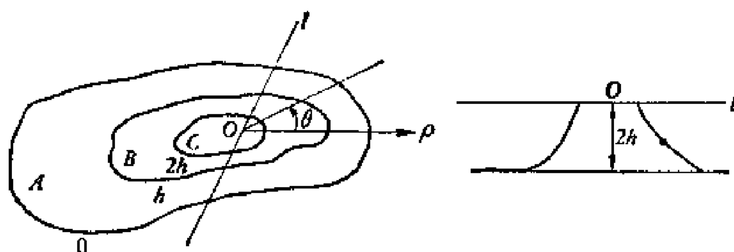


图 76

証. 以 O 为中心引进极坐标，命高度为 z 的等高綫的极坐标方程为

$$\rho = \rho(z, \theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ \rho(z, 0) = \rho(z, 2\pi)).$$

不妨假定 A, B, C 的高程分别为 $0, h, 2h$，并且記

$$\rho_1(\theta) = \rho(0, \theta), \quad \rho_2(\theta) = \rho(h, \theta), \quad \rho_3(\theta) = \rho(2h, \theta).$$

由假定可知

$$\rho(z, \theta) = \frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta) - \frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta) + \frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta).$$

因此物体的体积 v_3 为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2h}\int_0^{2\pi}\rho^2(z, \theta)d\theta\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2h}\left[\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta) + \frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta)\right]^2 dz =$$

$$= \frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{15}\rho_1^2(\theta) + \frac{16}{15}\rho_2^2(\theta) + \frac{4}{15}\rho_3^2(\theta) + \frac{4}{15}\rho_1(\theta)\rho_2(\theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{15}\rho_2(\theta)\rho_3(\theta) - \frac{2}{15}\rho_1(\theta)\rho_3(\theta)\right]d\theta =$$

$$= \frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho_1^2(\theta)}{3} + \frac{4\rho_2^2(\theta)}{3} + \frac{\rho_3^2(\theta)}{3} - \frac{2}{15}(\rho_1(\theta) - \rho_2(\theta))^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{15}(\rho_2(\theta) - \rho_3(\theta))^2 + \frac{1}{15}(\rho_1(\theta) - \rho_3(\theta))^2\right]d\theta =$$

$$= \frac{h}{3}(A + 4B + C) - \frac{h}{15}(2T(A, B) + 2T(B, C) - T(A, C)).$$

定理証完.

(iv) Золотарев 方法. 在估計矿藏储量时，当勘探綫不平行时，我們所得到的是矿体的不平行剖面.

命 A, B 分别表示矿体沿两条不平行的勘探綫的垂直剖面(面积亦記为 A, B). α 表示 A 与 B 所在的平面的交角(以弧度示之). 取这两张平面的交綫为 z 軸. 又命 ρ_1 与 ρ_2 分别表示 A 与 B 的质量中心至 z 軸的距离. Золотарев 建議用下面的公式来計算夾在这两张平面之間的矿体体积:

$$v_4 = \frac{\alpha}{6}[\rho_1(2A + B) + \rho_2(A + 2B)]. \tag{14}$$

定理 4 (Золотарев). 依反时針方向, 任意通过 z 軸的半平面皆对应于一个角度 $\theta(0 \leqslant \theta < 2\pi)$. 記該半平面为 (θ). 若有物体夾在 (0) 与 (α) 之間, 它在半平面 (θ) 上的截面为 $S(\theta)$ (面积亦記为 $S(\theta)$), $S(\theta)$ 的质量中心至 z 軸的距离为 $\rho(\theta)$, 而且满足 $S(\theta) = A + \frac{B - A}{\alpha}\theta$, $\rho(\theta) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha}\theta$, 此处 $A = S(0)$, $B = S(\alpha)$, $\rho_1 = \rho(0)$, $\rho_2 = \rho(\alpha)$, 則物体的体积 v_4 恰如公式(14)所示.

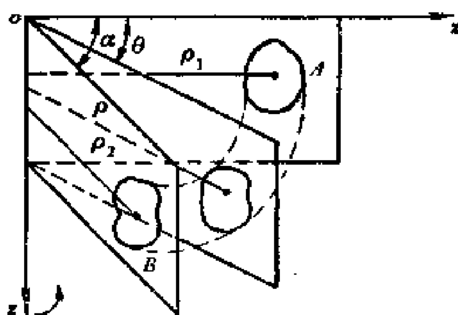


图 77

証. 在空間引进直角坐标, 以 x 軸的正向过半平面(0). 命物体所占的区域为 (V), 則其体积 v_4 为

$$v_4 = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

变换成柱面坐标 (r, θ, z). 因为

$$\rho(\theta) = \frac{\iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz}{\iint\limits_{S(\theta)} dr\,dz} = \frac{\iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz}{S(\theta)},$$

所以

$$\begin{aligned} v_4 &= \int_0^\alpha d\theta \iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz = \int_0^\alpha S(\theta)\rho(\theta)d\theta = \\ &= \int_0^\alpha \left[A + \frac{B - A}{\alpha}\theta\right]\left[\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha}\theta\right]d\theta = \\ &= \frac{\alpha}{6}[\rho_1(2A + B) + \rho_2(A + 2B)]. \end{aligned}$$

定理証完.

§11. 求 表 面 积

現在先介紹矿学家和地理学家所常用的方法, 假定地图上以 Δh 为高程差画出等高綫, 今后我們常假定有一制高点及等高綫成圈的情况来討論 (其他情况也可以十分容易地被推导出来). 我們假定由制高点向外一圈一圈地画等高綫 (l_{n-1}), (l_{n-2}), $\cdots$, (l_0).

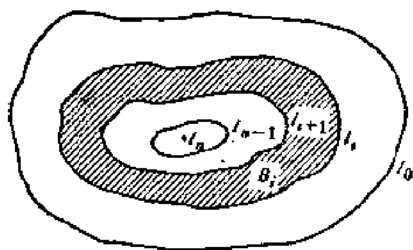


图 78

取 (l_0) 的高度为 0，而制高点用 (l_n) 表之，它的高度是 h. (l_i) 与 (l_{i+1}) 之間的面积用 B_i 表示（卽投影的面积）.

1. 矿体几何学上常用的方法的步驟如下：

a) $C_i = \frac{1}{2}(l_i + l_{i+1})\Delta h$（中間直立隔板的面积）；

b) $\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 就是所求的斜面积的漸近值（Бауман 方法）.

2. 地理学上常用的方法的步驟如下：

a) $l = \sum_{i=0}^{n} l_i$ 为等高綫的总长度. $B = \sum_{i=0}^{n-1} B_i$ 为总投影面积，由

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta h \cdot l}{B}$$

得出平均傾角 α；

b) $B\sec\alpha = \sqrt{B^2 + (\Delta h \cdot l)^2}$ 就是所求的斜面积的漸近值（Волков 方法）.

附記. $\sqrt{a^2 + b^2}$ 可以借商高定理，用图解法很快求得.

这两个方法哪一个更好一些？这些方法給出的結果在怎样的程度上逼近斜面积？換句話說，当等高綫的分布趋向无限精密时（也就是 $\Delta h \to 0$ 时），这些方法所給出的結果是什么？是否就是眞的斜面积呢？一般說来，答案是否定的. 仅仅是一些十分特殊的曲面，答案才是肯定的. 我們将定出这些曲面来，还将給出这些方法和实际結果的相差比例，并指出避免較大偏差的計算步驟.

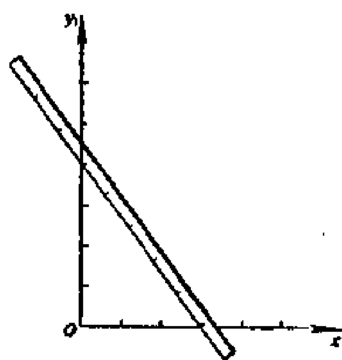


图 79

以制高点为中心引进极坐标. 命高度为 z 的等高綫方程是

$$\rho = \rho(z, \theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

其中 $\rho(z, 0) = \rho(z, 2\pi)$. 我們在今后常假定 $\frac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial\theta}$ 与 $\frac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial z}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant h)$ 都是連續的. 命 $z_i = \frac{h}{n} i$，則 l_i 所围繞的面积等于

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(z_i, \theta) d\theta.$$

所以由中值公式可知

$$B_i = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\rho^2(z_i, \theta) - \rho^2(z_{i+1}, \theta)] d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \rho(z_i', \theta) \frac{\partial\rho(z_i', \theta)}{\partial z_i'} d\theta \Delta h,$$

此处 z_i' 在 z_i 与 z_{i+1} 之間，而 $\Delta h = \frac{h}{n}$.

另一方面，l_i 的长度等于

$$l_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial\rho(z_i, \theta)}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

由 Бауман 方法所得出的結果是

$$C_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i'', \theta) + \left(\frac{\partial\rho(z_i'', \theta)}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta \Delta h,$$

这里又用了中值公式，z_i'' 在 z_i 与 z_{i+1} 之間. 因而当 $\Delta h \to 0$ 时，$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 趋近于

$$\text{Ба} = \int_0^h \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial\rho}{\partial z}\, d\theta\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta\right)^2}\, dz. \qquad (1)$$

这便是用 Бауман 方法算出的斜面积，当 $\Delta h \to 0$ 时所趋向的数值.

又易見

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(0, \theta)\, d\theta,$$

及 $\Delta h \cdot l$ 的极限应当等于

$$\lim_{n\to\infty} \Delta h \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial\rho(z_i, \theta)}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

因此用 Волков 方法算出的斜面积，当 $\Delta h \to 0$ 时，所趋的极限是

$$\begin{aligned} \text{Во} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(0, \theta)\, d\theta\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho \frac{\partial\rho}{\partial z}\, dz\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\, d\theta\right)^2} \end{aligned} \qquad (2)$$

（注意 $\rho(h, \theta) = 0$）.

由于

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 + \rho^2\right] d\theta^2 + 2\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{\partial\rho}{\partial z}\, d\theta\, dz + \left(1 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2\right) dz^2,$$

所以曲面的面积 S 为（参看 §7）

$$S = \int_0^h \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}\, d\theta\, dz. \qquad (3)$$

为了比較 Ба, Во 与 S 我們引进一个复値函数

$$f(z, \theta) = -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z} + i\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}, \qquad (4)$$

則

$$S = \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(z, \theta)|\, d\theta\, dz, \qquad (5)$$

$$\text{Ба} = \int_0^h \left| \int_0^{2\pi} f(z,\theta) d\theta \right| dz, \tag{6}$$

及

$$\text{Во} = \left| \int_0^h \int_0^{2\pi} f(z,\theta) d\theta \, dz \right|. \tag{7}$$

由此可見

$$\text{Во} \leqslant \text{Ба} \leqslant S. \tag{8}$$

結論：(i) Бауман 方法比 Волков 方法好；(ii) 所求出的結果比眞实的結果常偏低一些；(iii) Бауман 方法旣然偏低，因此可以作如下的修改，即取 $C_i = l_i \Delta h$. 这样旣化簡了算法，又增大了数值.

現在再来考慮 Во $= S$ 及 Ба $= S$ 的曲面. 先講下面的引理.

引理. 在区間 $[a, b]$ 中，如果 $f(x)$ 是一个实变数的复值函数，則

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx \tag{9}$$

成立的必要且充分的条件是 $f(x)$ 的虛实部分之比是常数.

証. 命 $f(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)}$, $\rho(x) > 0$ 而 $\theta(x)$ 是实的. 显然如果 $\theta(x)$ 与 x 无关，則等式 (9) 成立. 反之，由等式 (9) 可知

$$\int_a^b \int_a^b f(x) \overline{f(y)} \, dx \, dy = \int_a^b \int_a^b \rho(x)\rho(y) e^{i[\theta(x)-\theta(y)]} dx \, dy =$$

$$= 2 \iint_{a \leqslant x < y \leqslant b} \rho(x)\rho(y) \cos[\theta(x) - \theta(y)] dx \, dy =$$

$$= 2 \iint_{a \leqslant x < y \leqslant b} \rho(x)\rho(y) dx \, dy,$$

即

$$\iint_{a \leqslant x < y \leqslant b} \rho(x)\rho(y)\{1 - \cos[\theta(x) - \theta(y)]\} dx \, dy = 0.$$

因而得出

$$\cos[\theta(x) - \theta(y)] = 1,$$

即

$$\theta(x) = \theta(y).$$

此即引理所需.

易知对于多重积分，引理亦眞(請讀者自証).

由引理可知

$$\text{Во} = \left| \int_0^{2\pi} \int_0^h f(z,\theta) dz \, d\theta \right| = \int_0^{2\pi} \int_0^h |f(z,\theta)| dz \, d\theta = S$$

成立的必要且充分的条件是 $f(z, \theta)$ 的虛实部分之比是常数. 于是得偏微分方程

$$\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 = c^2 \left(-\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2. \tag{10}$$

换言之，仅有适合于微分方程(10)的函数 $\rho = \rho(z, \theta)$, Волков 方法才能給出正确答案. 当然还要适合以下的条件: $\rho(h, \theta) = 0$ (这是制高点)，及 $\rho(0, \theta) = \rho_0(\theta)$ (这是底盘 l_0 的曲綫方程).

我們并不解微分方程 (10)，而从 (10) 的几何意义入手．把 θ 与 z 看成参变数，即

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z,$$

而 ρ 是 θ 与 z 的函数．由

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\cos\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\sin\theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial z}=1$$

得知在曲面上点 (θ,z) 的法綫方向是

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\ -\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta+\rho\sin\theta,\ -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right).$$

它与 z 軸的交角 α (即点 (θ,z) 的傾角)的余弦 $\left(由(10)及\ \frac{\partial\rho}{\partial z}<0\right)$

$$\cos\alpha=\frac{-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\tag{11}$$

是一常数，也就是說这曲面的切平面与 xy 平面成一固定的角度 α．我們来說明这样的曲面的几何性質．

从制高点向 xy 平面作一垂直平面，这平面与該曲面的交綫有次之性質，这曲綫上的每一点的切綫与 xy 平面的夹角等于 α，所以它是一条直綫．

从任一平面封閉曲綫 (l_0) 作底盘，以任一投影在盘內的点 (l_n) 作为制高点．通过制高点与底盘垂直的直綫称为軸．通过 l_0 上任一点 A 作一直綫，它在 A 与軸所成的平面上，与底盘的交角是 α，这样直綫所成的图形便是适合于 Бо $=S$ 的图形．

如果有最高峯，并且向下看沒有陡峭的角度，则仅有以下的曲面才能 Бо $=S$：底盘是圓或圓的若干切綫形成的多角形，或一些圓弧及一些切綫所成的图形，軸的尖端在通过圓心垂直于底盘的直綫上（見图 80)．

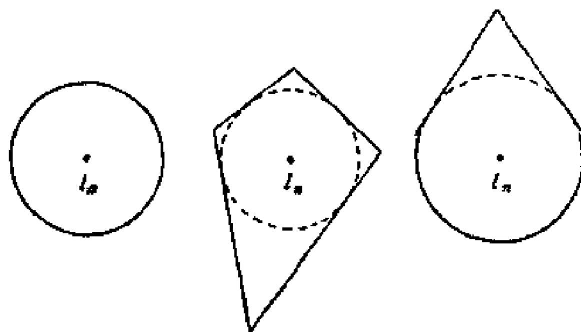


图 80

通俗些說，只有蒙古包、金字塔和一些由此复合出来的图形，才能由 Волков 的方法来无限逼近．

但什么时候 Ба $=S$ 呢？当然当 Бо $=S$ 的时候，Ба $=S$．除掉上面所求出的一些曲面外，还有其他曲面否？答案：有．証明如下：从

$$\text{Ба}=\int_0^h\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta\right|dz=\int_0^h\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|\,d\theta\,dz=S$$

得出

$$\int_0^h\left(\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|d\theta-\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta\right|\right)dz=0.$$

积分号下的函数是非負的，因此对任一 z 常有

$$\int_0^{2\pi} |f(z,\theta)|\,d\theta = \left|\int_0^{2\pi} f(z,\theta)\,d\theta\right|.$$

因此当固定 z 时，$f(z,\theta)$ 的虚实部分之比是常数. 也就是說，仅有下面的曲面才能 $\text{Ба} = S$: 高程相等之处，曲面有相同的傾角. 用通俗的話說，只有天坛顶，北海白塔及葫芦式的图形才能由 Бауман 的方法来无限逼近.

怎样来估計誤差呢? 假定有二常数使

$$0 < \xi \leqslant \cos\alpha \leqslant \eta,$$

即

$$\xi \leqslant \frac{-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 + \rho^2}} \leqslant \eta.$$

由此可得

$$\frac{\rho^2 + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}{\left(\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 + \rho^2} \geqslant 1 - \eta^2.$$

因而

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}\,dz\,d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{1-\eta^2}\int_0^{2\pi}\int_0^h \sqrt{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 + \rho^2}\,dz\,d\theta = \sqrt{1-\eta^2}\,S.$$

又

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h \left(-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)dz\,d\theta \geqslant \xi\int_0^{2\pi}\int_0^h \sqrt{\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 + \rho^2}\,dz\,d\theta = \xi S,$$

因此

$$\text{Bo} \geqslant \sqrt{\xi^2S^2 + (1-\eta^2)S^2} = \sqrt{1+\xi^2-\eta^2}\,S.$$

又因为 $1 > \eta > \xi > 0$，所以

$$\frac{\xi}{\eta} \leqslant \sqrt{1+\xi^2-\eta^2}$$

(将两端平方，此式即 $(\eta^2-\xi^2)(1-\eta^2) \geqslant 0$). 故得

$$\text{Bo} \geqslant \frac{\xi}{\eta}S.$$

总而言之，我們証明了下面的結果.

定理 1. 若曲面 $\rho = \rho(z,\theta)$ $(0 \leqslant z \leqslant h,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 上任意点的傾角 α 的余弦都満足 $0 < \xi \leqslant \cos\alpha \leqslant \eta$，則不等式

$$\frac{\xi}{\eta}S \leqslant \text{Bo} \leqslant \text{Ба} \leqslant S \tag{12}$$

成立. Bo $= S$ 的充要条件是曲面的任意点都有相同的傾角，Ба $= S$ 的充要条件是曲面在高程相等处的点有相同的傾角.

由此可見，只有当曲面上的点的傾角变化不大时，Волков 方法才能得到精确結果，而只有当曲面在相邻两高程間的点的傾角相差不大时，Бауман 方法才能給出精确的結果. 然而在其他情况下，用这种方法的誤差就可能比較大了.

因此我們建議如下的算法：在等高綫图上，通过制高点 (l_n) 引进若干条放射綫 (θ_0), (θ_1), $\cdots$, (θ_{m-1})，此处 (θ_j) 的幅角为 $\frac{2\pi}{m}j$. 放射綫 (θ_j), (θ_{j+1}) 与等高綫 (l_i), (l_{i+1}) 所围成的面积記为 d_{ij}. (l_i) 被 (θ_j) 与 (θ_{j+1}) 所截取的一段的长度記之为 l_{ij}.

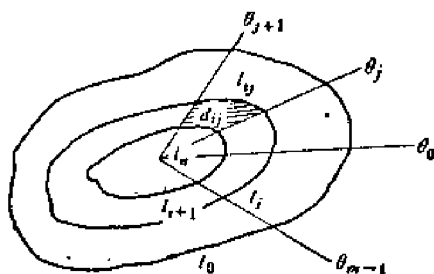


图 81

方法 (i)

a) $D_j = \sum_{i=0}^{n-1} d_{ij}$（等高綫图在放射綫 (θ_j) 与 (θ_{j+1}) 間的面积）.

b) $E_j = \left(\sum_{i=0}^{n-1} l_{ij}\right)\Delta h$（中間隔板在两直立墙壁之間的面积之和）.

c) $\sigma_1 = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{D_j^2 + E_j^2}$ 就是所求曲面的漸近值.

方法 (ii)

a) $c_{ij} = l_{ij}\Delta h$（中間隔板在两直立墙壁之間的面积）.

b) $\sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{c_{ij}^2 + d_{ij}^2}$ 就是所求曲面的漸近值.

用同样的方法，可知当 $\Delta h \to 0$, $m \to \infty$ 时，σ_1 与 σ_2 所趋近的值分别为

$$K = \int_0^{2\pi}\left|\int_0^h f(z,\theta)dz\right|d\theta \tag{13}$$

及

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^h |f(z,\theta)|\,dz\,d\theta,$$

显然 Bo $\leqslant K \leqslant S$. 同样可知 $K = S$ 的充要条件为曲面为直紋面. 由于 σ_2 趋于眞面积，所以用方法 (ii) 最为精密可靠.

第十六章　綫积分，面积分

§1. 曲綫积分的定义(第一型)

假定空間有一条曲綫 (l)，它具有确定的方向，并且假定 A 是它的起点而 B 是終点．这曲綫的弧长从 A 算起．假設在这曲綫上定义了一个函数 $f(P)$，P 是曲綫上的一点，我們在曲綫上依次取分点



图 82

$$P_0 = A,\ P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{n-1},\ P_n = B.$$

在 P_iP_{i+1} 中任取一点 P_i'，作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(P_i')\Delta S_i,$$

此处 ΔS_i 是 P_iP_{i+1} 間的弧长，当分割无限精密时，卽 $n\to\infty$，且所有 ΔS_i 都 $\to 0$ 时，如果极限存在，則称为函数 $f(P)$ 沿曲綫 (l) 的积分，并且記之为

$$\int_{(l)} f(P)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(P_i')\Delta S_i. \tag{1}$$

由于 (l) 上的变点 P 的位置完全可以用由 A 点算起的弧长 s 来确定，所以 $f(P)=f(s)$，因而积分 (1) 便是通常的积分

$$\int_{(l)} f(P)ds = \int_0^l f(s)ds,$$

此处 l 是 (l) 的弧长．注意，曲綫 (l) 可以是封閉的，就是說，B 可以与 A 重合．

如果曲綫是由参变数 t 表达出来的：

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t),$$

如果当 $t=t_0$ 变到 $t=t_1$ 时，曲綫由 (A) 变到 (B)，則

$$\int_{(l)} f(P)ds = \pm\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.$$

如果 $t_0<t_1$，則用正号，反之用負号．

再假定 t 就是 x，因此

$$\int_{(l)} f(P)ds = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\psi(x),\chi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)+\chi'^2(x)}\,dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1}\frac{f(x,\psi(x),\chi(x))}{|\cos\alpha|}dx,$$

这儿

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2(x)+\chi'^2(x)}}.$$

由于曲綫 (l) 的切綫方向是

$$(1, \psi'(x), \chi'(x)),$$

所以 α 就是这切綫与 x 軸的夾角。

取 $f(P)=1$，我們特別有曲綫的長度

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{|\cos\alpha|}.$$

对于平面上的曲綫，也有这些相同的結果。

例 1. 在第一象限內沿橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 求积分 $I=\int_{(l)}xyds$. 由于

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},\quad \sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}},$$

可知

$$\int_{(l)}xy\,ds=\int_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}dx=\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,x\,dx$$

$$=\frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\frac{2}{3}[a^4-(a^2-b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{ab}{3}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

例 2. 沿曲綫

$$x=t,\quad y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3},\quad z=\frac{1}{2}t^2$$

求 t 由 0 到 1 的积分

$$\int_{(l)}xyz\,ds.$$

它等于

$$\int_0^1 t\cdot\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}\cdot\frac{1}{2}t^2\sqrt{1+2t+t^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1+t)dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

例 3. 在极坐标下，求綫积分的公式. 由于

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2,$$

所以有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}d\theta.$$

在球坐标下，求綫积分的公式. 由于

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+r^2\sin^2\varphi\,d\theta^2,$$

所以有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\sqrt{r'^2+r^2\varphi'^2+r^2\sin^2\varphi}d\theta.$$

曲綫积分的最好的应用之一，便是求出質量不均勻的綫型物質的質量.

仍如以上的符号，但假定 $\rho(x,y,z)$ 是物質在点 (x,y,z) 的密度，如此在曲綫 (l) 上由 (A) 到 (B) 的总質量便等于

$$\int_{(l)}\rho(x,y,z)ds.$$

例 4. 命 (l) 表 $y=\log x$, 假定这曲綫在每点的密度等于該点横坐标的平方, 求从 x_1 到 x_2 这曲綫的質量

$$\int_{x_1}^{x_2} x^2 ds=\int_{x_1}^{x_2} x^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx=\frac{1}{3}\left((1+x_2^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right).$$

曲綫积分还可以用来求分布在不均匀的曲綫 (l) 上的質点对一已給質量为 m 的質点 M 的吸引力. 設将 (l) 分成許多小段 (σ_i), 其长度仍記为 σ_i. 先訨每一段的質量都集中在它上面的某一点 M_i, 則吸引力在坐标軸上的投影可以近似地表示为

$$X \doteq \sum_i \frac{m\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2} \cos\theta_i, \quad Y \doteq \sum_i \frac{m\rho(M_i)\sigma_i}{r_i^2} \sin\theta_i,$$

此处 $\rho(M_i)\sigma_i$ 表示 M_i 所在的小段的質量的近似值, r_i 表示矢量 $\overrightarrow{MM_i}$ 的长度, 而 θ_i 表示矢量 $\overrightarrow{MM_i}$ 与 x 軸的夾角. 当 $\operatorname{Max}\sigma_i \to 0$ 时, 則得

$$X=m\int_{(l)} \frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2} ds, \quad Y=m\int_{(l)} \frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2} ds.$$

例 5. 求星形綫 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 在第一象限的弧对于位于坐标原点的单位質量的吸引力. 假定曲綫上每一点的密度等于这一点到原点的距离的立方,

$$X=\int_{(l)} \frac{r^3\cos\theta}{r^2} ds=\int_{(l)} x ds=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^4 t\, dt=-3a^2\frac{\cos^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a^2}{5},$$

$$Y=\int_{(l)} \frac{r^3\sin\theta}{r^2} ds=\int_{(l)} y ds=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\, dt=3a^2\frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a^2}{5}.$$

§2. 曲綫积分(第二型)

命 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 是三个函数, 在曲綫 (l) 上定义, 我們考虑积分

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz. \tag{1}$$

这积分的意义便是

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\right)$$

的极限, 即把曲綫 (l) 分为 n 份 $\widehat{M_iM_{i+1}}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$, 在每份中取一任意点 (ξ_i,η_i,ζ_i), 把 $P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 乘以 Δx_i, $Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 乘以 Δy_i, $R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 乘以 Δz_i, 加之, 命 $\widehat{M_iM_{i+1}}$ 的长度都趋于零, 这和的极限便是 (1), 此处 Δx_i, Δy_i, Δz_i 分別表示曲綫段 $\widehat{M_iM_{i+1}}$ 在 x 軸, y 軸及 z 軸上的投影的长度.

用参数表示式

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t),$$

則 (1) 的表达如下:

$$\int_A^B [P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t)+ \\ +R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)]dt.$$

命 $\mathbf{t}$ 表示在 (ξ, η, ζ) 的切綫，则

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\mathbf{t}, \mathbf{y}), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\mathbf{t}, \mathbf{z}),$$

此处 $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 表示 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角的余弦．所以

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(l)} (P\cos(\mathbf{t}, \mathbf{x}) + Q\cos(\mathbf{t}, \mathbf{y}) + R\cos(\mathbf{t}, \mathbf{z}))ds.$$

显然有以下的一些性質：

1）如果 (l) 是由各部分 $(l_1), (l_2), \cdots, (l_n)$ 組成的，则

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(l_1)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \\ + \int_{(l_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \cdots + \int_{(l_n)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

2）曲綫积分的数值不仅是由被积函数与积分曲綫来确定的，它与曲綫 (l) 的方向也有关系，并当改变积分路綫的方向时，曲綫积分值亦变号。

例 1．　沿椭圓

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

上半部求出

$$\int_{(l)} (x^2 + 2xy)dy.$$

用参变数表达式 $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, 如此則得

$$\int_{(l)} (x^2 + 2xy)dy = \int_0^{\pi} (a^2\cos^2 t + 2ab\cos t\sin t)b\cos t\,dt = \\ = a^2 b\int_0^{\pi} \cos^3 t\,dt + 2ab^2\int_0^{\pi} \cos^2 t\sin t\,dt = \frac{4}{3}ab^2.$$

例 2．　沿星形綫 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, 由 $(a, 0)$ 到 $(0, a)$ 求积分

$$\int_{(l)} \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}.$$

这积分等于

$$3a^{4/3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{3}{16}\pi a^{4/3}.$$

說明本节所定义的綫积分的最好的例子，是力学中关于功的計算，原則是：

已知在点 P 处有一个力 $\mathbf{F}$．如果要把 P 点的質量为 m 的物質移一位移 $\mathbf{l}$，則所得的功等于

$$|\mathbf{F}|\,|\mathbf{l}|\cos(\mathbf{F}, \mathbf{l}),$$

这儿 $|\mathbf{F}|$ 是力的大小，$|\mathbf{l}|$ 是位移的长短，$\cos(\mathbf{F}, \mathbf{l})$ 是它們的夾角余弦．

考慮一个力場，即每一点有一个力，我們研究一个单位質量的点依一条曲綫 (l) 运动所作的功．

把这曲綫分为 n 份：

$$A = A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n = B.$$

在 A_iA_{i+1} 一段所做的功等于

$$\begin{aligned}\Delta E_i \sim |\mathbf{F}_i|\overline{A_iA_{i+1}}\cos(\mathbf{F}_i, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}) = \\ = |\mathbf{F}_i|\overline{A_iA_{i+1}}(\cos(\mathbf{F}_i, x)\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, x) + \\ + \cos(\mathbf{F}_i, y)\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, y) + \cos(\mathbf{F}_i, z)\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, z)).\end{aligned}$$

去掉括号,并用 P, Q, R 記 $\mathbf{F}$ 在 x, y, z 軸上的投影. 所以

$$\Delta E_i \sim P_i\Delta x_i + Q_i\Delta y_i + R_i\Delta z_i,$$

此处用了 $P_i = F_i\cos(\mathbf{F}_i, x)$, $\Delta x_i = \overline{A_iA_{i+1}}\cos(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, x)$ 等等,因而全部功为

$$E = \int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

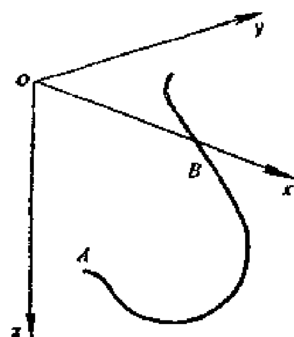


图 83

例 3. 試求質量为 m 的質点 M,由 A 到 B 时地心引力所产生的功.

取坐标軸 z 軸垂直向下,在任一点的引力矢量是

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg.$$

功的全部等于

$$\int_{(l)} mg\,dz = mg(z_B - z_A),$$

即 B 点与 A 点的 z 軸座标之差乘以 mg.

由此可知,功仅与开始点与最終点的位置有关,而与所經过的曲綫无关.

例 4. 求当一質量为 1 的質点 M 由 M_1 移动到 M_2 时,向着質量为 m 的不动質点所作的功.

以不动質点为原点,r 代表向量半径,我們看出力与 $\overline{OM}$ 的方向相反,而大小等于 $\frac{fm}{r^2}$, 此处 f 是引力常数,如此求出

$$P = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{x}{r}, \quad Q = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{y}{r}, \quad R = -\frac{fm}{r^2}\cdot\frac{z}{r}.$$

所以

$$\begin{aligned}E &= -fm\int_{(l)}\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} = -fm\int_{(l)}\frac{r\,dr}{r^3} \\ &= fm\int_{(l)} d\left(\frac{1}{r}\right) = fm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),\end{aligned}$$

此处 r_1 与 r_2 是起点与終点对原点的距离.

若引用質点的势量

$$U = \frac{fm}{r},$$

则

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R,$$

而且功等于 $U(M_2) - U(M_1)$, 即等于势量差. 用矢量的語言, U 的梯度是力 $\mathbf{F} = (P,$

Q, R)，而功是力对微分矢量 $(d\mathbf{r}) = (dx, dy, dz)$ 的內积的积分，即功

$$E = \int_{(l)} \mathbf{F} \cdot (d\mathbf{r}).$$

例 5. 气体在絕热过程中，体积 V，压力 P 及絕对温度 T 之間滿足 Clapeyron 公式

$$PV = RT,$$

此处 R 为常数.

我們来确定气体从状态 (P, V, T) 变为与其无限接近的状态 $(P + dP, V + dV, T + dT)$ 时，所需消耗的热能 dU.

将轉变过程設想为：第一步，气体体积膨大 dV；第二步在固定体积之下，温度改变 dT. 为簡单起見，假定气体在一圓筒內，一面是面积为 Q 的活塞，当气体膨胀时，将活塞推动了 ds，作用于活塞上的力为 PQ，因此所作的功为 $PQ\,ds = P\,dV$，故消耗在这功上的热为 $AP\,dV\left(A = \frac{1}{427} \text{卡/克米}\right)$. 当温度变化 dT 时，需热 $C_v dT$，其中 C_v 为固定体积下的气体热容量. 因此

$$dU = C_v dT + AP\,dV,$$

由于

$$dT = \frac{1}{R}(P\,dV + V\,dP),$$

故得

$$dU = \frac{C_v}{R} V\,dP + \frac{C_v + AR}{R} P\,dV = \frac{C_v}{R} V\,dP + \frac{C_P}{R} P\,dV.$$

因此当气体状态經过曲綫 (l)，由 (A) 变到 (B) 时，所传得的总热量为

$$U = \int_{(l)} \frac{C_v}{R} V\,dP + \frac{C_P}{R} P\,dV.$$

例 6. 一导体上通过的电流为 I，它上面一元素 ds 作用于与它相距 r 的磁量为 m 的一点 M 上的力，按照 Biot 与 Savar 定律，应为

$$dF = \frac{Im \sin\varphi\,ds}{r^2},$$

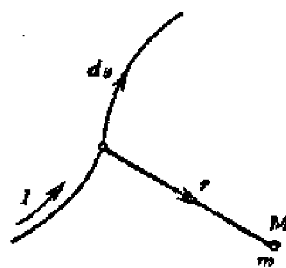


图 84

此处 $d\mathbf{s}$ 延着电流行进的方向，$\mathbf{r}$ 是連接电流元素与磁极的向量，φ 是 $d\mathbf{s}$ 与 $\mathbf{r}$ 的夾角，$d\mathbf{F}$ 的方向与 $\mathbf{r} \times d\mathbf{s}$ 一致. 因此

$$d\mathbf{F} = \frac{mI}{r^3}(\mathbf{r} \times d\mathbf{s}).$$

以 (ξ, η, ζ) 表 M 的座标，(x, y, z) 表 $d\mathbf{s}$ 起点的座标，而 $d\mathbf{s}$ 在座标軸上的投影分别为 dx, dy, dz，则得

$$F_x = mI \int_{(l)} \frac{(\eta - y)dz - (\zeta - z)dy}{r^3},$$

$$F_y = mI \int_{(l)} \frac{(\zeta - z)dx - (\xi - x)dz}{r^3},$$

$$F_x = mI\int_{(l)} \frac{(\xi - x)dy - (\eta - y)dx}{r^3}.$$

§3. 曲綫积分求面积

現在考虑平面上一区域 (σ) 的面积，我們假定它是被封閉曲綫 (l) 所包围的，为簡单起見，假定平行于 y 軸的直綫最多只和它交于两点．y_1 表示由下向上方向第一次交得的坐标，而 y_2 表示第二次交得的坐标，并且假定其間 y 都在域 (σ) 中，并且 a, b 表示两个极端点的横座标，区域 (σ) 在 $x = a$, $x = b$ 之間，而这长条不能再狹．

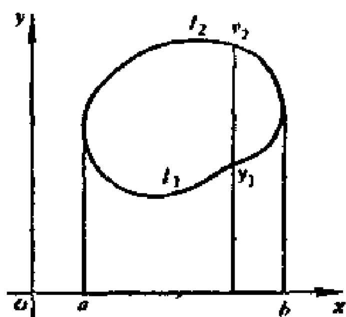


图 85

前已知道这区域的面积等于

$$\sigma = \int_a^b (y_2 - y_1)dx. \tag{1}$$

把曲綫 (l) 分为两部分 (l_1) 与 (l_2)：(l_1) 是下部，(l_2) 是上部，显然可見

$$\int_a^b y_2\, dx,$$

恰好是沿 (l_2) 的曲綫积分

$$\int_{(l_2)} y\, dx.$$

如果把它的方向改为由 b 到 a，便应当取負号，同样 $\int_a^b y_1 dx$ 是沿曲綫 (l_1) 从 a 到 b 的积分．

把 (l) 表示为循 (l_1) 由 a 到 b，再循 (l_2) 由 b 到 a，则过此曲綫的綫积分等于

$$\sigma = \int_a^b y_2\, dx - \int_a^b y_1\, dx = -\left[\int_{(l_2)b}^a y\, dx + \int_{(l_1)a}^b y\, dx\right] = -\int_{(l)} y\, dx. \tag{2}$$

这曲綫 (l) 取逆时針的方向，即如果人沿边走，左手在域内．

同法求出

$$\sigma = \int_{(l)} x\, dy. \tag{3}$$

相加得

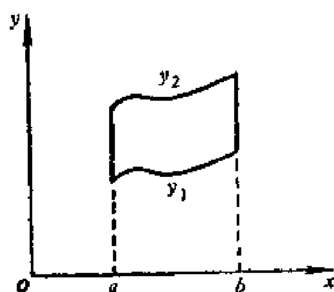


图 86

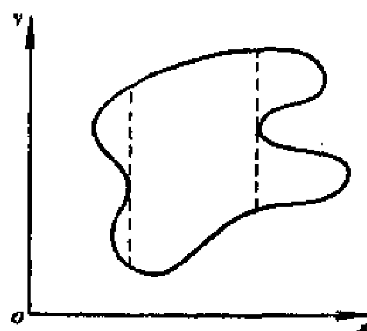


图 87

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{(l)} x\,dy - y\,dx. \tag{4}$$

我們求出 (2) 式时，是用了以下的假設的，平行于 y 軸的直綫頂多与 (l) 交于两点。我們現在来減輕这一假定，先考虑以下的特殊情况，(σ) 是界于二平行于 y 軸的直綫和两曲綫 (l_1) 与 (l_2) 之間的(图 86)。重复上面的討論依然得到

$$\sigma = -\left[\int_{(l_1)} y\,dx + \int_{(l_2)} y\,dx\right].$$

在直綫 $x = a$ 与 $x = b$ 上 $dx = 0$，所以 $\int y\,dx = 0$。因此得到 (2) 式，其中 (l) 是先走 (l_1) 再走 b 直綫，然后 (l_2)，最后是 a 直綫。

对于有更一般的边界的区域(图 87)，我們可以引垂直于 x 軸的直綫把它分成为有限个如上所討論的图形，由于沿垂直于 x 軸的直綫的积分等于 0，因此对这些图形的线积分的和便定义了原来图形的綫积分，换言之，(2)，(3) 及 (4) 对普遍形状的界綫也正确。

例 1. 取椭圓

$$x = a\cos\theta,\quad y = b\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

則得面积

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta \cdot b\cos\theta + b\sin\theta \cdot a\sin\theta)d\theta = \pi ab.$$

例 2. 取外擺綫

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t],$$
$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t] \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

它与对应的圓弧 $x = a\cos mt$, $y = a\sin mt$ (t 由 2π 变为 0)之間的面积 D(图 88)为

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\int_{(ABC)} x\,dy - y\,dx + \frac{1}{2}\int_{(CDA)} x\,dy - y\,dx \\ &= \frac{1}{2}a^2m(1+m)(1+2m)\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2}a^2m\int_{2\pi}^0 dt = \pi a^2m^2(2m+3). \end{aligned}$$

在証明公式 (2)，(3)，(4) 时，参数的变化区間是有限的，当区間是无限时，例如当 t 由 0 变为无限时，就命 $t = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$，而 θ 由 0 变为 $\frac{\pi}{2}$，再将 θ 变为 t，所以以上諸公式仍然正确。

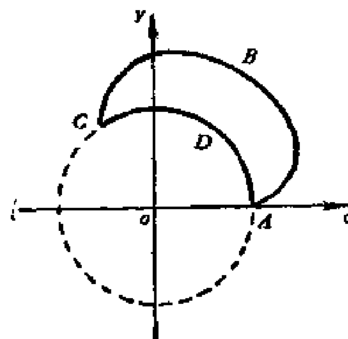


图 88

例 3. 求曲綫

$$x = \frac{3at}{1+t^3},$$

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3},\ (t \in (0, \infty))$$

所范围的面积 D。

$$D=\frac{1}{2}\int_{(l)} x\,dy-y\,dx=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}=\frac{3}{2}a^2.$$

§4. Green 公式与 Остроградский 公式

Green 公式是一个基本公式，它表达出閉曲綫积分和它所圍繞着的面积分的关系。这公式也是上节公式的推广。

先从計算积分

$$\iint_{(\sigma)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy$$

談起. 为簡单起見，我們还是先假定平行于 y 軸的直綫至多与 (σ) 的边界 (l) 交于二点，如此，則得

$$\iint_{(\sigma)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy=\int_a^b (P(x,y_2)-P(x,y_1))dx.$$

用与上节相同的方法知道

$$\iint_{(\sigma)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy=-\int_{(l)}P(x,y)dx,$$

这儿 (l) 是取逆时針方向。

同样

$$\iint_{(\sigma)}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy=\int_{(l)}Q(x,y)dy.$$

由此得 Green 公式

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{(l)}P\,dx+Q\,dy. \qquad (1)$$

如果取 $Q=x$, $P=-y$, 即得上节的公式(4). 与上节一样，我們可以証明，这一公式对更普遍的区域也适用.

即使于非連通的，或非单連通的区域都对，但須注意边界的走向，我們經常假定所积分的区域在边界的左边(图89).

由于

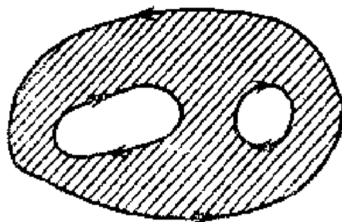


图 89

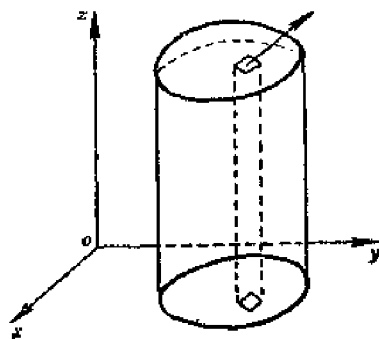


图 90

$$dx = ds\cos(t, X), \quad dy = ds\cos(t, Y),$$

其中 (t, X) 表示在該点切綫方向 t 与 X 軸的夾角,命 n 代表法綫方向,由 $(t, X) = \pi - (n, Y)$ 与 $(t, Y) = (n, X)$, 所以

$$dx = -ds\cos(n, Y), \quad dy = ds\cos(n, X),$$

因而在 (1) 式中以 $-Q$ 代 P, P 代 Q, 則得

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{(l)}(P\cos(n, X) + Q\cos(n, Y))ds. \tag{2}$$

这是 Green 公式的又一形式.

这是"面"与"綫"的关系, 我們再考慮"体"与"面"的关系, 即就是 Остроградский 公式,它的形式是

$$\iiint_{(v)}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_{(s)}(P\cos(n, X) + Q\cos(n, Y) + R\cos(n, Z))ds, \tag{3}$$

这儿 (s) 是体 (v) 的边界, ds 是(s)上的面积元素.

証明的方法也是先考虑平行于 z 軸的直綫只交 (v) 于两点的情况. 命 σ_{xy} 是这个体在 xy 平面上的射影(图 90). 如此,則

$$\iiint_{(v)}\frac{\partial R}{\partial z}dv = \iint_{(\sigma_{xy})}d\sigma_{xy}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}dz = \iint_{(\sigma_{xy})}(R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1))d\sigma_{xy}.$$

引进(s)的法綫方向 (n). 在曲面上部这方向是由容积向外的方向,与 z 軸成銳角;但下部的法綫方向与 z 軸成鈍角,由投影关系可知在上部曲面

$$d\sigma_{xy} = \cos(n, z)ds.$$

而在下部曲面,則

$$d\sigma_{xy} = -\cos(n, z)ds.$$

由此得

$$\iiint_{(v)}\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}dv = \iint_{(s_2)}R(x, y, z)\cos(n, z)ds + \iint_{(s_1)}R(x, y, z)\cos(n, z)ds = \iint_{(s)}R(x, y, z)\cos(n, z)ds.$$

由此,不难証出公式 (3) 来.

我們可以和 Green 公式一样来減弱关于边界面 (s) 的条件, 原因是: (1) 在母綫平行于 z 軸的柱体上对 z 积分等于 0; (2) 其他的图形可用添加柱面法隔成适合于原来条件的图形, 若在多个曲面为界的情况下, 必須注意、法綫的指向是在求积分的区域的外面.

何謂外面,有时并不明确. 有这样的情况存在,一法綫指向外面,把这法綫連續移动,走了一些路回到原来的位置后,这法綫指向另一面了,有这样性质的图形,称为单側曲面.

而我們一般研究的将是双側曲面．单側曲面的著名例子是 Möbius 带．

把一矩形紙条 $ABCD$ 的对边撵轉粘上(图 91，92)，这样的曲面就分不出两側来了．



图 91

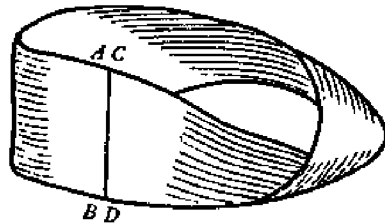


图 92

§5. Stokes 公式

Green 公式的另一推广是把平面推广为曲面，卽曲面 S (非封閉面)以曲綫 (l) 为边界的情况。

假定 S 在 xy 平面上的投影是 σ_{xy}，并假定通过 σ_{xy} 上的一点平行于 z 軸的直綫仅与 S 有一个交点，(λ) 是 (σ_{xy}) 的边界綫，也就是 (l) 在 xy 平面上的投影．S 的法綫方向是取与 z 軸成銳角的，如此則得出

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos(n, Z) = -\cos(n, X), \quad \frac{\partial z}{\partial y}\cos(n, Z) = -\cos(n, Y),$$

由此

$$d\sigma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dS = \cos(n, Z)dS.$$

假定 $P(x, v. z)$ 是在曲面 S 附近所定义的連續函数，并有一級連續偏微商，先考慮积分

$$\int_{(l)} P(x, y, z)dx.$$

曲綫 (l) 在 S 上，利用曲面方程 $z = f(x, y)$，在积分号下，用 $f(x, y)$ 代 z，(λ) 上变点 x，y 的坐标也就是 (l) 上对应点的这两个坐标，所以 (l) 积分可以用 (λ) 积分来代替，卽

$$\int_{(l)} P(x, y, z)dx = \int_{(\lambda)} P(x, y, f(x, y))dx.$$

在右边用 Green 公式，$P = P(x, y, f(x, y))$，$Q = 0$，則得

$$\int_{(\lambda)} P(x, y, f(x, y))dx = -\iint_{(\sigma_{xy})} \frac{\partial}{\partial y}(P(x, y, f(x, y)))d\sigma_{xy}$$

$$= -\iint_{(\sigma_{xy})}\left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)d\sigma_{xy}.$$

由曲面 S 的积分元素 ds 与 $d\sigma_{xy}$ 的关系可知

$$\int_{(l)} P(x, y, z)dx = -\iint_{(S)}\left(\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)\cos(n, Z)dS$$

$$= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos(n, Y) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos(n, Z) \right) dS. \tag{1}$$

假定 Q 与 R 是另外两个函数，同样可以得以下的两个公式

$$\int_{(l)} Q(x, y, z) dy = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos(n, Z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(n, X) \right) dS,$$

$$\int_{(l)} R(x, y, z) dz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos(n, X) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(n, Y) \right) dS.$$

三式相加，得

$$\int_{(l)} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, X) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, Y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, Z) \right] dS, \tag{2}$$

这是 Green 公式的推广，因为在 xy 平面上 $dz = 0$，$\cos(n, Z) = 1$，$\cos(n, X) = 0$，$\cos(n, Y) = 0$，所以得出

$$\int_{(l)} P\, dx + Q\, dy = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma.$$

前所假定的：平行于 z 軸的直綫与 (S) 只交一点是可以減弱的．如果不这样，就用輔助曲綫把 S 分成几部分，使每一部分都满足上述的条件．而每一部分都可用 (2) 式，然后把結果总加起来．因为輔助界綫在相反方向各算了一次，而且符号相反，所以 (2) 是在普遍情况下也是成立的． 而須要注意的是对于 (l) 及法綫方向 (n) 要合乎以下的条件：依法綫方向直立，沿 (l) 走时，曲面 S 在我們的左边．

公式 (2) 也可写成为

$$\int_{(l)} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

这就是 Stokes 公式．

例 1. 若一坚硬的曲面在各方面承受的压力都相等，則必平衡．

取曲面元素为 dS． P 为单位面积的压力，它为常量，則沿 dS 法綫方向作用在元素 dS 上的力在座标軸上的投影的長度分別为

$$-P \cos\lambda\, dS, \quad -P \cos\mu\, dS, \quad -P \cos\nu\, dS,$$

此处由于法綫方向与压力方向相反，故取負号．因此合力的三个分量为

$$X = -P \iint_{(S)} \cos\lambda\, dS, \quad Y = -P \iint_{(S)} \cos\mu\, dS, \quad Z = -P \iint_{(S)} \cos\nu\, dS.$$

在 Остроградский 公式中取 $P = 1$, $Q = R = 0$, 則得

$$X = 0.$$

同样可得

$$Y = Z = 0.$$

作用在元素 dS 上的压力对原点的力矩的三个分量为

$$P(z\cos\mu - y\cos\nu)dS, \quad P(x\cos\nu - z\cos\lambda)dS, \quad P(y\cos\lambda - x\cos\mu)dS.$$

因此压力对原点的力矩的三个分量为

$$M_x = P\iint\limits_{(S)}(z\cos\mu - y\cos\nu)dS,$$

$$M_y = P\iint\limits_{(S)}(x\cos\nu - z\cos\lambda)dS,$$

$$M_z = P\iint\limits_{(S)}(y\cos\lambda - x\cos\mu)dS.$$

在 Остроградский 公式中取 $P = 0$, $Q = Pz$, $R = -Py$, 則得

$$M_x = 0.$$

同样可得

$$M_y = M_z = 0.$$

因此曲面是平衡的.

例 2. 取 xy 平面为液体的表面, z 軸向下, 液体給浸入其内的一小平面块物体的压力是向着这块物体的法綫的. 现在設浸入密度均匀,体积为 (V), 表面为 (S) 的物体, 又設液体的比重为 ρ, 設元素 dS 浸入的深度为 z, 則这元素承受的压力为

$$\rho z\, dS.$$

它在座标軸上的分量为

$$-\rho z\cos\lambda\, dS, \quad -\rho z\cos\mu\, dS, \quad -\rho z\cos\nu\, dS.$$

故压力的三个分量各为

$$X = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\lambda\, dS, \quad Y = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\mu\, dS, \quad Z = -\rho\iint\limits_{(S)} z\cos\nu\, dS.$$

由 Остроградский 公式得

$$X = Y = 0,$$

$$Z = -\rho\iiint\limits_{(V)} dV = -\rho V.$$

因此压力朝着垂直向上的方向,而等于物体排出的液体的重量.

現在考慮这些元素力,对物体重心 $C(\xi, \eta, \zeta)$ 的力矩,它的三个分量各为

$$\rho z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]dS,$$

$$\rho z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]dS,$$

$$\rho z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]dS.$$

故

$$M_x = \rho\iint\limits_{(S)} z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]dS,$$

$$M_x = \rho\iint\limits_{(S)} z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]dS,$$

$$M_x = \rho \iint\limits_{(S)} z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]dS.$$

由 Остроградский 公式可知,

$$M_x = \rho \iiint\limits_{(v)} \left[\frac{\partial z(z-\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial z(y-\eta)}{\partial z}\right]dV = \rho \iiint\limits_{(v)} (\eta - y)dV$$

$$= \rho\left[\eta V - \iiint\limits_{(v)} y\,dV\right] = 0.$$

类似可得

$$M_y = M_z = 0.$$

故得著名的阿基米德原理,液体对浸入液体的物体作用一力,該力等于立体排出的液体的重量,这一力作用于立体的重心且垂直向上.

例 3. 取 (l) 为圓周 $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, 依逆时針而行, 曲面为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z>0)$ 的上側, $P=x^2y^3$, $Q=1$, $R=z$. 試驗証 Stokes 公式.

一方面

$$\int_{(l)} x^2y^3\,dx + dy + z\,dz = \int_{(l)} x^2y^3\,dx = -a^6\int_0^{2\pi}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{8}a^6,$$

另一方面

$$\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx = -3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^2y^2\,dx\,dy = -\frac{\pi}{8}a^6,$$

結果相同.

例 4. 取 (l) 是圓周

$$x = a\cos^2 t, \quad y = a\sqrt{2}\sin t\cos t, \quad z = a\sin^2 t \quad (0\leqslant t\leqslant\pi),$$

而 S 是它范围的圓, $P=y$, $Q=z$, $R=x$.

实际这一圓就是平面 $x+z=a$ 与球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 相交的部分,其半径为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

一方面

$$\int_{(l)} y\,dx + z\,dy + x\,dz = a^2\int_0^{\pi}(-\sqrt{2}\sin^2 t + 2\cos^3 t\sin t)dt = \frac{-1}{2}\sqrt{2}\,\pi a^2,$$

另一方面

$$-\iint\limits_{(S)} dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx$$

等于这个圓在各个座标平面的投影之和,但取負号. 因此等于

$$-2\cdot\pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi a^2.$$

結果一致.

§ 6. 与途径无关的曲綫积分

在所謂与途径无关的曲綫积分乃指：在某一域 (σ) 內取两点 A, B, 由 A 到 B 在 (σ) 內作一曲綫 (l), 如果积分

$$\int_{(l)} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

仅与起点 A 及終点 B 有关，而与怎样取曲綫无关，这样的情况，称为与途径无关的綫积分。

十分显然，在討論这問題之前，我們必須弄清以下几件对象：首先 (σ) 的性质，其次怎样的曲綫 (l), 最后，函数 P 与 Q 应当有些什么限制。

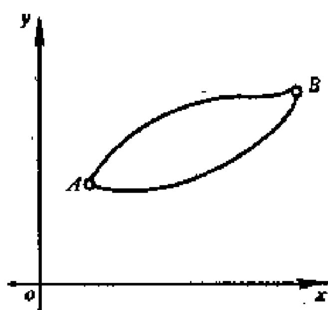


图 93

我們先討論平面上的情况，域 (σ) 是单連通域，卽如果在 σ 內有两个途径由 A 到 B, 則这两个途径所围繞的部分也在 (σ) 中。

曲綫 (l) 是指可度量的曲綫，卽有参变数表示法，$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 此处 φ, ψ 有連續微商。

并将假定 P, Q 在 (σ) 內是連續的，且是有連續偏微商的函数，我們将証明

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{1}$$

与途径无关的必要且充分条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

这一条件被称为确切微分条件。

首先証明，(1) 与途径无关的必要且充分条件是在 (σ) 中作任一封閉曲綫 (l), 則

$$\int_{(l)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

如果由两条途径 (l_1) 与 (l_2) 都从 A 到 B, 則有

$$\int_{(l_1)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(l_2)} P\,dx + Q\,dy,$$

由此可得

$$\int_{(l_1)} P\,dx + Q\,dy - \int_{(l_2)} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

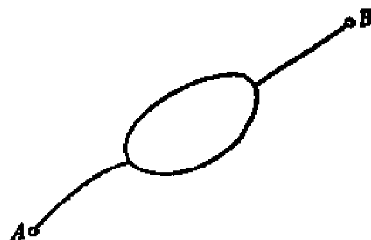


图 94

命 (l) 是一这样的一条閉綫，先沿 (l_1) 从 A 到 B, 再沿 (l_2) 从 B 到 A, 如此則得

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

由此可知，沿任何封閉綫 (l) 的积分应当等于 0。

反之，也容易証明：如果沿 (σ) 內任何封閉綫 (l) 的积分等于 0, 則綫积分 (1) 仅与

端点有关.

现在再証明：一綫积分沿任何在 (σ) 內的閉曲綫等于 0 的必要且充分条件是 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

由 Green 公式

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma,$$

所以沿封閉綫积分为 0 的条件又等价于

$$\iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0$$

(对任意域 σ). 如果

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$$

及假定 $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ 是連續的，这样，我們可以找到一点 (x_0, y_0)，在这点 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$. 假定在这点 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$，我們可以作一以 (x_0, y_0) 为中心的小圓 (σ_0)，使在 (σ_0) 中，$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geqslant c (> 0)$. 如此，則

$$\iint_{(\sigma_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma \geqslant c\sigma_0.$$

这是与假定相违背的，所以，如果积分与途径无关，則一定有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2}$$

反过来，結論更是显然.

如果条件 (2) 满足了，就有

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy = U(x, y). \tag{3}$$

保持 y 不变，作为 x 的函数，則

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx + Q\,dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy.$$

由于积分是和途径无关的，所以

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)dx.$$

即得

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = P(x, y). \tag{4}$$

同法，可証

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x, y). \tag{5}$$

所以

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=P\,dx+Q\,dy.$$

这說明了,滿足了条件(2),則 $P\,dx+Q\,dy$ 是一个函数 $U(x, y)$ 的全微分．不难証明 $P\,dx+Q\,dy$ 的积分的一般形式是 $U(x, y)+c$．其証明是,如果

$$dU=dU_1=P\,dx+Q\,dy,$$

則 $d(U_1-U)=0$．但如果一函数的微分恆等于 0,則这函数对所有的自变数的偏微商都等于 0．所以这函数是常数．当然

$$\int_{(A)}^{(B)}P\,dx+Q\,dy=\int_{(A)}^{(B)}dU=U(B)-U(A).$$

反之,如果有一函数 U_1, 使

$$dU_1=P\,dx+Q\,dy,$$

則

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial U_1}{\partial y}=Q.$$

显然

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

所以使表达式 $P\,dx+Q\,dy$ 是某一函数 U 的全微分的必要且充分条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

如此,則 U 由公式

$$U(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}P\,dx+Q\,dy+C$$

給出．

§7. 多 連 通 域

如果 (σ) 并不适合上节的条件,由上节的推理可見,我們不能利用 Green 公式,因为閉曲綫所范围的域可能不在 (σ) 中．

关于 (σ) 的条件也可以述之为,在这区域 (σ) 上画出的任何一个封閉曲綫,可以連續地收縮成一点而不出这区域．換言之,就是这个区域沒有洞．如图 95 阴影所指的区域便

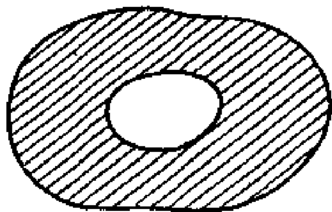


图 95

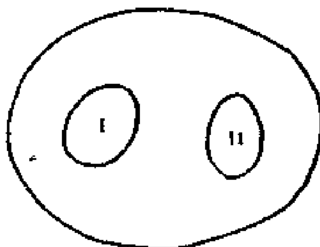


图 96

是有洞的区域，为簡单起見，现在研究一个有两个洞的区域 (σ)，如图 96，即在一个单連通区域中挖去两块 (I) 与 (II) 的情况．假定在这个区域 (σ) 上也满足确切微分条件，在这样的区域上取一封閉曲綫 (l_1)．如果其内沒有洞，則 Green 公式还是适用的，即它的积分等于 0．現在取另一封閉曲綫 (l_2)，其中包有 (I)，則 Green 公式不适用．所以并不能得出結論，沿 (l_2) 的积分等于 0，并且以后将看到的确有时非 0．

但是如果 (l_1) 与 (l_2) 都是繞包有 (I)，而不包有 (II) 的閉曲綫(图 97)，則我們可以用輔助綫段 $\overline{ab}$，把这两曲綫連在一起，如此我們得到一个閉曲綫，先从 b 点起沿 (l_1) 走(正向)一圈，再由 b 到 a，再沿 (l_2) 走(反向)一圈，再由 a 到 b，在这样的区域上 Green 公式可用，所以

$$\int_{(l_1)}+\int_{(ba)}-\int_{(l_2)}+\int_{(ab)}=0,$$

这儿沿 (a, b) 与沿 (b, a) 的积分是取方向相反的，可以抵消掉的，因而得出

$$\int_{(l_1)}=\int_{(l_2)}.$$

換言之，如果 (l_1) 与 (l_2) 都仅包有一洞 (I)，則其积分数值相等．

所以，洞 (I) 对应于一个确定的常数 ω_1，它等于沿任何繞洞 (I) 而不繞洞 (II)，在 (σ) 内的封閉曲綫的积分，称 ω_1 为循环常数．

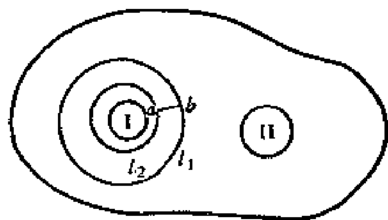


图 97

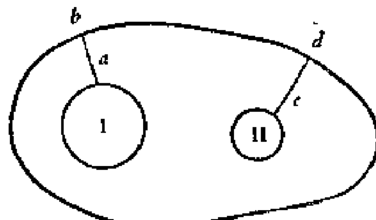


图 98

同理，洞 (II) 也对应于另一常数 ω_2．

如图 98，我們作两割綫 (a, b) 与 (c, d)，如此所得出的新区域是沒有洞的，因而

$$U(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx+Q\,dy.$$

但是在割綫 (a, b) 的相对两側这函数相差一个数值 ω_1，而在 (c, d) 的两側函数相差一个数值 ω_2，如果去掉割綫，回到原来的区域，則 $U(x, y)$ 不是一单値函数，而是一多值函数．繞 (I) 一周多加一个 ω_1，繞 (II) 一周多加一个 ω_2，所以函数含有不定項

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2$$

这儿 m_1, m_2 是整数．

以上的討論当然也适合于多洞的情况，这样的区域称为多連通域．洞的数目加 1 称为連通数，例如，无洞域的連通数等于 1．$\omega_1, \omega_2, \cdots$ 称为周期．

例． 取定义于两个以原点为中心的同心圓之間的区域 (σ) 上的函数

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

命

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

则得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

取 (l) 为以原点为中心、a 为半径的圆周 $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, 則

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(l)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

因此在所給区域 (σ) 上有一个洞,循环常数为 2π, 注意洞的半径可以是一个任意小的数。事实上,在 $(0, 0)$ 这一点, P, Q 都是不定的。

§ 8. 空間与路径无关的曲綫积分

我們現在考慮

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{1}$$

也是先假定在一单連通区域 (v), 而 (l) 是其中的一条封閉曲綫. 現在求出对任意 (l), 这积分等于 0 的条件.

前用 Green 定理,現在用 Stokes 定理,可得充分且必要的条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{2}$$

如果这些条件滿足了,这定义出一个函数 $U(x, y, z)$,

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

完全与以前一样,推得

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

而

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

及

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(B) - U(A).$$

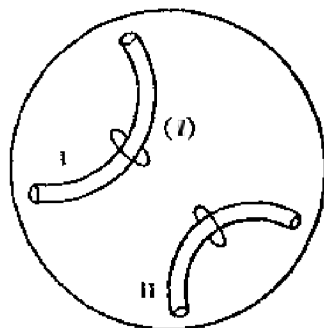


图 99

关于空間多連通域有以下的說明.

首先两个同心球之間的部分是单連通而不是多連通,一个环是多連通而不是单連通.

我們考慮一个区域 (v), 它由一个球的內部組成, 其中挖去两个管子 (I) 与 (II), 这两个管穿通球面,如图 99 所示. 若取一繞管 (I) 的封閉曲綫 (l_1), 則不可能在 (v) 內連續

地收縮成为一点． 一般説来、沿繞管子 (I) 的任意封閉的曲綫的积分不等于 0，命之为 ω_1，沿繞管子 (II)的任意封閉的曲綫的积分命之为 ω_2；如此則得 $U(x, y, z)$ 是一个多值函数，它們的值的差等于

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

此处 m_1, m_2 是整数．

§9. 流体的穩定流动

我們現在假定流体是均匀的不可压縮的，并且假定它的流动是平面性的，也就是有一平面，其上每一点的流向都在这平面上，而且在垂直于这平面的直綫上，每一点的流速和流向都是相同的．这样，我們就可以把这問題看做一个平面問題． 我們又假定是沒有时間因素的，即在一点的流速流向仅与此点有关，而与时間无关．

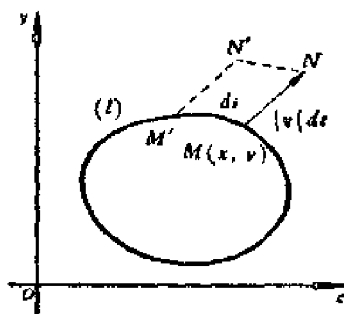


图 100

取这平面为 xy 平面，在一点 $M(x, y)$ 的流体質点的速度矢量是 $\mathbf{v} = (u, v)$，把边界綫 (l) 分为若干小段，命 $MM' = ds$ 为其中的一段． 由于我們取得 ds 很小，所以可以假定它在 ds 上每一点的流速是近似的，在非常短的时間中，ds 上所有的点在向量 $\mathbf{v}$ 的方向移动一段 $|\mathbf{v}|dt$．而达到的位置是 NN'，平行四边形 $MNN'M'$ 的面积等于

$$|\mathbf{v}|dt \cdot ds\cos(\mathbf{v}, \mathbf{n}), \tag{1}$$

这儿 $\mathbf{n}$ 代表 (l) 的外向法綫方向，用 $\mathbf{s}$ 記曲綫 (l) 逆时針方向的切綫方向，就有

$$(\mathbf{n}, x) = (\mathbf{s}, y); \quad (\mathbf{n}, y) = \pi - (\mathbf{s}, x)$$

(所用的符号 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是指由矢量 $\mathbf{a}$ 到矢量 $\mathbf{b}$ 的夹角)，所以

$$\cos(\mathbf{n}, x) = \cos(\mathbf{s}, y), \quad \cos(\mathbf{n}, y) = -\cos(\mathbf{s}, x).$$

从余弦和角公式得

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{v}, \mathbf{n}) &= \cos(\mathbf{v}, x)\cos(\mathbf{n}, x) + \cos(\mathbf{v}, y)\cos(\mathbf{n}, y)\\ &= \cos(\mathbf{v}, x)\cos(\mathbf{s}, y) - \cos(\mathbf{v}, y)\cos(\mathbf{s}, x),\end{aligned}$$

并且注意

$$|\mathbf{v}|\cos(\mathbf{v}, x) = u, \quad |\mathbf{v}|\cos(\mathbf{v}, y) = v$$

是速度矢量在 x, y 軸上的投影，由 (1) 可知

$$MNN'M' \text{的面积} = |\mathbf{v}|ds\cos(\mathbf{v}, \mathbf{n})dt$$

$$= |\mathbf{v}|(\cos(\mathbf{v}, x)\cos(\mathbf{s}, y) - \cos(\mathbf{v}, y)\cos(\mathbf{s}, x))ds\,dt$$
$$= (u\cos(\mathbf{s}, y)ds - v\cos(\mathbf{s}, x)ds)dt$$
$$= (-v\,dx + u\,dy)dt.$$

如果 $(\mathbf{v}. \mathbf{n})$ 是鈍角，面积 $MNN'M'$ 是負的，这便代表流入曲綫 (l) 的情形. 在时間 dt 內，流过界綫 (l) 的全部流量是

$$\sum (-v\,dx + u\,dy)dt \to \left(\int_{(l)} -v\,dx + u\,dy\right)dt.$$

在单位时間中的总量等于

$$\int_{(l)} (-v\,dx + u\,dy),$$

式中 (l) 是封閉的，而且沿逆时針方向求积分. 当流向沿外法綫方向时，流量为正；反向时，流量为負.

如果界綫 (l) 內沒有泉源，也沒有滲井（即 (l) 內不会流出水量或減少水量），則得

$$\int_{(l)} (-v\,dx + u\,dy) = 0.$$

因此，在一个区域 (σ) 內，旣无泉源又无滲井，則对其中任一閉曲綫 (l)，常有

$$\int_{(l)} -v\,dx + u\,dy = 0. \tag{2}$$

由确切微分的条件可知，

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

这是不可压縮流的特征. 表达式

$$-v\,dx + u\,dy$$

也应是一个函数 $\psi(M)$ 的全微分，且

$$\psi(B) - \psi(A) = \int_A^B (-v\,dx + u\,dy).$$

这个函数 $\psi(M)$ 叫做**流函数**，它的物理意义是：单位时間沿一曲綫由 A 到 B 的流量，这是与曲綫无关的.

如果有一个泉源存在，則除去这一洞外，以上的条件依然适合. 积分繞洞一周便是这泉源放出的流量 $q > 0$，因而 $\psi(M)$ 是多值的. 有滲井的情况也是一样，仅須注意滲井吸入的流量 $q < 0$.

除积分 (2) 以外，我們还考虑积分

$$\int_{(l)} u\,dx + v\,dy.$$

这个量称为沿界綫 (l) 的速度环流. 假設沿任何封閉曲綫速度环流都等于 0，这表示沒

有涡流的流动．在这样的情况下，有函数 $\varphi(M)$ 存在，使

$$\varphi(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u\,dx+v\,dy,$$

而

$$u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

由函数 $\varphi(x, y)$ 可求出速度的支量，因此这函数称为**速度势**，如果有涡旋中心，则 φ 不是单值的．以上的积分表示**旋涡的强度**．

把流函数与速度势函数的关系合拼起来，

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=-v=-\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{3}$$

这方程称为 Cauchy-Riemann 方程．

由这方程立刻可以看出

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}=0,$$

所以速度势函数适合于 Laplace 方程．

第十七章　純量場与矢量場

§1. 定　　义

在空間或空間的某一区域中的每一点 (x, y, z) 都定义的函数 $\varphi(x, y, z)$ 称为該点的純量，整个儿定义一个**純量場**.

例如，每一点有一定的溫度，所以溫度就定义一个純量場；电場中每一点有一定的电位，因此，电位場也是一个純量場；地图上每一点都有它的高度，因此，高度便定义一个平面上的純量場.

实質上，純量場幷不是什么新东西，而是三个(或两个)变数的函数而巳.

如果不特别声明，我們常假定函数 φ 是有連續偏微商的，幷且假定沒有使三个偏微商同时等于 0 的点(如有則称为奇点). 由方程

$$\varphi(x, y, z) = c \quad (c\ \text{常数}) \tag{1}$$

所确定的曲面称为等量面(等溫面，等电位面，等高綫等都是例子). 显然，在所考察的区域內的每一点，有一个而且仅有一个等量面通过，也就是 $\varphi(x, y, z)$ 是点 (x, y, z) 的单值函数. 因此等量面与另一等量面是无交点的.

若在空間或空間的某一区域中的每一点都定义一矢量，則这些矢量的总合定义一**矢量場**，也就是依賴于 x, y, z 的矢量函数

$$\mathbf{R}(x, y, z) = (X(x, y, z),\quad Y(x, y, z),\quad Z(x, y, z)). \tag{2}$$

如果不另外声明，我們假定 X、Y、Z 都是有連續偏微商的. 有时，以 $\mathbf{r}$ 表 (x, y, z)，則得矢量 $\mathbf{r}$ 为变数的矢量函数，而 $\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \mathbf{R}(x, y, z)$.

通过一点的等量面的法綫方向是

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{3}$$

这矢量称为純量場 $\varphi(x, y, z)$ 在該点的**梯度**，以

$$\operatorname{grad}\varphi \quad \text{或} \quad \operatorname{del}\varphi$$

表之. 因此，从一个純量場 $\varphi(x, y, z)$ 可以作出一个矢量場 $\operatorname{grad}\varphi$ 来.

反之，幷非任何一个矢量場 (X, Y, Z) 都可以看成为一純量場的梯度. 如果如此，則必有一函数 φ 使

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = X,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Y,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = Z. \tag{4}$$

由第 §16.8 的結果知道，有 φ 存在的必要且充分条件是

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},\quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y},\quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \tag{5}$$

由純量場求梯度所得出的矢量場称为守恆矢量場，而 $\varphi(x, y, z)$ 称为这矢量場的勢函数(或位函数). 条件(5)是矢量場 $\mathbf{R}$ 守恆的必要且充分条件.

由(5)引出一矢量

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

这矢量称为矢量 $\mathbf{R}$ 的渦度或旋量，以

$$\operatorname{rot}\mathbf{R} \text{ 或 } \operatorname{curl}\mathbf{R}$$

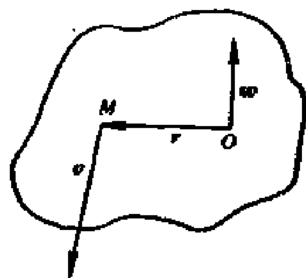
表之. 因此，矢量場 $\mathbf{R}$ 守恆的必要且充分的条件是渦度为零；也易見由純量場求梯度所获得的矢量場的渦度处处为 0. 渦度所表的矢量也成一矢量場.

我們还定义一个矢量(X, Y, Z)的散度

$$\operatorname{div}\mathbf{R}=\operatorname{div}(X, Y, Z)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

例（刚体运动）. 在刚体上取一点 O. 在运动学中已經証明（或由第二章补充的結論），任何时刻刚体上一点 M 的速度矢量 $\mathbf{v}$ 可以从公式

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}^0+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$



求出，其中 $\mathbf{v}^0$ 是 O 点的前进速度，$\boldsymbol{\omega}$ 是瞬时“角速度”，而 $\mathbf{r}$ 是 O 与 M 的位置矢量. 这矢量成一矢量場，它的支量是

$$v_x^0+\omega_y z-\omega_z y,\quad v_y^0+\omega_z x-\omega_x z,\quad v_z^0+\omega_x y-\omega_y x.$$

它的渦度是

$$\left(\frac{\partial(v_z^0+\omega_x y-\omega_y x)}{\partial y}-\frac{\partial(v_y^0+\omega_z x-\omega_x z)}{\partial z}, \frac{\partial(v_x^0+\omega_y z-\omega_z y)}{\partial z}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial(v_z^0+\omega_x y-\omega_y x)}{\partial x}, \frac{\partial(v_y^0+\omega_z x-\omega_x z)}{\partial x}-\frac{\partial(v_x^0+\omega_y z-\omega_z y)}{\partial y}\right). \qquad (6)$$

如果 $\mathbf{v}^0$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 与 x, y, z 无关，則式(6)取值 $2(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$，即渦度为“角速度”的倍数. 这就是渦度也称为旋量的道理.

§2. 三种算子的性質

散度，梯度，渦度都是綫性算子，也就是把它們运用在一綫性組合上，仍然得出相仿的綫性組合，即

$$\operatorname{div}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda\operatorname{div}\mathbf{a}+\mu\operatorname{div}\mathbf{b}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{grad}(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda\operatorname{grad}\varphi+\mu\operatorname{grad}\psi, \qquad (2)$$

$$\operatorname{rot}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda\operatorname{rot}\mathbf{a}+\mu\operatorname{rot}\mathbf{b}, \qquad (3)$$

这儿 λ, μ 是任意的常数.

又关于各种乘积有以下的公式：

首先两函数之积的梯度

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\left(\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x}, \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial y}, \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial z}\right)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi. \qquad (4)$$

函数φ的函数F的梯度等于

$$\operatorname{grad} F(\varphi)=\left(\frac{\partial F(\varphi)}{\partial x}, \frac{\partial F(\varphi)}{\partial y}, \frac{\partial F(\varphi)}{\partial z}\right)=F'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi. \tag{5}$$

二矢量$\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$的內积的梯度等于

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}), \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}), \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\right)\\&=\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}\right)\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{b}\right), \left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}\right)\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{b}\right),\right.\\&\left.\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}\right)\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{b}\right)\right)=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{b}+\\&+\left(b_x\frac{\partial}{\partial x}+b_y\frac{\partial}{\partial y}+b_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}.\end{aligned} \tag{6}$$

函数φ乘矢量$\mathbf{a}$的散度是

$$\operatorname{div}\varphi\mathbf{a}=\frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial z}=\varphi\operatorname{div}\mathbf{a}+\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{a}. \tag{7}$$

两矢量$\mathbf{a}, \mathbf{b}$的外积的散度为

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=\frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z-a_zb_y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x-a_xb_z)+\frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y-a_yb_x)\\&=-a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)-a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)-a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\\&\quad+b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\\&=\mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}.\end{aligned} \tag{8}$$

函数乘矢量的渦度是

$$\operatorname{rot}\varphi\mathbf{a}=\varphi\operatorname{rot}\mathbf{a}+\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{a}. \tag{9}$$

二矢量之外积的渦度是

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b}=&\left(b_x\frac{\partial}{\partial x}+b_y\frac{\partial}{\partial y}+b_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{a}\\&-\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{b}\\&+(\operatorname{div}\mathbf{b})\mathbf{a}-(\operatorname{div}\mathbf{a})\mathbf{b}.\end{aligned} \tag{10}$$

§3. 三种算子的迭用

运算$\operatorname{grad}\varphi$把一純量場变为矢量場，运算$\operatorname{div}\mathbf{R}$把一矢量場变为純量場，而运算$\operatorname{rot}\mathbf{R}$复把一矢量場变为矢量場．这三种运算的迭用可得以下的一些公式．

首先易証

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{R}=0 \tag{1}$$

及

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0. \tag{2}$$

其次，

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{3}$$

$$=\Delta\varphi(\text{Laplace 算子}).$$

最后由于

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{R}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right)$$

及

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{R}=\operatorname{rot}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial z},\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y\partial x},\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 X}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial z\partial y}\right),$$

相減可得

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{R}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{R}=\Delta\mathbf{R}. \tag{4}$$

§4. 梯度的几何意义

命 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 代表一单位矢量，它与 $x,\ y,\ z$ 軸的夹角各为 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. 函数 $\varphi(x,\ y,\ z)$ 在某一点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的微商是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{l}}=\left[\frac{d}{dt}\varphi(x+t\cos\alpha,\ y+t\cos\beta,\ z+t\cos\gamma)\right]_{t=0}$$

$$=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{t=0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{t=0}\cos\beta+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{t=0}\cos\gamma=\boldsymbol{l}\cdot\operatorname{grad}\varphi, \tag{1}$$

即等于矢量 $\boldsymbol{l}$ 与 φ 的梯度的內积，有时还記之为 $\operatorname{grad}_l\varphi$.

由 Schwarz 不等式

$$\boldsymbol{l}\cdot\operatorname{grad}\varphi\leqslant\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}, \tag{2}$$

上式仅当 $\boldsymbol{l}$ 与梯度 $\operatorname{grad}\varphi$ 平行且同向时取等号，也就是純量 $\varphi(x,\ y,\ z)$ 增长最快的方向与梯度所指的方向一致，而且增长率等于梯度矢量的长度，即

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

也就是沿等量面的法綫方向，純量 $\varphi(x,\ y,\ z)$ 增长得最快，而与之相反的方向，降得最快.

可以把一个綫积分写成为

$$\int_\Gamma X(x,\ y,\ z)dx+Y(x,\ y,\ z)dy+Z(x,\ y,\ z)dz$$

$$= \int_\Gamma (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\, ds$$

$$= \int_\Gamma \mathbf{R}\cdot \boldsymbol{l}\, ds,$$

这儿 $\boldsymbol{l}$ 是曲綫 Γ 的切綫方向.

如果 $(X, Y, Z) = \operatorname{grad}\varphi$, 則积分仅与曲綫的两端点 A, B 有关, 即

$$\int_\Gamma \operatorname{grad}\varphi\cdot \boldsymbol{l}\, ds = \int_\Gamma \operatorname{grad}_l \varphi\, ds = \varphi(B) - \varphi(A).$$

若 Γ 为閉曲綫, 則积分为零.

例 1. 命

$$\mathbf{R} = (xy, z, -xyz),$$

則沿积分途径

$$\Gamma_1:\ x = t,\quad y = t^2,\quad z = t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

的綫积分之値为

$$\int_0^1 (t^3 dt + t\,dt^2 - t^4 dt) = \frac{43}{60},$$

沿

$$\Gamma_2:\ x = t,\quad y = t,\quad z = t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

的綫积分之値为

$$\int_0^1 (t^2 + t - t^3)\, dt = \frac{7}{12}.$$

上述都是由 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$ 的积分, 但因路綫不同, 故而数値不等. 其原因在于

$$\frac{\partial X}{\partial y} = x \ 与\ \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

不等. 因此, $\mathbf{R}$ 所定义的矢量場不是守恆的.

例 2. 假定在原点有一質量为 m 的質点, 研究由这一質点所产生的引力場.

在 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 处有一单位質量, 以上質点对这点的引力是

$$\mathbf{F} = -\frac{m}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

$\left(\text{Newton 定理: 引力大小是 } \dfrac{m}{|\mathbf{r}|^2}, \text{方向是 } -\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right)$, 这儿 $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 显然有

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}\frac{m}{|\mathbf{r}|},$$

即

$$\frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

是这引力場 $\mathbf{F}$ 的势函数.

更广泛些，不难証明：如果 $\varphi(x, y, z)$ 是 $|\mathbf{r}|$ 的函数，卽球面是等量面，則梯度

$$\operatorname{grad} \varphi(|\mathbf{r}|) = \varphi'(|\mathbf{r}|) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

与半径同向或反向，視 $\varphi'(|\mathbf{r}|) > 0$ 或 < 0 而定。

例 3. 如果 n 个質点各在 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 处，且各有質量 $m_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，則作用于 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 点的单位質量的力是

$$\mathbf{F} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

这引力場也是守恆的，其势函数等于

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

例 4. 更一般些，如有物質以密度 $\rho(x, y, z)$ 分布于空間的一部分 V，这批物質作用于 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 点的单位質量的力等于

$$\mathbf{F} = -\iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_1)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} dV,$$

这儿积分的变数是 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 过空間的一部分 V。

这样定义的引力場也是守恆的，其势函数为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} dV.$$

单位質量由 A 到 B 沿一曲綫运动所做出的功等于

$$\int_{(A)}^{(B)} X dx + Y dy + Z dz = \varphi(B) - \varphi(A).$$

§5. Остроградский-Gauss 公式、Stokes 公式的矢量表达形式

上章所講的 Остроградский-Gauss 公式是：

命 S 是包有空間的一部分 V 的周界曲面，在 V 及其周界 S 上都假定 $X(x, y, z)$，$Y(x, y, z)$，$Z(x, y, z)$ 有連續偏微商，在 S 上的一点，命 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 表曲面 S 在該点的向外的法綫方向单位矢量，則有

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_S (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma) dS.$$

这公式显然可以表成为

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R} dV = \iint_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{R} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

这儿 $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ 而 $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}\, dS$。

Stokes 公式的原来形式是：

命 S 表一定向曲面的一側，l 表曲面的閉周界曲綫。假定 S 的每一点有切平面，其方向連續地依賴于曲面上的点（或更广泛些，S 可以划分为有限片这样的曲面）；并假定周界

綫 l 上的每一点皆有切綫方向(或者可以分为有限段这样的曲綫), 又 $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ 在曲面 S 上所有的点以及与 S 足够靠近的点都是有連續偏微商的連續函数,如此則

$$\int_{(l)} Xdx + Ydy + Zdz$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS,$$

这儿 $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是曲面 S 的法綫方向. 注意曲面 S 是单側的, 法綫方向是在同側的.

这个公式用矢量符号表示如下:

$$\int_{(l)} \mathbf{R}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{2}$$

Остроградский 公式最常用的一个特例是

$$\mathbf{R} = \varphi \operatorname{grad}\psi.$$

由公式 (2.7) 及公式 (3.3) 可知,

$$\operatorname{div}\mathbf{R} = \varphi \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi$$
$$= \varphi\Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi,$$

即得

$$\iiint_V (\varphi\Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi)\,dV = \iint_S \varphi\operatorname{grad}\psi\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

由于 $\operatorname{grad}\psi\cdot n$ 是函数 ψ 沿外法向的微商,即 $\frac{d\psi}{dn}$, 所以得出

$$\iint_S \varphi\frac{d\psi}{dn}dS = \iiint_V \varphi\Delta\psi\,dV + \iiint_V \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi\,dV. \tag{3}$$

交换 φ, ψ 而相减得

$$\iint_S \left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right)dS = \iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV \tag{4}$$

或

$$\iint_S (\varphi\operatorname{grad}\psi - \psi\operatorname{grad}\varphi)\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dV.$$

例 1. 取原点有质量为 m 的引力場

$$\mathbf{R} = m\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3.$$

求积分

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

由 Остроградский 公式可知，我們应当計算

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R}\, dV,$$

这儿

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = m\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=0.$$

由此幷不能說明这积分等于 0，因为上式当 $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ 时正确，但在原点，$\mathbf{R}$ 幷不連續，因而 $\operatorname{div} \mathbf{R}$ 在原点无定义．由此只能証明：如果 S 不包有原点，則

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{R} dV = 0.$$

如果 S 包有原点，以原点为中心作一以 ε 为半径的小球，球面以 Σ 表之．从 V 中挖去小球所余的部分以 V' 表之，因此，公式仍然可用，因而

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\sigma + \iint_\Sigma \mathbf{R}\cdot d\sigma = \iiint_{V'} \operatorname{div} \mathbf{R}\, dV = 0,$$

卽得

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\sigma = -\iint_\Sigma \mathbf{R}\cdot d\sigma.$$

在 Σ 上

$$d\sigma = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}dS,$$

如此則

$$\iint_\Sigma \mathbf{R}\cdot d\sigma = m\iint_\Sigma\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\right)dS$$

$$= -\frac{m}{\varepsilon^2}\iint_\Sigma dS = -4\pi m.$$

卽得

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot d\sigma = 4\pi m.$$

例 2（Laplace 方程解的唯一性）．命 V 是一区域，在 V 上 φ, ψ 是 Laplace 方程

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

的两个解，而且在包有 V 的边界 S 上 $\varphi = \psi$．求証：在 V 的內部也有 $\varphi \equiv \psi$（假定解在 V 及 S 上是有两阶偏微商的連續函数）．

命 $\theta = \varphi - \psi$，則 θ 仍然是 Laplace 方程的解，并且在 S 上 $\theta = 0$．問題变为求証在 V 的內部 $\theta \equiv 0$．在公式(3)中取 $\varphi = \psi = \theta$，則得

$$0 = \iiint_V\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2\right]dV.$$

积分号下是非負的連續函数，因此在 V 中

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,$$

所以θ是常数．由θ在S上等于0及其連續性可知$\theta\equiv 0$．

例3（解 Laplace 方程的一个方法）． 求出函数φ，使其在V内适合 Laplace 方程

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$

而在V的边界S上，φ及其外法向微商$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$是已知函数．

在公式(4)中取$\psi=\dfrac{1}{r}$，而r是由一定点P(V内的)到任意点$Q=(x,y,z)$的距离．但注意这函数在定点P不連續，因此不能直接运算公式(4)．以P为中心，ε为半径作一小球，以Σ表此球面，以V'表V挖去此小球后的区域．由于在V'中φ与$\psi=\dfrac{1}{r}$都适合 Laplace 方程，因此由公式(4)可知

$$\iint_S\left(\varphi\operatorname{grad}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi\right)\cdot d\sigma=\iint_\Sigma\left(\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi-\varphi\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)\cdot d\sigma.$$

讀者自証，当$\varepsilon\to 0$时

$$\iint_\Sigma\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi\,d\sigma\to 0$$

及

$$\iint_\Sigma\varphi\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,d\sigma\to-4\pi\varphi(x,y,z).$$

因此得出

$$\varphi(x,y,z)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\varphi(x_1,y_1,z_1)\operatorname{grad}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi(x_1,y_1,z_1)\right)\cdot d\sigma,$$

这儿$r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$．这就是說，如果在$S$上給了$\varphi$及$\dfrac{d\varphi}{dn}$的函数值，則 Laplace 方程的解答由以上的积分表出（不难証明，它适合于 Laplace 方程．但并未証明，当(x,y,z)趋于边界S时，φ及$\dfrac{d\varphi}{dn}$恰好就是所給的函数值）．

習題． 用 Остроградский 公式算出

$$\iint_S(xy\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+yz\,dx\,dy),$$

此处S是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$．

§6. Nabla 算子

我們仍用

$$\mathbf{i}=(1,0,0),\quad\mathbf{j}=(0,1,0),\quad\mathbf{k}=(0,0,1)$$

代表三个相互垂直的矢量．显然有

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0;$$

及

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0,$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},\ \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}.$$

任一矢量可以写成为

$$(a,\ b,\ c)=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}.$$

Nabla 算子或称 Hamilton 算子，記之为

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

∇ 也可以看成为以微分符号 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ 为支量的矢量．

利用这个符号，我們可以算出

$$\operatorname{grad} U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}=\nabla U; \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{v}&=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\\&=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{i}v_x+\mathbf{j}v_y+\mathbf{k}v_z)=\nabla\cdot\mathbf{v};\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{v}&=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\\&=\nabla\times\mathbf{v}\end{aligned} \tag{3}$$

及

$$\Delta U=\nabla\cdot(\nabla U)(=\nabla^2 U). \tag{4}$$

又已知

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

如果 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$，則行列式等于 0．我們也有

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v})=0. \tag{5}$$

又 $\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{a})=0$，我們也有

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U=\nabla\times(\nabla U)=0. \tag{6}$$

Nabla 算子的运用法則如下：

i）綫性的，也就是如果 $a_1,\ \cdots,\ a_n$ 是常数，則

$$\nabla(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)=a_1\nabla X_1+\cdots+a_n\nabla X_n;$$

ii）如果把 ∇ 用在乘积上（乘积的因子可以是函数或矢量，乘法可以是普通的乘，内乘

和外乘，只要乘出来有意义)，其結果等于在每一因子上各作用一次然后再求总和，卽如

$$\nabla(XYZ) = \nabla(\overset{\downarrow}{X}YZ) + \nabla(X\overset{\downarrow}{Y}Z) + \nabla(XY\overset{\downarrow}{Z}),$$

这儿$\downarrow$表示∇用在指定的因子上．在实际計算时，不加此符号．

例 1. $$\begin{aligned}\operatorname{div}(U\mathbf{v}) &= \nabla\cdot(U\mathbf{v})\\ &= \nabla\cdot(\overset{\downarrow}{U}\mathbf{v}) + \nabla\cdot(U\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}) = \nabla U\cdot\mathbf{v} + U\nabla\cdot\mathbf{v}\\ &= \operatorname{grad} U\cdot\mathbf{v} + U\operatorname{div}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

例 2. $$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2) &= \nabla\cdot(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)\\ &= \nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\mathbf{v}_1}\times\mathbf{v}_2) + \nabla\cdot(\mathbf{v}_1\times\overset{\downarrow}{\mathbf{v}_2}) = \mathbf{v}_2\cdot(\nabla\times\mathbf{v}_1) - \mathbf{v}_1\cdot(\nabla\times\mathbf{v}_2)\\ &= \mathbf{v}_2\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}_2\end{aligned}$$

例 3. $$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) &= \nabla(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\\ &= \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{v}_1}\cdot\mathbf{v}_2) + \nabla(\mathbf{v}_1\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{v}_2})\\ &= (\mathbf{v}_2\cdot\nabla)\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\times(\nabla\times\mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_1\cdot\nabla)\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\times(\nabla\times\mathbf{v}_2)\\ &= (\mathbf{v}_2\cdot\nabla)\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1\cdot\nabla)\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

(这儿用了 $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} + \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$)．

§7. 曲綫坐标及换变数

假定

$$x = f(\xi,\eta,\zeta),\quad y = g(\xi,\eta,\zeta),\quad z = h(\xi,\eta,\zeta) \tag{1}$$

把(ξ,η,ζ)空間的一个区域$\mathfrak{D}$一一地且連續地变为(x,y,z)空間的一个区域D，并且假定f,g,h都有連續偏微商．因为是一一对应，則由(1)可解得

$$\xi = \varphi(x,y,z),\quad \eta = \psi(x,y,z),\quad \zeta = \chi(x,y,z); \tag{2}$$

再假定φ,ψ,χ也有連續偏微商，微分(1)式得

$$dx = \frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial x}{\partial\zeta}d\zeta,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial y}{\partial\zeta}d\zeta,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial\eta}d\eta + \frac{\partial z}{\partial\zeta}d\zeta,$$

或逆变换

$$d\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy + \frac{\partial\xi}{\partial z}dz,$$

$$d\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy + \frac{\partial\eta}{\partial z}dz,$$

$$d\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial x}dx + \frac{\partial\zeta}{\partial y}dy + \frac{\partial\zeta}{\partial z}dz.$$

沿dx、dy、dz方向的单位矢量就是$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$，从而沿$d\xi$，$d\eta$，$d\zeta$方向的单位矢量应当

是

$$\mathbf{e}_\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2},$$

$$\mathbf{e}_\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\mathbf{k}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2},$$

$$\mathbf{e}_\zeta = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\mathbf{k}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2}.$$

如此，可以把一个由(x, y, z)坐标系所表达的矢量用(ξ, η, ζ)坐标系来表达，即

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = v_\xi\mathbf{e}_\xi + v_\eta\mathbf{e}_\eta + v_\zeta\mathbf{e}_\zeta.$$

这是由(ξ, η, ζ)坐标系所表达的形式，也就是

$$v_x = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} v_\xi}{\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2}} + \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} v_\eta}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} + \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x} v_\zeta}{\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2}},$$

$$v_y = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y} v_\xi}{\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2}} + \frac{\frac{\partial \eta}{\partial y} v_\eta}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} + \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial y} v_\zeta}{\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2}},$$

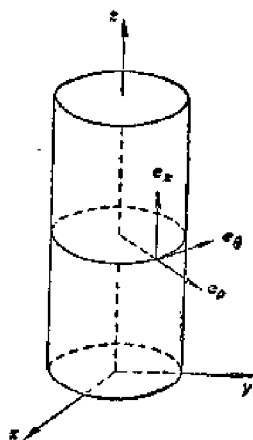
$$v_z = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} v_\xi}{\sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2}} + \frac{\frac{\partial \eta}{\partial z} v_\eta}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} + \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial z} v_\zeta}{\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2}}.$$

以柱坐标

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = z$$

为例，我們有

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j},$$



$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

由此即得从柱坐标到直角坐标的变换公式：

$$v_x = v_\rho\cos\theta - v_\theta\sin\theta,$$

$$v_y = v_\rho\sin\theta + v_\theta\cos\theta,$$

$$v_z = v_z.$$

反之，由直角坐标到柱坐标的公式是

$$v_\rho = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta,$$

$$v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta,$$

$$v_z = v_z.$$

因为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\theta, & \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{-\sin\theta}{\rho}, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\theta, & \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{\rho}, \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \mathbf{i}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \sin\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \mathbf{j}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \cos\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z} = \tilde{\nabla}, \end{aligned}$$

这儿 $\tilde{\nabla}$ 是柱坐标的 Nabla 算子.

又因 $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ 是活动坐标架的单位向量，它們是点 (ρ, θ, z) 的函数，而

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\theta} = \mathbf{e}_\theta,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\mathbf{e}_\rho,\quad \frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\rho} = \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\rho} = \frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\rho} = \frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial z} = \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial z} = $$

$$= \frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial z} = \frac{\partial\mathbf{e}_z}{\partial\theta} = 0,$$

则得

$$\operatorname{grad} U = \tilde{\nabla}U = \mathbf{e}_\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{v} &= \tilde{\nabla}\cdot\mathbf{v} \\ &= \left(\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_\rho\mathbf{e}_\rho + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_z\mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial v_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

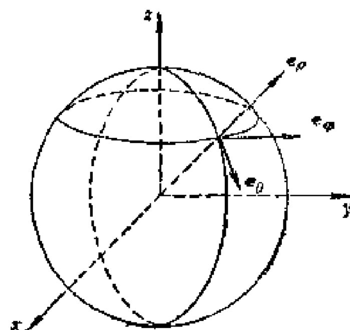
$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{v} &= \nabla\times\mathbf{v}\\
&= \left(\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(v_\rho\mathbf{e}_\rho+v_\theta\mathbf{e}_\theta+v_z\mathbf{e}_z)\\
&= \left(-\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\mathbf{e}_\theta+\frac{\partial v_\theta}{\partial\rho}\mathbf{e}_z\right)+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\mathbf{e}_\rho+\left(\frac{1}{\rho}v_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z\right)+\\
&\quad+\left(-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\mathbf{e}_\rho+\frac{\partial v_\rho}{\partial z}\mathbf{e}_\theta\right)=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho+\\
&\quad+\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\theta+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

及

$$\Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}.$$

以球坐标

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta$$



为例，我們有

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho&=\sin\theta\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\theta\sin\varphi\mathbf{j}+\cos\theta\mathbf{k},\\
\mathbf{e}_\theta&=\cos\theta\cos\varphi\mathbf{i}+\cos\theta\sin\varphi\mathbf{j}-\sin\theta\mathbf{k},\\
\mathbf{e}_\varphi&=-\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\varphi\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

于是得出由球坐标到直角坐标的公式：

$$\begin{aligned}
v_x&=v_\rho\sin\theta\cos\varphi+v_\theta\cos\theta\cos\varphi-v_\varphi\sin\varphi,\\
v_y&=v_\rho\sin\theta\sin\varphi+v_\theta\cos\theta\sin\varphi+v_\varphi\cos\varphi,\\
v_z&=v_\rho\cos\theta-v_\theta\sin\theta.
\end{aligned}$$

又由直角坐标到球坐标的公式是

$$\begin{aligned}
v_\rho&=v_x\sin\theta\cos\varphi+v_y\sin\theta\sin\varphi+v_z\cos\theta,\\
v_\theta&=v_x\cos\theta\cos\varphi+v_y\cos\theta\sin\varphi-v_z\sin\theta,\\
v_\varphi&=-v_x\sin\varphi+v_y\cos\varphi.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi, & \dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho}, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta},\\[2ex]
\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi, & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{\rho}, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta},\\[2ex]
\dfrac{\partial\rho}{\partial z}=\cos\theta, & \dfrac{\partial\theta}{\partial z}=-\dfrac{\sin\theta}{\rho},
\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}
\nabla&=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\\
&=\mathbf{i}\left[\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]+\\
&\quad+\mathbf{j}\left[\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]+
\end{aligned}$$

$$+\mathbf{k}\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]$$

$$=\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}=\overset{\approx}{\nabla},$$

这儿 $\overset{\approx}{\nabla}$ 是球坐标的 Nabla 算子.

又因

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\rho}=\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\rho}=\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\rho}=\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\theta}=0,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\theta}=\mathbf{e}_\theta,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta}=-\mathbf{e}_\rho,$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\varphi}=\sin\theta\mathbf{e}_\varphi,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi}=\cos\theta\mathbf{e}_\varphi,\quad\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-(\sin\theta\mathbf{e}_\rho+\cos\theta\mathbf{e}_\theta),$$

则得

$$\operatorname{grad}U=\overset{\approx}{\nabla}U=\mathbf{e}_\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\overset{\approx}{\nabla}\cdot\mathbf{v}=\left[\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\cdot[v_\rho\mathbf{e}_\rho+v_\theta\mathbf{e}_\theta+v_\varphi\mathbf{e}_\varphi]$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2v_\rho)\right]+\frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta)\right]+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=\overset{\approx}{\nabla}\times\mathbf{v}=\left[\mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathbf{e}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\times[v_\rho\mathbf{e}_\rho+v_\theta\mathbf{e}_\theta+v_\varphi\mathbf{e}_\varphi]$$

$$=\left[\frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\varphi)-\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\varphi)\right)\right]\mathbf{e}_\theta+\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

及

$$\Delta U=\operatorname{div}\operatorname{grad}U=\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)\right]+\frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}.$$

習題 1. 試求出

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$$

的柱坐标形式.

習題 2. 試求出

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$$

的球坐标形式.

§8. 平　面　場

我們將平面場作为例子,复习已有的結果.

定义. 一个場称为平面場,如果它适合以下的两个条件: (i) 所有的矢量平行于一个固定的平面 P; (ii)在垂直于这平面 P 的任一直綫上,每一点的矢量都相等(长短,方向).

这样的場可以用平面 P 上的矢量所成的場来表达. 在講到平面場的一个点时, 我們記住,这是指通过这点与 P 垂直的直綫. 講到平面上一个区域时 就是指以这区域为正交

截面的一个柱体.

把平面 P 作为 (x, y) 平面、場中一切矢量都取 $(v_x, v_y, 0)$ 的形式，其中 v_x, v_y 与 z 无关. 今后还假定它与 t 无关，簡单地用 (v_x, v_y) 来代表. 如此，则

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \mathbf{k}.$$

在 (x, y) 平面上取一閉曲綫 C，它包有一个区域 $\mathfrak{D}$. 現在在对应的柱体上研究 Stokes 与 Остроградский-Gauss 公式所取的形式.

首先討論 Stokes 公式

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}=\iint_{\mathfrak{D}} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

現在

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}=\left(0, 0, \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),$$

而底面的法綫方向是(0，0，1)，因此

$$d\boldsymbol{\sigma}=(0, 0, dx\, dy).$$

从而 Stokes 公式变为

$$\int_C v_x dx+v_y dy=\iint_{\mathfrak{D}}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx\, dy, \tag{1}$$

这就是 Green 公式.

習題. 求出柱面上一閉曲綫的 Stokes 公式.

再看 Остроградский-Gauss 公式

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS=\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV, \tag{2}$$

这儿 S 表柱体的表面（包括柱面和上底 $z=h$ 及下底 $z=0$），而 V 表柱体. 在上底及下底上

$$\mathbf{n}=(0, 0, 1)$$

而 $v=(v_x, v_y, 0)$，因此 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS=0$. 在柱面上，积分元素等于 $ds dz$，这儿 ds 是曲綫 C 的长度微分，而 $\mathbf{n}$ 正好是曲綫 C 的外法綫方向，即 $\left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right)$. 因此得

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}=v_x \frac{dy}{ds}-v_y \frac{dx}{ds},$$

即(2)的左边等于

$$-\int_0^h dz \int_C v_y dx-v_x dy=-h \int_C v_y dx-v_x dy,$$

而(2)式的右边显然等于

$$\int_0^h dz \iint_{\mathfrak{D}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

因之得出

$$-\int_C v_y\,dx - v_x\,dy = \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{3}$$

这就是 Green 公式.

附記. 特别提請注意,有时把(2)式写成

$$\iint_S v_x\,dy\,dz + v_y\,dz\,dx + v_z\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

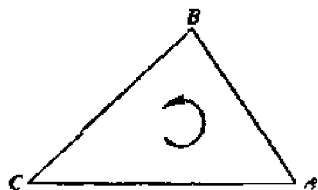
一不小心就会导致以下的錯誤:在柱面上,当 $v_z = 0$ 时,左边等于

$$\int_0^h dz \left(\int_C v_x dy + v_y dx\right),$$

因而得出荒謬的結論:

$$\int_C v_x\,dy + v_y\,dx = \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

其錯誤的根源在于把"三維空間中面积元素 $dy\,dz$"等同于"重积分的面积元素". 在三維空間中,$dy\,dz$ 代表由 dy 旋轉 90° 到 dz 的面积元素,因之,与 $dz\,dy$ 适差一符号. 因而有时用 $[dy, dz]$ 来区别于我們普通的 $dy\,dz$. 最簡单的例子是:如果如图所示的方向为三角形的正面积,则 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ 都是正向. 至于高維的情况,将来再談.



(1),(3)二式可以写成为

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}\,ds = \iint_{\mathfrak{D}} \mathrm{rot}\,\mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,ds = \iint_{\mathfrak{D}} \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,d\sigma, \tag{3}$$

这儿 s 是曲綫上的长度度量,切向 $\mathbf{t}$ 与曲綫的走向一致,$\mathbf{n}$ 是法綫方向. 由 $\mathbf{n}$ 正向轉 90° 到 $\mathbf{t}$. 即 $\mathbf{t} = (\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ 而 $\mathbf{n} = (\sin\theta, -\cos\theta) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right)$.

积分

$$N = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,ds = \int_C v_x\,dy - v_y\,dx$$

表示場 $\mathbf{v}$ 經过曲綫 C 的流量. 当法綫方向取定后,順法綫方向的为正,反之为負. 由(3)式,也可以写成为

$$N = \iint_{\mathfrak{D}} \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,d\sigma.$$

在某一区域内 $\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ 处处为 0 的場,称为管量場,即經过任何一条封閉曲綫的流量都是 0.

又由 $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ 可知

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y},$$

因而有一函数 V 存在,使

$$\frac{\partial V}{\partial y} = v_x, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -v_y.$$

这V称为流函数，V = 常数的綫称为流綫. 由 $\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy=0$ 可知流綫的方向 $\frac{dy}{dx}$ $=\frac{v_y}{v_x}$ 也就是矢量 v 的方向，并已知在 $\mathscr{D}$ 内对任意一条由 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的曲綫 C，常有

$$N=\int_C -v_y\,dx+v_x\,dy=\int_C dV=V(x_2, y_2)-V(x_1, y_1).$$

积分

$$\Gamma=\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{t}\,ds=\int_C v_x\,dx+v_y\,dy$$

表示場 $\mathbf{v}$ 沿閉曲綫的环量. 由(1)式可知，如果 $\text{rot}\,\mathbf{v}$ 处处为 0，則 $\mathscr{D}$ 中沿任一閉曲綫的环量都是 0. 这样的場称为守恆場(或称无涡場).

必存在一函数 $U(x, y)$，称之为势函数，使

$$\frac{\partial U}{\partial x}=v_x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=v_y.$$

U 等于常数的曲綫称为等势綫. 易見等势綫与流綫正交.

如果一个場既守恆又管量，則得

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x}.$$

这就是 Cauchy-Riemann 方程，也称 Euler-d'Alembert 方程.

例 1. 研究仅有一泉源(或滲井)($\text{div}\,\mathbf{v}\neq 0$ 的点称为泉源)所产生的矢量場(注意，现在是平面場，因此就是在空間一直綫上处处有相等強度的源泉的場).

假定产生源泉的点是原点，則 $\text{div}\,\mathbf{v}=0$，当 $(x, y)\neq 0$. 由于对称关系，不妨假定这个場是由

$$\mathbf{v}=\varphi(r)\mathbf{r}^0 \tag{4}$$

所定义的，这儿 $\mathbf{r}=(x, y)$，$r=|\mathbf{r}|$，$\mathbf{r}^0=\frac{1}{r}\mathbf{r}$.

过圓周 $r=\rho$ 的流量等于

$$N=\int_{r=\rho}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds=\int_{r=\rho}\varphi(r)ds=2\pi\rho\cdot\varphi(\rho);$$

另一方面，在环 $(0<)\ \rho_1\leqslant r\leqslant\rho_2$ 中并无泉源，即 $\text{div}\,\mathbf{v}=0$. 因此

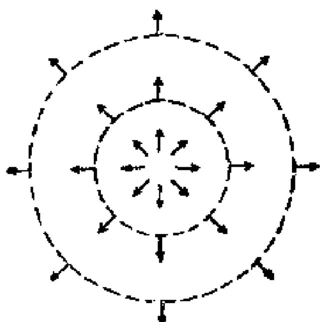
$$\left(\int_{r=\rho_2}-\int_{r=\rho_1}\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds=\iint_{\rho_1\leqslant r\leqslant\rho_2}\text{div}\,\mathbf{v}\,dx\,dy=0,$$

即 N 是一常数，因而得出

$$\varphi(r)=\frac{N}{2\pi r}.$$

这 N 定义为泉源強度，代入(4)式得

$$\mathbf{v}=\frac{N}{2\pi r}\mathbf{r}^0=\frac{N}{2\pi}\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$



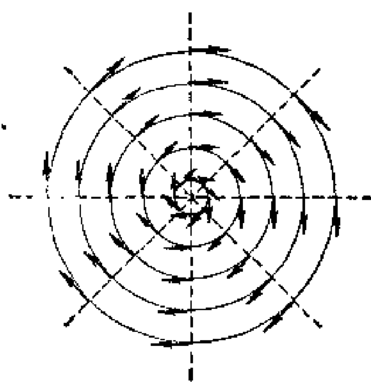
易見流函数与势函数各为

$$V=\frac{N}{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+C_1,\ U=\frac{N}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2}+C_2.$$

图中虛綫表示等位綫，箭头表示流綫。

例 2. 同法，如果渦点（$\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq 0$ 的点）在原点，仅由渦点所产生的矢量場的流函数与势函数各为

$$V=\frac{\Gamma}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2}+C_1,\ U=-\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+C_2.$$



图中虛綫表等位綫而实綫表流綫，Γ 称为渦点強度。

例 3. 假定在原点有一強度为 N 的源泉，它同时也是強度为 Γ 的渦点，因它所产生的場的势函数与流函数各为

$$U=\frac{N}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2}-\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+C_1,$$

$$V=\frac{N}{2\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y}{x}+\frac{\Gamma}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2}+C_2.$$

用极坐标得

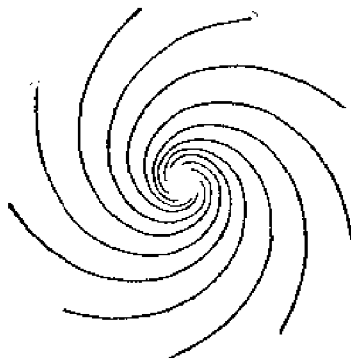
$$U=\frac{N}{2\pi}\log\rho-\frac{\Gamma}{2\pi}\theta+C_1,$$

$$V=\frac{N}{2\pi}\theta+\frac{\Gamma}{2\pi}\log\rho+C_2,$$

因此

$$U+iV=\frac{N}{2\pi}(\log\rho+i\theta)+\frac{i\Gamma}{2\pi}(\log\rho+i\theta)+$$

$$+C_1+iC_2=\frac{N+i\Gamma}{2\pi}\log z+C,\ z=\rho e^{i\theta}.$$



其等位綫与流綫各为

$$\Gamma\log\rho+N\varphi=C_1,\ N\log\rho-\Gamma\varphi=C_2,$$

这是正交的对数螺綫族.

例 4. 在 n 点处，每处 (ξ_i,η_i) 各有一強度为 N_i 的泉源，則

$$U=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}N_i\log\sqrt{(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2}.$$

例 5. 如果泉源在一条曲綫上，可相仿得出

$$U=\frac{1}{2\pi}\int_C\rho(\xi,\eta)\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,ds,$$

这儿 ds 是 C 的长度微分，$\rho(\xi,\eta)$ 可以定义为泉源強度密度。

补　　充

§9. 在流体力学上的应用

在流体力学中，矢量分析有着重要的应用．在研究流体运动时，出现各种各样的場，如密度場，速度場与加速度場．第一个是純量場，后两个是矢量場．

1）速度場

速度矢量 $\mathbf{v}=(v_x, v_y, v_z)$ 与位置 (x, y, z) 及时間 t 有关，微分方程

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}=dt$$

的解代表一族曲綫，称为流綫族．流綫族是随 t 而变化的．

如果 v_x, v_y, v_z 与 t 无关，則流綫也就是質点运动的軌迹．微分方程組

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z}$$

可以理解为給了一矢量場 (v_x, v_y, v_z)，求一族曲綫，其上每一点的切綫方向都与在該点場的矢量相吻合．微分方程的存在性与唯一性定理也可以理解为过所討論范围內的一点，有且仅有一条这样的曲綫，这样的曲綫也称为矢量綫．由此可見，矢量綫是不相交的．从流体力学的角度来看，这是显然的事实．

有时我們还討論矢量面，即对曲面上每一点，場中的矢量一定在曲面的切面上．

从一条异于矢量綫的曲綫出发，通过其上的每一点作一矢量綫，这些矢量綫上的点演成一曲面显然是一矢量面，原曲綫称为这矢量面的准綫．

当准綫是一閉曲綫时，得一管状閉曲面，这称为矢量管．

2）散度

命 S 是一定向曲面的一側，即法向矢量肯定在 S 的一側，称为外面．

在无穷小时間 dt 內，通过曲面元素 dS 的流量可以看成为以 dS 为底、以 v_n 为高的水柱的体积，这儿 v_n 是矢量 $\mathbf{v}$ 在 S 的法綫上的投影．命 $\rho=\rho(x, y, z, t)$ 表示流体密度，則在时間 dt 內，通过 dS 的流量等于

$$\rho v_n\,dS\,dt.$$

因此在单位时間內流过 S 面的流量等于

$$\iint_S \rho v_n\,dS.$$

由于

$$v_n=v_x\cos\alpha+v_y\cos\beta+v_z\cos\gamma.$$

命 $\mathbf{R}=\rho\mathbf{v}=(X, Y, Z)$，可知单位时間內流过 S 面的流量等于

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS, \tag{1}$$

这儿 $\mathbf{n}$ 是 S 面的法向.

当 S 是一包有区域 V 的闭曲面，这积分就是流体从这区域流出的流量（注意"负"流出就是流进）. 这也就是 Остроградский 公式的一边. 如果将 S 縮小，最后使 V 縮成一点(x, y, z)，则极限

$$\iint_S \mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS/V \quad (V\text{ 表区域 }V\text{ 的体积})$$

可以定义为散度，它等于

$$\lim_{V\to(x,y,z)}\frac{\iiint_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dV}{\iiint_V dV}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{2}$$

散度的流体力学的意义很明显，它是用来研究在一点流体"散"出的比率的.

$\operatorname{div}\mathbf{R}=0$ 表示这点既非源泉也非滲井.

3）矢量管

假定所討論的曲面是矢量管，命 S_1 与 S_2 是矢量管的两断面，S_3 表示管壁，并且假定管内既无源泉又无滲井，即 $\operatorname{div}\mathbf{R}=0$.

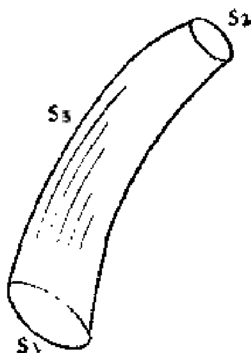


图 101

由 Остроградский–Gauss 公式得

$$\left(\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}\right)\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS=0,$$

这儿法綫方向都是向外的. 由于矢量管的性质，在 S_3 上 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{n}$ 垂直，即 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}=0$（也就是流体不通过管壁外流），亦即

$$\iint_{S_3}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS=0.$$

把 S_1 处的法綫方向改为内向，则得公式

$$\iint_{S_1}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_{S_2}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

即通过矢量管的流量对任一横断面都是一样的（注意，"管"并不一定指真的在一根管子内流动，而是指具有此性质的一部分流体）.

4）渦量（或旋度）

命 l 是一条封闭曲綫，綫积分

$$\int_l \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_l v_x\,dx+v_y\,dy+v_z\,dz$$

称为按一定方向繞曲綫 l 一周的速度环量. Stokes 公式

$$\int_l \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

可以理解为 S 渦度矢量 $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ 通过 S 面的"流量"等于沿这曲面的界綫 l 的速度环量. 由于 S 是定向的曲面的一側，l 的正向也由之而定义了.

从一点M出发，作一单位矢量 $\mathbf{m}$. 在垂直于 $\mathbf{m}$ 的平面上作一繞M的閉曲綫 l，如是得

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{m}=\lim_{S\to M}\frac{\int_l \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}}{S}, \tag{3}$$

这儿 S 也代表 S 的面积，卽当面积无穷縮小时，繞一点的环流量与面积之比的极限等于渦度矢量在 $\mathbf{m}$ 上的投影长度.

一般地講，曲面 S 上繞一点的环流量与曲面积之比的极限等于渦度矢量与曲面的法綫的內积.

5）連續性方程

假定某流体連續地充滿空間某一区域 V，并假定在其中旣无泉源又无滲井. 一般說来，流体密度可以是依賴于时間地点而变化的(卽可压縮的流体).

假定曲面 S 是 V 的界面，在单位时間內向外流出的流量等于

$$Q=\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

这儿 $\rho=\rho(x,y,z,t)$ 是流体的密度，$\mathbf{n}$ 是曲面 S 的外法綫单位矢量.

另一方面，从 V 內流体的总質量来考慮. 在时間 dt 內，密度的改变量是 $\frac{\partial\rho}{\partial t}dt$，体积元素 dV 的質量 ρdV 的改变量等于

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\,dV,$$

因而整个 V 的流体量的改变量等于

$$dt\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV,$$

这就是 dt 时間內流进的流量. 改变符号，在单位时間內流出的流量等于

$$Q=-\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV,$$

卽

$$\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS+\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV=0. \tag{4}$$

用 Остроградский 公式可知

$$\iiint_V\left(\operatorname{div}\rho\mathbf{v}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV=0.$$

这对于 V 內任何一块都成立，因此得出流体力学上著名的**連續性方程**：

$$\operatorname{div}\rho\mathbf{v}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

或

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\rho+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0. \tag{5}$$

如果有泉源或滲井，假定流体物質增长的速度是 $k\rho(x, y, z, t)$，則我們必須添上单位时間內所增加的質量

$$\iiint_V k\rho\, dV,$$

因而連續性方程变为

$$\operatorname{div} \rho v + \frac{\partial \rho}{\partial t} = k\rho, \tag{6}$$

比例常数 k 称为增长因子.

由于流体的密度 $\rho(x, y, z, t)$ 与时間 t 及位置(x, y, z)有关，而位置(x, y, z)又依时間而变化，因此

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \tag{7}$$

这儿 $\frac{d\rho}{dt}$ 是密度 ρ 在运动中的变更率，而 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 表示在一定点密度 ρ 的变更率. 这式子也可以写成

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho, \tag{8}$$

这儿

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).$$

代入(5)式得

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{9}$$

即

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{10}$$

亦即散度 div **v** 等于流体在該点的密度 ρ 的相对改变率，所以无源泉（或滲井）而且不可压縮流体的矢量場(速度)可由

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{11}$$

来刻划.

如果也沒有渦度，即

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

則有 Φ 存在，使

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi.$$

代入(11)得

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0,$$

即

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{12}$$

这儿Φ称为速度势函数、即依不可压缩的流体而言，速度势适合于 Laplace 方程(12)。同法可証，在可压縮的情况下，方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{13}$$

6）理想流体的运动方程

所謂理想流体，是指无粘滞性的流体而言。

一般說来，物体的运动取决于外力与内力。我們考虑一极簡单的情况：外力与質量成比例。命 $\mathbf{F}$ 是作用在一单位質量上的力，在体积元素 dV 上作用的力等于 $\rho dV\,\mathbf{F}$。

至于內力，也就是流体中一块V所受到其余部分的力。对理想流体来說，这等于朝向流体内部的压力。命 S 是体积V的界面，这也就是曲面 S 上所受的压力。以$(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$表曲面 S 的向外法綫的方向余弦，曲面元素 dS 上所作用的力在坐标軸上的投影等于

$$-p\cos\lambda dS,\quad -p\cos\mu dS,\quad -p\cos\nu dS,$$

这儿p代表单位面积上所受的压力。因此，作用在V上的力等于矢量

$$\left(-\iint_S p\cos\lambda\, dS,\ -\iint_S p\cos\mu\, dS,\ -\iint_S p\cos\nu\, dS\right).$$

用 Остроградский–Gauss 公式(例如，在第一支量上取 $\mathbf{R}=(p, 0, 0)$)得

$$\left(-\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x}dV,\quad -\iiint_V \frac{\partial p}{\partial y}dV,\quad -\iiint_V \frac{\partial p}{\partial z}dV\right),$$

也就是加于 dV 上的力是

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}dV,\ \frac{\partial p}{\partial y}dV,\ \frac{\partial p}{\partial z}dV\right)=-dV\operatorname{grad}p.$$

由 Newton 定律

$$\rho\, dV\,\mathbf{a}=\rho\, dV\,\mathbf{F}-dV\operatorname{grad}p,$$

这儿 $\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ 是加速度，也就是

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{a}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p, \tag{14}$$

这就是理想流体的运动方程，也是流体力学及空气动力学中的基本公式。

在流体力学中，常用 u, v, w 表示速度矢量 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 的支量。由于位置(x, y, z)与速度(u, v, w)都与 t 有关，所以

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w.$$

把 $\mathbf{F}$ 写为 (F_x, F_y, F_z)，則(14)式变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

这称为 Euler 公式。

这公式也可以改写为矢量形式：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{v}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

如果以 $\mathbf{v}\cdot\nabla$ 表算符 $u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$，則得

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

7）合而言之，流体的速度 $\mathbf{v}=(u, v, w)$，压力 p 及密度 ρ 适合于

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})=0 \quad (\text{連續方程}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \quad (\text{运动方程}),$$

这儿有五个未知函数，但仅有四个方程，余下的一个是压力 p 与密度 ρ 关系的物态方程

$$p=f(\rho),$$

这样便得出流体动力学的完全方程組。

8）現在來說明公式

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{R}=0$$

在流体力学上的意义。我們考虑渦度矢量所成的場，上式說明这样的場永远是管量場，这場当然有矢量曲綫，矢量管等等。这样的矢量管称为轉动管，也有所謂"流量"通过轉动管的任一斷面都相等的现象。

§10. 声的传播

我們現在把流体动力学的方程应用到声的传播过程。我們作以下一些假定：(i) 声的传播过程是絕热的，也就是假定物态方程是 Poisson 絕热綫

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \quad \gamma=c_p/c_v,$$

这儿 ρ_0, p_0 是初始密度与压力，而 c_p 与 c_v 是定压比热与定容比热；(ii) 气体振动是微小的，也就是可以把速度，速度的梯度，密度 ρ 的梯度这些数量的高次項略去不計。

引进密度的相对变化

$$s = s(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

即得

$$\rho = (1 + s)\rho_0.$$

在这些假定下，流体动力学的方程变为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p,$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{1}$$
$$p = p_0(1 + s)^\gamma \doteq p_0(1 + \gamma s)$$

(这是因为

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho_0}(1 + s)^{-1}\operatorname{grad} p \doteq \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p,$$
$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \doteq \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

命 $a^2 = \gamma p_0/\rho_0$，則得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbf{F} - a^2 \operatorname{grad} s, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= -\operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

交换微分次序，并消去 $\mathbf{v}$，得

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}(-a^2 \operatorname{grad} s + \mathbf{F}) = \operatorname{div} \mathbf{F} - a^2 \Delta s,$$

即得波动方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \Delta s - \operatorname{div} \mathbf{F}. \tag{3}$$

如果沒有外力，即 $\mathbf{F} = 0$，則得波动方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \Delta s = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right).$$

注意 s 是压縮或膨脹現象的量的刻划，因此这方程所代表的是声的传播律，$\operatorname{div} \mathbf{F}$ 代表声源。

§11. 热 的 传 导

一个物体在不同点与不同时間有不同的温度 $\varphi(x, y, z, t)$，这样定义一个純量場，即温度場．矢量

$$-k \operatorname{grad} \varphi$$

称为热流矢量，其中 $k>0$ 是比热系数. 我們所以用(—)号，是根据"热向低处流"而取定的. $\operatorname{grad}\varphi$ 的方向是 φ 增长得最快的方向(§4)，因此取(—)号表示热向低处流.

取一曲面元素 dS，在时間 dt 通过 dS 的热量与 $dt\,dS$ 及温度法向微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 成比例，也就是說，

$$\Delta Q = k\,dt\,dS\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| = -k\,dt\,dS\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{n}.$$

因此，如果閉曲面 S 包有 V，則通过 S 的全部热量等于

$$-dt\iint_S k\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{1}$$

假定无热源，則单位时間內物体 V 通过界面 S 流出的热量等于

$$Q=-\iint_S k\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{n}\,dS=-\iint_S k\operatorname{grad}\varphi\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

用 Остроградский-Gauss 公式并改变符号，可知流入的热量等于

$$\iiint_V \operatorname{div}(k\operatorname{grad}\varphi)\,dV. \tag{2}$$

再用另一方法来計算 V 的热量. 在时間 dt 內，温度增加

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt,$$

則 dV 需要輸入的热量是

$$c\,d\varphi\,\rho\,dV=c\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt\,\rho\,dV,$$

这儿 c 是一比例系数，叫做物质的热容量，而 ρ 是物質密度. 在时間 dt 內整个立体 V 要吸收的热量，等于

$$dt\iiint_V c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}dV.$$

单位时間內吸收的热量等于

$$\iiint_V c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}dV. \tag{3}$$

由于(2)，(3)相等，因此

$$\iiint_V\left\{c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\operatorname{div}(k\operatorname{grad}\varphi)\right\}dV=0.$$

这对所考察的区域內的任何一部分都对，所以有方程

$$c\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}\varphi), \tag{4}$$

这是有名的热传导方程.

在均匀介質中，命 $a^2=\frac{k}{c\rho}$，則得方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta \varphi = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right).$$

当温度稳定分布时，即 φ 仅依賴于位置 x, y, z 而不依賴于时間 t 时，則温度 φ 适合于 Laplace 方程

$$\Delta \varphi = 0.$$

以上所論，是在假定无热源的情况．如果有热源，則有以下的式子：

$$\iiint\limits_V \left\{ c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \varphi) \right\} dV = \iiint\limits_V e \, dV.$$

最后一項表示在单位时間內由 V 放出的热量．

被积函数 $e = e(x, y, z, t)$ 給出連續分布于 V 中的热源強度，因此得出

$$c\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = e.$$

在均匀介質的情况下，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta \varphi + \frac{e}{c\rho}.$$

第十八章　曲面的微分性質

§1. 代 数 工 具

我們現在先敘述一下本章所要用到的代数工具，有些是已經有过的，有些是新的. 不必查书，讀者試补出沒有証明的公式的証明.

1) $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 是二矢量，則

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \tag{1}$$

(§ 2.5,2).

2) 任意四个矢量 $\mathbf{a}$. $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ 之間有次之恆等式:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \tag{2}$$

(定理 2. 6. 3).

3) 做二次型

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\cdot(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2,$$

其行列式

$$EG-F^2=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2. \tag{3}$$

作

$$(\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d})\cdot(\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d})=E_0\lambda^2+2F_0\lambda\mu+G_0\mu^2 \tag{4}$$

及

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\cdot(\lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d})=L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2. \tag{5}$$

如果

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ 及 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 平行于 $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$, 則

$$(LN-M^2)^2=(EG-F^2)(E_0G_0-F_0^2). \tag{6}$$

由(5)及 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ 得

$$\begin{aligned}LN-M^2&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-\frac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2\\&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}).\end{aligned}$$

再由 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 平行于 $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$, 故得

$$((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}))^2=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2|\mathbf{c}\times\mathbf{d}|^2=(EG-F^2)(E_0G_0-F_0^2).$$

4) 假定 $a>0$, $ac-b^2>0$. 命 λ_1, λ_2 是

$$(a\lambda-a')(c\lambda-c')-(b\lambda-b')^2=0 \tag{7}$$

的两个根, $\lambda_1\leqslant\lambda_2$, 則

$$\lambda_1\leqslant\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{ax^2+2bxy+cy^2}\leqslant\lambda_2. \tag{8}$$

証. 由于齐次性，函数

$$\frac{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}{ax^2 + 2bxy + cy^2} \tag{9}$$

的最大、最小值等于在椭圓

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

上函数 $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ 的最大、最小值，所以存在性是沒有問題的. 由

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 - \lambda_1(ax^2 + 2bxy + cy^2) = (a' - \lambda_1 a)\left(x + \frac{b' - \lambda_1 b}{a' - \lambda_1 a} y\right)^2 \tag{10}$$

可知，如果 $a' - \lambda_1 a > 0$，則

$$\frac{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}{ax^2 + 2bxy + cy^2} \geqslant \lambda_1.$$

如果 $a' - \lambda_1 a < 0$，則

$$\frac{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}{ax^2 + 2bxy + cy^2} \leqslant \lambda_1,$$

即 λ_1 不是最大值，就是最小值；λ_2 也是如此。但 λ_2 比 λ_1 大，所以得出(8)式.

由(10)可見，当

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} = -\frac{b' - \lambda_1 b}{a' - \lambda_1 a} \tag{11}$$

时，函数(9)确取下界 λ_1，而当

$$\frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2} = -\frac{b' - \lambda_2 b}{a' - \lambda_2 a} \tag{12}$$

时，函数(9)确取上界 λ_2.

5) 方程(7)可以写成为

$$(ac - b^2)\lambda^2 - (ac' + a'c - 2bb')\lambda + a'c' - b'^2 = 0, \tag{13}$$

所以

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a'c' - b'^2}{ac - b^2} \tag{14}$$

及

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{ac' + a'c - 2bb'}{ac - b^2}. \tag{15}$$

因此

$$\frac{x_1}{y_1}\frac{x_2}{y_2} = \frac{b'^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)bb' + \lambda_1\lambda_2 b^2}{a'^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)aa' + \lambda_1\lambda_2 a^2} = \frac{b'c - c'b}{a'b - b'a}$$

及

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = -\frac{2a'b' - (ab' + a'b)(\lambda_1 + \lambda_2) + 2\lambda_1\lambda_2 ab}{a'^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)aa' + \lambda_1\lambda_2 a^2} = -\frac{a'c - c'a}{a'b - b'a}.$$

因此 $x_1:y_1$ 与 $x_2:y_2$ 是以下的二次型的两根：

$$(ab' - ba')x^2 - (a'c - c'a)xy + (bc' - cb')y^2 = 0. \tag{16}$$

6) 极易推得

$$ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cy_1y_2 = 0. \tag{17}$$

§ 2. Gauss 第一微分型

我們現在考慮由参数 u, v 表达的曲面 S:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \omega(u, v), \tag{1}$$

或者用矢量符号

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{2}$$

表之。

如果 u, v 又是参变数 t 的函数，則当 t 变时，我們就得出 S 上的一条曲綫 c，这条曲綫的切綫方向是

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

命

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial u}\right), \\ \mathbf{r}_v &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v}\right), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

則曲綫 c 的切矢量等于

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{du}{dt}\mathbf{r}_u + \frac{dv}{dt}\mathbf{r}_v. \tag{5}$$

因此曲綫 c 的切方向由 $\frac{du}{dt}$ 和 $\frac{dv}{dt}$ 唯一地决定.

特別，当 u 或 v 取常数值时，在曲面上我們得出两族曲綫，这两族曲綫称为曲面上的坐标綫，坐标綫上曲面的切綫方向各为 $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_u$.

今后我們只考虑曲面 S 上的这类点：在这些点上，矢量 $\mathbf{r}_u$ 和 $\mathbf{r}_v$ 互不平行. 特別，两个都不是零矢量.

这个条件告訴我們，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\omega}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\omega}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial\omega}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

当中至少有一个不为零. 例如，第一个行列式不为零，那末由隐函数存在定理，我們可以反解出

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

因此曲面 S 在这点附近可以写成显函数的形式:

$$z = \omega(u, v) = \omega(u(x, y), v(x, y))$$

(注意,这不等于說整个曲面可以用一个显式表示. 例如,球面 $x^2+y^2+z^2-1=0$)。

例. 以原点为中心、R 为半径的球面:

$$x=R\sin u\cos v,\quad y=R\sin u\sin v,\quad z=R\cos u$$

当 $u=c_1$ 时,得出球面上的緯綫;而 $v=c_2$ 时,得出球面上的經綫,經綫、緯綫合成球面上的坐标綫. 沿緯綫的切方向是

$$(-R\sin c_1\sin v,\quad R\sin c_1\cos v,\quad 0).$$

它是和 (x, y) 平面平行的矢量.

曲綫 c 的弧长的微分的平方等于

$$\begin{aligned}ds^2&=dx^2+dy^2+dz^2=d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}\\&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}du+\frac{\partial\omega}{\partial v}dv\right)^2\\&=E(u,v)du^2+2F(u,v)du\,dv+G(u,v)dv^2,\end{aligned}\tag{6}$$

此处

$$\left.\begin{aligned}E(u,v)&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2,\\F(u,v)&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v},\\G(u,v)&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

用矢量符号

$$E=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u,\quad F=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v,\quad G=\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v,\tag{8}$$

(6)称为 Gauss 第一微分型.

坐标綫 $u=c_1$ 及 $v=c_2$, 相互正交的必要且充分条件是 $F=0$. 在这样的情况下,曲面上的坐标系称为正交坐标系.

由 §1, (1)可知,第一微分型的判别式等于

$$EG-F^2=|\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2-(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v)^2=|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|^2,$$

即二矢量 $\mathbf{r}_u$ 与 $\mathbf{r}_v$ 的矢量积长度的平方. 前已知道它等于以 $\mathbf{r}_u$ 及 $\mathbf{r}_v$ 为边的平行四边形面积的平方.

从一点 $A(=(u, v))$ 出发, 沿 $v=c_2$ 作一微分矢量 $\mathbf{r}_u du$, 沿 $u=c_1$ 作一微分矢量 $\mathbf{r}_v dv$, 这二矢量所定义的平行四边形的面积用 dS 表之,称为曲面上的面积元素. 由

$$(\mathbf{r}_u\,du)\times(\mathbf{r}_v\,dv)=(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,du\,dv$$

可知,

$$dS^2=|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,du\,dv=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.\tag{9}$$

注意, $EG-F^2$ 总是正的,这是因为在我們所考慮的点上,矢量 $\mathbf{r}_u$, 和 $\mathbf{r}_v$ 互不平行.

給了两个方向 (du, dv) 与 $(\delta u, \delta v)$, 有两个切矢量

$$\mathbf{r}_u\,du+\mathbf{r}_v\,dv,\quad \mathbf{r}_u\,\delta u+\mathbf{r}_v\,\delta v.$$

这两个矢量的夹角余弦等于

$$\frac{(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)\cdot(\mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v)}{|\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv|\,|\mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v|} =$$

$$= \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)(E\delta u^2 + 2F\delta u\,\delta v + G\delta v^2)}}. \tag{10}$$

如果过一点有二曲綫,它們在这点的切綫方向各为 (du, dv), $(\delta u, \delta v)$, (10) 也称为这两曲綫的夹角余弦.

習題. 这些习題应随着課程的进展而逐步完成. 以下給一批曲面,現求出它們的第一微分式; 学了 §3 就求出它們的第二微分式; 学了 §5 就看点的分类; 学了 §6 就計算曲率网、主曲率等等. 总之,这些习題与本章相始終.

1. 球:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2. 曲面:

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

3. 环面:

$$4b^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2.$$

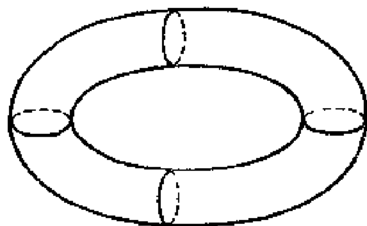


图 104

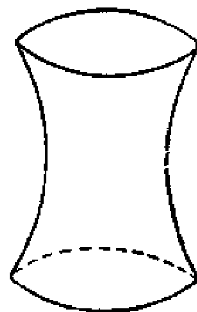


图 105

它是一个球族所占有的空間部分的表面(这个球族的半径为 a, 而球心在半径为 b 的圆上), 利用参数方程

$$\mathbf{r} = ((b + a\cos\psi)\cos\varphi,\ (b + a\cos\psi)\sin\varphi,\ a\sin\psi).$$

解答. 第一微分型 $ds^2 = a^2 d\psi + (b + a\cos\psi)^2 d\varphi^2$.

4. 悬鏈面(由悬鏈綫繞基綫旋轉而得的). 悬鏈綫的方程是

$$\mathbf{r} = \left(a\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}\,\cos\varphi,\ a\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{a}\,\sin\varphi,\ t\right).$$

解答. 第一微分型: $ds^2 = a^2\,\mathrm{ch}\,u(du^2 + dv^2)$.

5. 螺旋面. 平面曲綫繞同平面上的一直綫旋轉, 并沿此直綫的方向前进,使所行距离与旋轉角度成比例,即得螺旋面. 它的方程是

$$\mathbf{r} = (\eta(t)\cos\varphi,\quad \eta(t)\sin\varphi,\quad \xi(t) + a\varphi)$$

(当 $a = 0$ 时螺旋面化为旋轉曲面).

解答. 第一微分型 $ds^2 = (\eta'^2 + \xi'^2)dt^2 + 2a\xi\,dt\,d\varphi + (\eta^2 + a^2)d\varphi^2$.

§3. Gauss 第二微分型

矢量积

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

是曲面的法綫方向，則

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

为单位法綫方向，卽

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{1}$$

显然有

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} = 0, \tag{2}$$

微分此式得出

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{m} = d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}. \tag{3}$$

微分型

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{m} = -(\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv)(\mathbf{m}_u\,du + \mathbf{m}_v\,dv) = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \tag{4}$$

称为 Gauss 第二微分型，此处

$$\left.\begin{aligned} L &= -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{m}_u, \\ M &= -\frac{1}{2}(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{m}_v + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{m}_u), \\ N &= -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{m}_v. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(3)式右边等于

$$(\mathbf{r}_{uu}\,du^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\,du\,dv + \mathbf{r}_{vv}\,dv^2) \cdot \mathbf{m},$$

因此

$$L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{m}, \quad M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{m}, \quad N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{m}, \tag{6}$$

由(1)可知，

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\mathbf{r}_{uu} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \\ M &= \frac{\mathbf{r}_{uv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \\ N &= \frac{\mathbf{r}_{vv} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

在显式表达形式

$$z = f(x, y)$$

时，用符号

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

则得

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2$$

及

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

§4. 曲面上曲綫的曲率

c 是曲面 S 上的任意一条曲綫，M 是这曲綫上的一点．在曲綫 c 上的长度微分是 ds．由上节公式(3)可知，

$$\frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = -\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{m}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\cdot\mathbf{m}. \tag{1}$$

由于 $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 是曲綫上的单位切矢量，由 Frenet-Serret 公式

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}, \tag{2}$$

这儿 ρ 是曲綫 c 的曲率半径，$\mathbf{n}$ 是曲綫 c 的单位主法綫矢量．(2)可以写成为

$$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{\rho} = -\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{m}}{ds}. \tag{3}$$

命 φ 表曲面法矢量 $\mathbf{m}$ 与曲綫主法矢量 $\mathbf{n}$ 的夹角，則得

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = -\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{d\mathbf{m}}{ds} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{4}$$

如果給了 $\frac{du}{dv}$ 与 φ，則 ρ 唯一地决定了，因此有

定理 1. 在曲面上某一点具有相同切綫及相同主法綫的曲綫一定有相同的曲率半径．

当 $\varphi = 0$ 时，則曲綫的主法綫与曲面的法綫同向，通过法向与 c 的切向作平面，这平面交曲面于曲綫 c_0，曲綫 c 与 c_0 的切綫与主法綫都同向，因而它們的曲率半径也都相等．c_0 是平面曲綫，这样的曲綫称为法截綫，就是通过曲面的法向做平面所截出的曲綫．

因此主法綫与曲面法綫同向的曲綫的曲率的研究，一变而为法截綫的曲率的研究了(定理 1)．

过法綫的平面有无穷多，因而法截綫也有无穷多．在曲面的切面上給与任何一个切綫方向，我們可以截出一条法截綫来，也就是給了 $\frac{du}{dv}$，就有一条法截綫．

但这样做出的法截綫的主法綫方向，可能与 **m** 同向，也可能与 **m** 反向，也就是 $\varphi = 0$ 或 π，即 $\cos\varphi = \pm 1$。

曲面 S 上的任何一条曲綫 c，其上一点 M，过点 M，切曲綫 c 的法截綫 c_0 称为对应于 c 的法截綫．ρ 是 c 的曲率半径，R 是 c_0 的曲率半径，由于切向相同，即 $\dfrac{du}{dv}$ 的数值相同，所以

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{\pm 1}{R}, \quad \rho = \pm R\cos\varphi. \tag{5}$$

这儿 φ 是曲綫 c 的主法綫与曲面法綫的夹角．因此得

定理 2. (Meusnier)．曲面上任何曲綫在某点的曲率半径等于对应的法截綫在这点的曲率半径乘以曲面的法綫与曲綫的主法綫之間的夹角的余弦．

定理也可以叙述为

曲面上任何曲綫的曲率半径等于在曲面的法綫上所截取的对应的法截綫的曲率半径在这曲綫的主法綫上的投影．

例．以球面为例，法截綫是大圓．命 c 是球面上的任意圓，公式(2)变为两个圓半径的关系．这显然是正确的．

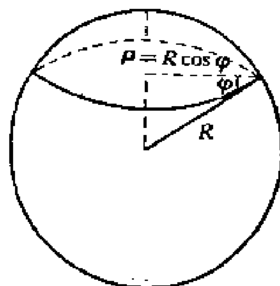


图 106

由 Meusnier 定理，曲面上曲綫的曲率的研究，化为过这定点曲面上法截綫的曲率的研究．

法截綫的曲率等于

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{6}$$

但必須加以解释，如果右边为正，则法截綫的主法綫与 **m** 的方向相同，曲率半径等于 R；如果右边为負，則方向相反，曲率半径等于 $-R$．

§5. 点的分类

由公式 (4.6) 可知，給了比值 $\dfrac{du}{dv}$，曲率 $\dfrac{1}{R}$ 就唯一地确定了．我們有三种情况：

1. 如果在 M 点 $M^2 - LN < 0$，则所有的法截綫的曲率 $\dfrac{1}{R}$ 都有相同的符号，也就是説，所有的法截綫的主法綫方向在曲面的同一側．这样的点称为**椭圓性点**．

2. 如果在 M 点 $M^2 - LN > 0$，則曲率 $\dfrac{1}{R}$ 可以不同号，有时与法向同側，有时异側．这样的点称为**双曲性点**．

3. 如果 $M^2 - LN = 0$，則 §4.(6) 的分子为一完全平方乘以 N(或 L)，曲率不变号，但有某一法截綫曲率为 0．这样的点称为**抛物性点**．严格地説，$L = M = N = 0$ 的点必須除外，这样的点称为**凝聚点**．

注意，在椭圓性点，$\dfrac{1}{R}$ 决不为 0，而其他两种情况都有使 $\dfrac{1}{R}$ 为 0 的方向存在．也就是

二次多项式 $Ldu^2+2Mdu\,dv+Ndv^2$ 的实根.

例(旋轉曲面). 在 (ξ,η) 平面上有一条曲綫 c:

$$\xi=\xi(t),\quad \eta=\eta(t).$$

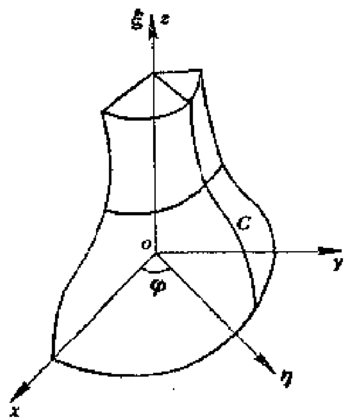


图 107

把 $o\xi$ 軸做为 z 軸, 曲綫 c 繞 z 軸旋轉, 得出来的曲面称为旋轉面, 而 z 軸称为旋轉軸, 显然有

$$z=\xi(t),\quad x^2+y^2=\eta^2(t).$$

参变数表达式是

$$\mathbf{r}=(\eta\cos\varphi,\ \eta\sin\varphi,\ \xi),$$

由此得

$$d\mathbf{r}=(\eta'\cos\varphi,\ \eta'\sin\varphi,\ \xi')dt+$$
$$+(-\eta\sin\varphi,\ \eta\cos\varphi,\ 0)d\varphi,$$
$$d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=\eta^2d\varphi^2+(\eta'^2+\xi'^2)dt^2,$$

即

$$E=\eta^2,\quad F=0,\quad G=\eta'^2+\xi'^2.$$

又作

$$\mathbf{r}_{tt}=(\eta''\cos\varphi,\ \eta''\sin\varphi,\ \xi''),\quad \mathbf{r}_{t\varphi}=(-\eta'\sin\varphi,\ \eta'\cos\varphi,\ 0),$$
$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi}=(-\eta\cos\varphi,\ -\eta\sin\varphi,\ 0),$$

推得第二微分型

$$\frac{(\eta'\xi''-\xi'\eta'')dt^2+\eta\xi'd\varphi^2}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}},$$

因此

$$LN-M^2=(\eta'\xi''-\xi'\eta'')\eta\xi'.$$

現在来看旋轉面上点的类别, 取显示表达式 $\eta=f(\xi)$, 則得

$$LN-M^2=-f''(\xi)f(\xi).$$

假定曲綫都在 $\eta>0$ 的一方, 即 $f(\xi)>0$, 如此則 M^2-LN 与 $f''(\xi)$ 同号, 也就是当 $f''(\xi)<0,\ >0,\ =0$ 时各为橢圓, 双曲, 抛物性点, 也就是如果曲綫凹向着旋轉軸时, 得橢圓性点. 几何上看来也是直覚的, 因为这时候, 切面在旋轉体之外.

曲綫凸向着旋轉軸时, 得双曲性点. 从几何上看来, 曲綫的切綫方向在体内, 而这点經旋轉所成的圓的切綫方向則在体外, 因此有内有外.

曲綫的扭轉点是曲面的抛物性点.

§6. 曲 率 綫

从法截綫的曲率公式出发,

$$\frac{1}{R}=\frac{Ldu^2+2Mdu\,dv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdu\,dv+Gdv^2}. \tag{1}$$

由 §1.4, 有两个方向 (d_1u,d_1v) 及 (d_2u,d_2v) 存在, 使 $\frac{1}{R}$ 取 $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, 而且

$$\frac{1}{R_2}\leqslant\frac{Ldu^2+2Mdu\,dv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdu\,dv+Gdv^2}\leqslant\frac{1}{R_1}, \tag{2}$$

这儿 R_1, R_2 是方程

$$(LN - M^2)R^2 + (2FM - EN - GL)R + (EG - F^2) = 0 \tag{3}$$

的二根,而 (d_1u, d_1v), (d_2u, d_2v) 是

$$(EM - FL)du^2 + (EN - GL)dudv + (FN - GM)dv^2 = 0 \tag{4}$$

的二个解. 但需注意,如果

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G},$$

則任意方向 (du, dv) 都是(4)式的解. 这时由式(2)可知 $R_1 = R_2$、这样的点称为圓点. 我們可以証明,处处是圓点的曲面,一定是球面(这儿不証). 在今后的討論中,把圓点除外. (4)的根不会重迭的,其原因是,由(1.11),(1.12)得

$$\frac{d_1u}{d_1v} = -\frac{F - R_1M}{E - R_1L}, \quad \frac{d_2u}{d_2v} = -\frac{F - R_2M}{E - R_2L}. \tag{5}$$

如果相等,則 $R_1 = R_2$, 卽是圓点了.

由 (d_1u, d_1v), (d_2u, d_2v) 所定义出来的两个矢量

$$(\mathbf{r}_u d_1u + \mathbf{r}_v d_1v), \quad (\mathbf{r}_u d_2u + \mathbf{r}_v d_2v)$$

是互相正交的,其理由是

$$(\mathbf{r}_u d_1u + \mathbf{r}_v d_1v) \cdot (\mathbf{r}_u d_2u + \mathbf{r}_v d_2v) = Ed_1u\, d_2u + F(d_1u\, d_2v + d_2u\, d_1v) + Gd_1v\, d_2v.$$

由(1.17)可知此式为0.

方向(5)称为主方向, $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ 称为主曲率,又 R_1, R_2 称为主曲率半径. 由(5)所定义的两族曲綫称为曲率綫,在曲面上成正交坐标网.

如果把它們作为坐标綫, 則 $F = 0$; 如果 $u = c_1$, $v = c_2$ 是曲率綫,它一定适合微分方程(4),卽得

$$EM = GM = 0.$$

但 $EG > 0$, 因此 $M = 0$.

反之,如果 $F = M = 0$, 則方程(4)变为

$$du\, dv = 0.$$

因而 $u = c_1$, $v = c_2$ 是曲率綫,因得

定理 3. 坐标网是曲率网的必要且充分条件是:在整个曲面上, Gauss 的两个二次型缺中間項,卽 $F = M = 0$.

現在

$$M^2 - LN = -\frac{EG}{R_1R_2},$$

由于 $EG > 0$, 因此得

在椭圓性点处, R_1 与 R_2 同号, 但在双曲性点处, R_1 与 R_2 异号. 由 $\frac{1}{R_1}$ 变到 $\frac{1}{R_2}$ 必定經过 0 值, 这时候所对应的方向称为漸近方向. 对应于漸近方向的曲率为 0, 曲率半径

为∞.

定义. 两曲率的乘积

$$K=\frac{1}{R_1R_2}$$

称为 Gauss 曲率,而其和的平均数

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

称为曲率中值.

由(3)可知,

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},\quad H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}. \tag{6}$$

例 1. 扁迴旋椭圆面的方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{7}$$

的参数表达式是

$$x=a\cos u\sin v,\quad y=a\sin u\sin v,\quad z=c\cos v.$$

不难得出

$$E=a^2\sin^2 v,\quad F=0,\quad G=a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v,$$

$$L=\frac{ac\sin^2 v}{\sqrt{a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v}},\quad M=0,\quad N=\frac{ac}{\sqrt{a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v}}.$$

由于 $F=M=0$, 所以 $u=$ 常数, $v=$ 常数都是曲率綫. 实质上, 由于(7)是迴旋面, 它的經綫 $(v=c_1)$, 緯綫 $(u=c_1)$ 是曲率綫, 因而 $F=M=0$, 可不待計算而知之. 而 Gauss 曲率

$$K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{c^2}{(a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v)^2}.$$

例 2. 二次錐面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

的显示式

$$z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

不难求得

$$p=\frac{c^2x}{a^2z},\quad q=\frac{c^2y}{b^2z},\quad r=\frac{c^4y^2}{a^2b^2z^3},\quad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\quad t=\frac{c^4x^2}{a^2b^2z^3}.$$

由于 $rt-s^2=0$, 所以所有的点都是抛物点, 并且有一个主曲率半径等于 ∞. 显然, 对应的主方向与錐面的母直綫重合.

§7. Euler 公式

假定我們已經以曲率綫网为坐标网, 则

$$\frac{1}{R}=\frac{Ldu^2+Ndv^2}{Edu^2+Gdv^2}. \tag{1}$$

取 $v=c_2$ 得主曲率

$$\frac{1}{R_1}=\frac{L}{E}.$$

取 $u=c_1$ 得

$$\frac{1}{R_2}=\frac{N}{G}.$$

因此

$$\frac{Ldu^2+Ndv^2}{Edu^2+Gdv^2}=\frac{1}{R_1}\frac{Edu^2}{Edu^2+Gdv^2}+\frac{1}{R_2}\frac{Gdv^2}{Edu^2+Gdv^2}.$$

命 θ 是方向 dv/du 与曲率綫 $v=c_2$ 的交角，則

$$\frac{Edu^2}{Edu^2+Gdv^2}=\cos^2\theta,\quad \frac{Gdv^2}{Edu^2+Gdv^2}=\sin^2\theta.$$

因而得出 Euler 公式

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{2}$$

因此得

定理 4. 在曲面上每一点的切面存在有两个相互垂直的方向、在这两个方向，曲率 $\frac{1}{R}$ 达到最大与最小值，并且 $\frac{1}{R_1}$ 与 $\frac{1}{R_2}$ 就是对应于这两个方向的曲率值．任何法截綫的曲率可以由 Euler 公式(2)表之，其中 θ 是法截綫的切綫与給出曲率 $\frac{1}{R_1}$ 的方向所作成的角度．

§8. Olinde Rodrigues 公式

在空間具有一个参变数的直綫族一般沒有包絡，也就是說，不一定有一条曲綫(即所說的包絡)以这些直綫为切綫．在曲面 s 上任取一曲綫 c，在 c 上每一点做曲面 s 的法綫，法綫也成一直綫族，这样的直綫族不一定有包絡．問題：怎样的 c，其上各点作曲面的法綫，这法綫族有包絡．回答是，必要且充分条件是 c 为曲率綫．

假定包絡是 c_1，用 $\mathbf{r}$ 表 c 的矢径，而 $\mathbf{r}_1$ 表 c_1 的矢径，M 表示 c 上的一点．作法綫，这法綫与 c_1 的切点是 M_1．命 MM_1 的长度等于 a，如此則得

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}+a\mathbf{m}, \tag{1}$$

这儿 $\mathbf{m}$ 是单位法向矢量．

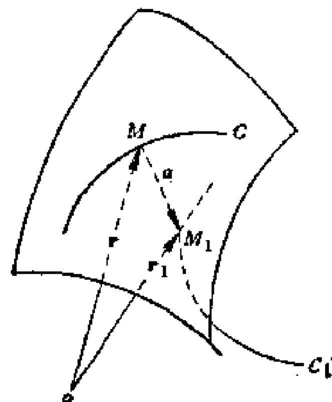


图 108

c_1 如果是法綫的包絡，则它的切綫方向一定与 $\mathbf{m}$ 平行，即 $d\mathbf{r}_1=b\mathbf{m}$，此处 b 是一数量．由(1)求微商得

$$b\mathbf{m}=d\mathbf{r}_1=d\mathbf{r}+ad\mathbf{m}+(da)\mathbf{m},$$

即

$$d\mathbf{r}+ad\mathbf{m}=e\mathbf{m},$$

这儿 e 是某一数量．与 $\mathbf{m}$ 求数量积，得

$$e=d\mathbf{r}\cdot\mathbf{m}+ad\mathbf{m}\cdot\mathbf{m},$$

切矢量 $d\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{m}$ 正交，单位矢量 $\mathbf{m}$ 与其微分矢量 $d\mathbf{m}$ 正交，因此 $e=0$. 即得

$$d\mathbf{r}+a d\mathbf{m}=0. \tag{3}$$

所以，如果所考虑的包络存在，则(3)一定成立；反之，如果沿 c，(3)式成立，则由(1)确定一条曲綫 c_1，微分之，得 $d\mathbf{r}_1=d\mathbf{r}+a d\mathbf{m}+(da)\mathbf{m}=(da)\mathbf{m}$. 也就是 $\mathbf{m}$ 与 c_1 的切向平行，因此沿 c 的曲面法綫是 c_1 的切綫. 因此公式(3)是曲綫 c 上曲面法綫具有包絡的必要且充分的条件，注意，包絡可以蜕化为一个点，那时法綫成錐面或柱面，但(3)式仍然成立.

我們現在进一步算出(3)式中的 a 就是主曲率半径之一.

展开(3)式得

$$\mathbf{r}_u du+\mathbf{r}_v dv+a(\mathbf{m}_u du+\mathbf{m}_v dv)=0. \tag{4}$$

与矢量 $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ 求內积得

$$\left.\begin{aligned}Edu+Fdv+a(-Ldu-Mdv)=0,\\ Fdu+Gdv+a(-Mdu-Ndv)=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

消去 du. dv 得

$$(LN-M^2)a^2+(2FM-EN-GL)a+EG-F^2=0,$$

这就是(6.3). 因此 a 是 R_1, R_2 之一. 因此

$$d\mathbf{m}=-\frac{1}{R}d\mathbf{r}. \tag{6}$$

这称为 Olinde Rodrigues 公式，由(5)确定出来的方向是主方向.

定理 5. 曲面的曲率綫上每点作曲面的法綫，这些法綫有一包絡，界于曲面与包絡之間的法綫的长度等于主曲率半径之一.

某一平面曲綫繞着位于这平面上一直綫旋轉所产生的曲面的曲率綫就是它的經綫与緯綫. 緯綫是指这曲綫上一点的軌迹，其上的曲面法綫成一錐面，其頂点就是平面曲綫的法綫与軸的交点. 而經綫是指过軸平面所截出的綫，法綫在一平面上，所以有包絡，这与定理 5 所論証的結論相同.

§9. Dupin 定理

在空間有三族互相垂直的曲面：

$$\varphi(x,y,z)=q_1,\quad \psi(x,y,z)=q_2,\quad \omega(x,y,z)=q_3, \tag{1}$$

它們形成空間的一个正交曲面坐标网，也就是可以解出成为

$$x=\varphi_1(q_1,q_2,q_3),\quad y=\psi_1(q_1,q_2,q_3),\quad z=\omega_1(q_1,q_2,q_3). \tag{2}$$

沿坐标綫的切綫矢量各为

$$\mathbf{r}_{q_1},\ \mathbf{r}_{q_2},\ \mathbf{r}_{q_3}. \tag{3}$$

正交的条件可以写成为

$$\mathbf{r}_{q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=0,\quad \mathbf{r}_{q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_1}=0,\quad \mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_2}=0. \tag{4}$$

第一式对 q_1 求微商，第二式对 q_2 求微商，第三式对 q_3 求微商，得

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}+\mathbf{r}_{q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_1q_3}=0,\\ \mathbf{r}_{q_2q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_1}+\mathbf{r}_{q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_1q_2}=0,\\ \mathbf{r}_{q_1q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_2}+\mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_2q_3}=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

三式总加，減第一、第二、第三式得

$$\mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=\mathbf{r}_{q_2q_3}\cdot\mathbf{r}_{q_1}=\mathbf{r}_{q_3q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_2}=0. \tag{6}$$

由(4)及(6)得

$$\mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=\mathbf{r}_{q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=\mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}_{q_3}=0.$$

可知，$\mathbf{r}_{q_1}$, $\mathbf{r}_{q_2}$, $\mathbf{r}_{q_1q_2}$ 都垂直于 $\mathbf{r}_{q_3}$. 因而在同一平面上卽得

$$\mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot(\mathbf{r}_{q_1}\times\mathbf{r}_{q_2})=0. \tag{7}$$

現在考慮曲面 $q_3=$ 常数，而 q_1, q_2 作为参变量，得

$$F=\mathbf{r}_{q_1}\cdot\mathbf{r}_{q_2}=0,\quad M=\frac{\mathbf{r}_{q_1q_2}\cdot(\mathbf{r}_{q_1}\times\mathbf{r}_{q_2})}{\sqrt{EG-F^2}}=0.$$

因此坐标綫 q_1 与 q_2 是曲面 $q_3=$ 常数的曲率綫，因此得

定理 6 (Dupin). 如果空間有三族互相正交的曲面，在不同的两族中的任何两个曲面的交綫是这两个曲面的曲率綫.

例. 椭球坐标. 考慮含参数 ρ 的二次曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1,\qquad a^2>b^2>c^2. \tag{8}$$

对一固定的点 $M(x, y, z)$，得出 ρ 的三次方程. 不难証明，有三个实根 u, v, w，而且适合于

$$\infty>u>-c^2,\quad -c^2>v>-b^2,\quad -b^2>w>-a^2. \tag{9}$$

这样三个数 (u, v, w) 称为点 $M(x, y, z)$ 的椭球坐标. 以上討論，我們假定 x, y, z 中无一为 0. 不然，(2)化为 ρ 的二次方程了.

我們研究椭球坐标系中的坐标曲面，以 u 代 ρ，則得椭球面:

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1. \tag{10}$$

以 v 代 ρ 得单叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}=1,\qquad \begin{pmatrix}c^2+v<0.\\ a^2+v>0,\ b^2+v>0.\end{pmatrix} \tag{11}$$

以 w 代 ρ 得双叶双曲面:

$$\frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1,\qquad \begin{pmatrix}b^2+w<0,\ c^2+w<0\\ a^2+w>0.\end{pmatrix} \tag{12}$$

現在証明(10)，(11)，(12)正交，曲面(10)，(11)的法綫方向，各为

$$\frac{x}{a^2+u},\ \frac{y}{b^2+u},\ \frac{z}{c^2+u};\qquad \frac{x}{a^2+v},\ \frac{y}{b^2+v},\ \frac{z}{c^2+v}.$$

两法向的夹角余弦之分子等于

$$\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}=$$

$$=\frac{1}{v-u}\left(\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-\frac{x^2}{a^2+v}-\frac{y^2}{b^2+v}-\frac{z^2}{c^2+v}\right)=0.$$

故得所証.

§ 10. Gauss 曲率的几何意义

把法綫单位矢量的始点移到坐标中心，其末端 M^* 就在以原点为中心的单位球面上。当 M 在曲面 s 上移动，M^* 便在球面上移动，这样的表达方法，称为曲面的球面写象。M^* 的位置由 u, v 唯一决定。

在球面上 M^* 点的参数表达式是 $\mathbf{m} = \mathbf{m}(u, v)$，因此球面的 Gauss 第一微分型等于

$$d\mathbf{m}\cdot d\mathbf{m} = E_0du^2 + 2F_0du\,dv + G_0dv^2, \tag{1}$$

此处

$$E_0 = \mathbf{m}_u\cdot\mathbf{m}_u, \quad F_0 = \mathbf{m}_u\cdot\mathbf{m}_v, \quad G_0 = \mathbf{m}_v\cdot\mathbf{m}_v.$$

其面积元素等于

$$dS_0 = \sqrt{E_0G_0 - F_0^2}\,du\,dv. \tag{2}$$

微分型(1)也称为原曲面的 Gauss 第三微分型。

引用 §1. 3)，取

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_u, \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}_v, \quad \mathbf{c} = \mathbf{m}_u, \quad \mathbf{d} = \mathbf{m}_v.$$

首先由于 $\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m} = 0$，得

$$0 = (\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m})_v = \mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{m} + \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_v,$$

即得 $\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_v = \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{m}_u = -\mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{m}$，即 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$。再由 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$ 可知，$\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}_u = \mathbf{m}\cdot\mathbf{m}_v = 0$，即 $\mathbf{m}$ 垂直于 $\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v$。故 $\mathbf{m}_u \times \mathbf{m}_v$ 与 $\mathbf{m}$ 平行，故与 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 平行，因此 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ 平行。故由 §1, 3)，得

$$(LN - M^2)^2 = (EG - F^2)(E_0G_0 - F_0^2).$$

由此推得

$$K = \sqrt{\frac{E_0G_0 - F_0^2}{EG - F^2}}, \tag{3}$$

也就是

$$dS_0 = KdS.$$

因此有

定理 7. Gauss 曲率的絕对值等于曲面一点的面积元素与其球面映像的对应点的面积元素之比。

非常值得注意的事实是：Gauss 曲率的表达式

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

仅依赖于第一微分型，而不依赖于第二微分型，切实些說，我們有恆等式

$$4(EG - F^2)\ (LN - M^2) = \frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

要証明这个恆等式并不难。例如，取显示式，这恆等式就是

$$4pq(rt - s^2) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + p^2)\frac{\partial}{\partial y}(1 + q^2) - \frac{\partial}{\partial y}(1 + p^2)\frac{\partial}{\partial x}(1 + q^2),$$

而这是显然的。

因此，Gauss 曲率可以仅用 E，F、G 及其对 u, v 的微商表达出来．这是一个深刻的內在的現象．这是发現 Riemann 几何的原始根源之一．所謂 Riemann 几何者，乃是从一个微分二次型出发，研究与之有关的几何性質的学問也．結合現在的情况来說，那些几何現象只与 E，G，F 有关，在曲面論的研究中，就是曲面互相可展的性質．

§11. 曲率中值的几何意义

在曲面 s：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

上任一点 M 处，沿法向 $\mathbf{m}$ 截一段长为 $n(n = n(u, v))$ 的綫段 MM_1，M_1 画一新曲面 s_1，其間的关系是

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r} + n\mathbf{m}. \tag{1}$$

对 u，v 求微商得

$$\mathbf{r}_u^{(1)} = \mathbf{r}_u + n_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}_u, \quad \mathbf{r}_v^{(1)} = \mathbf{r}_v + n_v\mathbf{m} + n\mathbf{m}_v.$$

s_1 的 Gauss 第一微分型的系数是 E_1，F_1，G_1．　假定 $n = n(u, v)$ 及 n_u，n_v 都很小，可以略去二次項，則得

$$E_1 = \mathbf{r}_u^{(1)}\cdot\mathbf{r}_u^{(1)} = (\mathbf{r}_u + n_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}_u)\cdot(\mathbf{r}_u + n_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}_u) =$$
$$= \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u + 2n_u(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}) + 2n(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_u).$$

由 $\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m} = 0$ 推得

$$E_1 = E - 2nL.$$

同理，不难得到

$$F_1 = F - 2nM, \quad G_1 = G - 2nN.$$

由此推得

$$E_1G_1 - F_1^2 = EG - F^2 - 2n(EN - 2FM + GL).$$

仍然略去高阶項．

由于曲率中值等于

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)},$$

所以

$$E_1G_1 - F_1^2 = (EG - F^2)\ (1 - 4nH).$$

开平方，依二項式定理展开 $(1 - 4nH)^{\frac{1}{2}}$，并略去高次項得

$$\sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = \sqrt{EG - F^2}\quad (1 - 2nH).$$

乘以 $du\cdot dv$ 并积分，得到曲面 s 与曲面 s_1 很近时，面积的差額

$$\iint\limits_{(s_1)} \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\, du\, dv - \iint\limits_{(s)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = -\iint\limits_{(s)} 2nH\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

即

$$\delta S = -\iint\limits_{(s)} 2nH dS. \tag{2}$$

这个公式可直接联系于著名的 Plato 間題："給已知的界綫 L，求以 L 为边界的面积

最小的曲面". 现在去証明,在这样曲面上曲率中値应当等于 0 ".

如果在曲面上有某一块 σ, 其上 $H > 0$, 选择 n,使其在 σ 上是正的,而曲面上其余部分等于 0 ,则

$$\delta s = -\iint_{(\sigma)} 2nHds < 0,$$

即以 L 为周界的曲面 s_1 的面积小于 s 的面积, 与假定相违背. 如果有一块其上 $H < 0$, 則选 n、使在 σ 上为負,而其余部分为 0. 同样, s 的面积不是最小,因此

曲率中値等于 0 的曲面称为最小曲面.

§12. 活 动 标 架

假定已經取了正交坐标綫,也就是假定了 $F = 0$,即

$$\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u = E, \quad \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v = 0, \quad \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v = G,$$

$$\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_u = -L, \quad \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}_v + \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{m}_u = -M, \quad \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{m}_v = -N.$$

三单位矢量:

$$\mathbf{m}, \quad \mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{G}}.$$

称为活动标架. 活动标架是互相正交的三个单位矢量. 每一点有一个活动标架, 任何一个矢量都可以分解为这三坐标矢量的和,如 Freuet-Serret 公式一样我們可以研究这三坐标矢量对 u, 对 v 的微商对这三坐标矢量的分解式.

由于正交及单位性質,我們知道

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_1}{dv} &= \qquad\quad q\mathbf{t}_2 + s_1\mathbf{m}, \\ \frac{d\mathbf{t}_2}{dv} &= -q\mathbf{t}_1 \qquad\quad + s_2\mathbf{m}, \\ \frac{d\mathbf{m}}{dv} &= -s_1\mathbf{t}_1 - s_2\mathbf{t}_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

及

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_1}{du} &= \qquad\quad p\mathbf{t}_2 + r_1\mathbf{m}, \\ \frac{d\mathbf{t}_2}{du} &= -p\mathbf{t}_1 \qquad\quad + r_2\mathbf{m}, \\ \frac{d\mathbf{m}}{du} &= -r_1\mathbf{t}_1 - r_2\mathbf{t}_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

现在定出 p, q, r_1, r_2, s_1, s_2, 首先(1)中第一式与矢量 $\mathbf{t}_2$ 作内积,得

$$q = \mathbf{t}_2\cdot\mathbf{t}_{1v}.$$

由于

$$\mathbf{t}_{1v} = \left(\frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}\right)_v = \frac{\mathbf{r}_{uv}}{\sqrt{E}} + \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)_v\mathbf{r}_u,$$

$\mathbf{r}_u$ 与 $\mathbf{t}_2$ 正交，所以

$$q=\frac{\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_{uv}}{\sqrt{EG}}=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v)=\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}. \tag{3}$$

同法，

$$p=-\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}. \tag{4}$$

又

$$r_1=\left(\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{t}_1\right)\cdot\mathbf{m}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{E}}\right)\cdot\mathbf{m}=\frac{\mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{m}}{\sqrt{E}}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{m}=\frac{L}{\sqrt{E}}.$$

同法得

$$r_1=\frac{L}{\sqrt{E}},\quad r_2=\frac{M}{\sqrt{G}},\quad s_1=\frac{M}{\sqrt{E}},\quad s_2=\frac{N}{\sqrt{G}}.$$

即得

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}_{1u}&=\qquad\qquad\quad -\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\mathbf{t}_2+\frac{L}{\sqrt{E}}\mathbf{m},\\ \mathbf{t}_{2u}&=\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\mathbf{t}_1\qquad\qquad\quad+\frac{M}{\sqrt{G}}\mathbf{m},\\ \mathbf{m}_u&=-\frac{L}{\sqrt{E}}\mathbf{t}_1-\frac{M}{\sqrt{G}}\mathbf{t}_2\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

及

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}_{1v}&=\qquad\qquad\quad \frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\mathbf{t}_2+\frac{M}{\sqrt{E}}\mathbf{m},\\ \mathbf{t}_{2v}&=-\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\mathbf{t}_1\qquad\qquad\quad+\frac{N}{\sqrt{G}}\mathbf{m},\\ \mathbf{m}_v&=-\frac{M}{\sqrt{E}}\mathbf{t}_1-\frac{N}{\sqrt{G}}\mathbf{t}_2.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

命

$$\omega=p\,du+q\,dv,\quad \omega_1=r_1du+s_1dv,\quad \omega_2=r_2du+s_2dv,$$

則活动标架的全微分表示形式有

$$\left.\begin{aligned}d\mathbf{t}_1&=\qquad\quad -\omega\mathbf{t}_2+\omega_1\mathbf{m},\\ d\mathbf{t}_2&=-\omega\mathbf{t}_1\qquad\quad+\omega_2\mathbf{m},\\ d\mathbf{m}&=-\omega_1\mathbf{t}_1-\omega_2\mathbf{t}_2,\end{aligned}\right\}$$

这儿

$$\omega=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}(E_vdu-G_udv),\quad \omega_1=\frac{L}{\sqrt{E}}du+\frac{M}{\sqrt{E}}dv,\ \omega_2=\frac{M}{\sqrt{G}}du+\frac{N}{\sqrt{G}}dv.$$

附記． 如果有对应关系的二曲面为

$$s:\qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),$$
$$s_1:\qquad \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(u,v),$$

并且如果它們有相同的第一、第二微分二次型，那末它們所对应的活动标架适合相同的微分方程(5)与(6)。从曲綫論中处理 Frenet-Serret 公式的方法出发，我們能够証明，經过平移、旋轉可以把 s 与 s_1 互变。

更本质的問題是：寻求条件判断任何二曲面能否經平移，旋轉互变，也就是在变形

$$u_1=\varphi(u,v),\quad v_1=\psi(u,v)$$

下一对二次型

$$Edu^2+2F\,du\,dv+Gdv^2,\quad Ldu^2+2Mdu\,dv+Ndv^2$$

是否能同时变为另一对：

$$E_1du_1^2+2F_1du_1\,dv_1+G_1dv_1^2,\quad L_1du_1^2+2M_1du_1\,dv_1+N_1dv_1^2$$

的問題。本书不作答复。

§ 13. 曲面的可展性

平放着的紅旗象征着一个平面，而一面迎风飘揚的紅旗，在每一时刻，就是一个曲面。两个曲面具有这样的关系，称为互相可展关系。确切些說：

如果有二曲面 s 与 s_1，共間建立了以下的点点对应关系：由参变数 u, v 定义

$$s:\qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),$$

$$s_1:\qquad \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(u,v),$$

当 u, v 取值时 s, s_1 上各有一点 M、M_1，它們称为对应点。当

$$u=\varphi(t),\quad v=\psi(t)$$

时，s, s_1 上各画一条曲綫。如果对应曲綫段的长度相等时，这两曲面称为彼此可展，也就是说，s 与 s_1 所定义的第一微分式的系数互等，即

$$E=E_1,\quad F=F_1,\quad G=G_1.$$

上节的結果說明了，可展曲面的 Gauss 曲率相等。

关于可展曲面的本質問題是：給了两个曲面，我們是否可以引进合适的参变数，使它們成为可展关系；或者这样說，給了两个微分二次型

$$E(u,v)du^2+2F(u,v)du\,dv+G(u,v)dv^2$$

及

$$E_1(u_1,v_1)du_1^2+2F_1(u_1,v_1)du_1\,dv_1+G_1(u_1,v_1)dv_1^2,$$

我們能否找到一变形：

$$u_1=\varphi(u,v),\quad v_1=\psi(u,v),$$

把其一变为其他。

現在，我們不深入討論这一問題。

§ 14. 曲面族与偏微分方程

从一个一級常微分方程

$$\phi(x,y,p)=0,\quad p=\frac{dy}{dx}\tag{1}$$

可以解得

$$f(x,y,c)=0.\tag{2}$$

这代表一个曲綫族。

反之，从一个曲綫族(2)，求微商得

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}p=0,\tag{3}$$

与(2)．消去 c，卽得原来的微分方程(1)．不仅如此，如果把 c 也看成 x 的函数，则微商(2)得

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}p+\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0. \tag{4}$$

如果

$$\frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0, \tag{5}$$

则(4)与(3)完全一致，因此也得出同样的微分方程(1)来．

(5)說明

$$\frac{dc}{dx}=0 \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial c}=0.$$

第一式說明 c 是常数，这就是曲綫族．第二式与(2)联立，消去 c，卽得曲綫族(2)的包絡，也得出方程(1)的奇异解．

我們現在試将这个处理方法推广到曲面的情形，卽考虑一个有二参变数的曲面族

$$f(x,y,z;a,b)=0. \tag{6}$$

命

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

则由(6)及

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0,\\&\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

消去 a、b、可得一个偏微分方程：

$$\phi(x,y,z,p,q)=0. \tag{8}$$

如果把 a，b 也看成 x，y 的函数，则得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

与(7)相比較，如果

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0,\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

则(9)与(7)完全一样．因而也适合于偏微分方程(8)，从(10)可以解得

$$J\frac{\partial f}{\partial a}=0,\quad J\frac{\partial f}{\partial b}=0,$$

这儿

$$J=\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}.$$

如果 $J\neq 0$，则

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial b}=0, \tag{11}$$

也就是函数 f 与 a,b 无关. 如果

$$J = 0,$$

这說明 a 与 b 是函数相关的, 也就是 $b = \varphi(a)$, φ 是任意函数. 代入(6)式,对 a 微分得出

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a) = 0. \tag{12}$$

(6)与(12)联立仍得一解.

因此偏微分方程(8),旣可能有(6)作为解答,称为完全解;也可以从(6)与(11)中消去 a, b 而得出解答,称为奇异解. 更可以引进一个任意函数 $a = \varphi(b)$, 由 (6) 及 (12)消去 a, 也得一解答, 称为一般解.

几何的說法是:完全解定义一族有两个参数的曲面族,而奇异解是其包絡面. 在曲面族中,任取一个一参数的分族,而分族的包絡是一般解.

例 1. 考虑与原点距离为 1 的平面族:

$$ax + by + cz = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} = 1. \tag{13}$$

由

$$a + cp = 0, \qquad b + cq = 0$$

可知,这曲面族适合于偏微分方程:

$$(xp + yq - z)^2 = 1 + p^2 + q^2. \tag{14}$$

(13)当然是(14)的完全解. 曲面族(13)的包絡是单位球

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{15}$$

这是奇异解.而球面上的一点只与(13)中的一个平面相切.

一般解可由

$$ax + y\varphi(a) + z[1 - a^2 - \varphi^2(a)]^{\frac{1}{2}} = 1 \tag{16}$$

及

$$x + y\varphi'(a) - z\frac{a + \varphi(a)\varphi'(a)}{(1 - a^2 - \varphi^2(a))^{1/2}} = 0 \tag{17}$$

得知,这儿 $\varphi(a)$ 是任意一个函数,这是平面族(16)的包絡. 对应一个 a,代表一条直綫. 因此(16),(17)所代表的曲面是由直綫的移动所成的. 在点

$$x = a, \quad y = \varphi(a), \quad z = (1 - a^2 - \varphi^2(a))^{1/2},$$

(16),(17)重合,即(16),(17)表示切于此点的直綫. 因此球面上一曲綫其上每一点有一切綫,这些切直綫所成的面就是一个一般解. 特别取函数 $\varphi(a) = 0$, 則由(16),(17)得

$$\frac{a}{x} = \frac{(1 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{z} = \frac{1}{x^2 + z^2},$$

因而得圆柱

$$x^2 + z^2 = 1.$$

例 2. 方程

$$pq = 4xy$$

有完全解

$$z = \frac{1}{a}x^2 + ay^2 + b.$$

对 a, b 微分得

$$0 = -\frac{1}{a^2}x^2 + y^2, \quad 0 = 1.$$

故无奇异解，命 $b = \varphi(a)$，而一般解是

$$z = \frac{1}{a}x^2 + ay^2 + \varphi(a), \quad 0 = -\frac{1}{a^2}x^2 + y^2 + \varphi'(a).$$

特别，取 $\varphi(a) = c$（常数），解得 $a = \frac{x}{y}$，即一般解的特例．

$$z = 2xy + c.$$

例 3．　微分方程

$$px - qy = (z - xy)^2$$

有完全解

$$xe^{\frac{1}{z-xy}} = \frac{xy + a}{xy + b},$$

也有完全解

$$f = \log x + \frac{1}{z - xy} - \log(xy + a) + \log(xy + b) = 0.$$

无奇异解．

命 $b = \varphi(a)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{1}{xy + a} + \frac{b'}{xy + b} = 0, \quad \frac{xy + b}{xy + a} = b'.$$

因而

$$\frac{1}{z - xy} = -\log x - \log b', \quad z - xy = \frac{-1}{\log x + \log b'}.$$

如取 $b = \lambda a$，则 $b' = \lambda$，λ 是常数．命 $\lambda \to \infty$，则

$$z - xy = 0$$

也是一解．

習題 1．　$z = pq$ 有一完全积分是

$$4z = \left(ax + \frac{y}{a} + b\right)^2,$$

問解

$$4z - 2xy = (x^2 + y^2)\sec\alpha + (x^2 - y^2)\operatorname{tg}\alpha$$

是怎样的解？

習題 2．　$z = px + qy$ 的一个完全积分是

$$\log z = a\log x + (1 - a)\log y + b,$$

問

$$z = y\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

是怎样的解？

習題 3．　$z = px + qy + pq$ 的一个完全积分是 $z = ax + by + ab$，

問

$$z + 3xy = 0$$

是怎样的解？

习题 4.　$xp + 2yq = 2\left(z - \frac{x^2}{y}\right)^2$ 有一个完全积分

$$e^{\frac{1}{z-x^2/y}} = a\frac{x^2}{y^2} + \frac{b}{y},$$

問

$$yz = x^2$$

是怎样的解?

习题 5.　$3px + qy + q^3x^2 = 0$ 有两个完全解

$$z = a - \frac{1}{3}b^3x + byx^{-\frac{1}{3}},\ z = a' + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}(x^2 + 2b'x)^{-\frac{1}{2}},$$

求証其一是另一一般解的特例.

补　　充

用张量分析来处理曲面論

我們把已經講过的曲面論用张量分析的符号重新講一下，其目的是較具体地介紹张量分析，为将来正式学习 Riemannian 几何作一准备.

§15. 第一基本型

我們还是用符号

$$\mathbf{r} = (x, y, z),\quad x = x(u, v),\quad y = y(u, v),\quad z = z(u, v) \tag{1}$$

代表一个曲面. 我們已往的研究,主要是从以下的三个矢量

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{r},\ \mathbf{r}_v = \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{r} \tag{2}$$

及

$$\mathbf{m} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)/|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \tag{3}$$

出发.

我們将符号略加改变，把变数 u, v 改写为 u^1, u^2 (注意，幷不是 u 的一次方与二次方)、命

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}\mathbf{r} = \partial_1\mathbf{r},\quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\mathbf{r} = \partial_2\mathbf{r},$$

而

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_j\,du^i\,du^j.$$

我們用 Einstein 約定,把和号略去,以后如果一項中同一指标出現二次,我們約定其意义是对此指标求和. 例如，a_ib^i 就是代表 $a_1b^1 + a_2b^2$. 如此,则可以写成为

$$ds^2 = g_{ij}\,du^i\,du^j,\quad g_{ij} = \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_j.$$

用老符号,則有

$$g_{11} = E,\quad g_{12} = g_{21} = F,\quad g_{22} = G.$$

由 g_{ij} 所組成的行列式等于 $EG-F^2$, 当然不等于 0, 所以有滿足于

$$g^{hi}g_{ji}=\delta_j^h$$

的 g^{hi} 存在,此处

$$\delta_j^h=\begin{cases}0 & 若\ h\neq j,\\ 1 & 若\ h=j.\end{cases}$$

这称为 Kronecker 符号. 不难算出

$$g^{11}=\frac{G}{EG-F^2},\quad g^{12}=g^{21}=\frac{-F}{EG-F^2},\quad g^{22}=\frac{E}{EG-F^2}.$$

曲面的切矢量 $\mathbf{a}$ 可以写成为

$$\mathbf{a}=a^h\mathbf{r}_h,$$

其长度的平方等于

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=(a^h\mathbf{r}_h)\cdot(a^l\mathbf{r}_l)=\mathbf{r}_h\cdot\mathbf{r}_l a^h a^l=g_{hl}a^h a^l.$$

两个矢量 $\mathbf{a}=a^h\mathbf{r}_h$, $\mathbf{b}=b^l\mathbf{r}_l$ 的夾角的余弦等于

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})}}=\frac{g_{ij}a^ib^j}{\sqrt{(g_{ij}a^ia^j)(g_{st}b^sb^t)}}.$$

单位法矢量等于

$$\mathbf{m}=\frac{1}{\sqrt{g}}(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v),$$

这里 $g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=EG-F^2.$

§ 16. 张　　量

换变数

$$u^i=u^i(u'^1,u'^2),\quad i=1,2, \tag{1}$$

仍用 Einstein 約定不写和号,則显然有

$$du^i=\frac{\partial u^i}{\partial u'^j}du'^j \tag{2}$$

及任一函数 φ 的梯度适合

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}=\frac{\partial u'^j}{\partial u^i}\frac{\partial\varphi}{\partial u'^j}. \tag{3}$$

又如

$$g_{ij}du^i\,du^j=g'_{st}du'^s\,du'^t=g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u'^s}\frac{\partial u^j}{\partial u'^t}du'^s\,du'^t,$$

即得

$$g'_{st}=g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial u'^s}\frac{\partial u^j}{\partial u'^t}. \tag{4}$$

从(2),(3),(4)极易推得

$$du'^j=\frac{\partial u'^j}{\partial u^i}du^i,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u'^j}=\frac{\partial u^i}{\partial u'^j}\frac{\partial\varphi}{\partial u^i}$$

及

$$g_{ij}=g'_{st}\frac{\partial u'^s}{\partial u^i}\frac{\partial u'^t}{\partial u^j}. \tag{4'}$$

现在求証

$$g'^{st}=g^{ij}\frac{\partial u'^s}{\partial u^i}\frac{\partial u'^t}{\partial u^j}. \tag{5}$$

由

$$g^{lk}g_{hk}=\delta^l_h$$

及(4')得

$$g^{kl}g'_{st}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\frac{\partial u'^t}{\partial u^h}=\delta^l_h.$$

乘以 $\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}$ 及对 l 加之得

$$g^{kl}g'_{st}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\frac{\partial u'^t}{\partial u^h}\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}=\frac{\partial u'^j}{\partial u^h}.$$

由于 $\frac{\partial u'^j}{\partial u^h}=\delta^j_t\frac{\partial u'^t}{\partial u^h}$，故得

$$\left(g^{kl}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\cdot\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}g'_{st}-\delta^j_t\right)\frac{\partial u'^t}{\partial u^h}=0.$$

由于 $\frac{\partial(u'^1,u'^2)}{\partial(u^1,u^2)}\neq 0$，所以

$$\left(g^{kl}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}\right)g'_{st}=\delta^j_t,$$

即

$$g'^{sj}=g^{kl}\frac{\partial u'^s}{\partial u^k}\frac{\partial u'^j}{\partial u^l}.$$

这証明了(5)式。

由(2),(3),(4),(5)可以概括出一个概念。

如果有如下的关系：

$$T'^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}=T^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}\frac{\partial u'^{r_1}}{\partial u^{s_1}}\cdots\frac{\partial u'^{r_m}}{\partial u^{s_m}}\frac{\partial u^{q_1}}{\partial u'^{p_1}}\cdots\frac{\partial u^{q_n}}{\partial u'^{p_n}}, \tag{6}$$

T 是 u^1,u^2 的函数，T' 是 u'^1,u'^2 的函数，则 $T^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}$ 称为 m 阶逆变，n 阶协变的张量。

上面的例子説明，矢量 (du^1,du^2) 是一級逆变张量，一函数 φ 的梯度 $\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\ \frac{\partial}{\partial u^2}\right)$ 是一級协变张量，g_{ij} 是二級协变张量，g^{ij} 是二級逆变张量。

关于张量有以下的一些代数运算。

1）二同一类型的张量的和、差仍为张量，其理由是，如果

$$T'^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}=T^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}\frac{\partial u'^{r_1}}{\partial u^{s_1}}\cdots\frac{\partial u'^{r_m}}{\partial u^{s_m}}\frac{\partial u^{q_1}}{\partial u'^{p_1}}\cdots\frac{\partial u^{q_n}}{\partial u'^{p_n}},$$

$$S'^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}=S^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}\frac{\partial u'^{r_1}}{\partial u^{s_1}}\cdots\frac{\partial u'^{r_m}}{\partial u^{s_m}}\frac{\partial u^{q_1}}{\partial u'^{p_1}}\cdots\frac{\partial u^{q_n}}{\partial u'^{p_n}},$$

则 $T' + S'$ 与 $T + S$ 也适合同样的关系式.

2) 二张量的乘积定义为

$$T^{r_1\cdots r_m t_1\cdots t_l}_{p_1\cdots p_n s_1\cdots s_h} = T^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}\ T^{t_1\cdots t_l}_{s_1\cdots s_h}.$$

这是一个 $l + m$ 阶逆变 $n + h$ 阶协变的张量.

3) 縮合. 把一个张量的上标与一个下标等同而加之,得出的結果仍然是一个张量.

例如,

$$K^{r_2\cdots r_m}_{q_2\cdots q_n} = T^{s_1 r_2\cdots r_m}_{s_1 q_2\cdots q_n}$$

是一个 $m - 1$ 級逆变 $n - 1$ 級协变的张量. 最簡单的例子是一个逆变矢量 u^i 与一个协变张量 v_j 的乘积

$$u^i v_j,$$

經过縮合得內积 $u^i v_i$. 张量积 $g_{ij}u^l u^k$ 可以經过两次縮合成为 $g_{ij}u^i u^j$. 如果經过几度縮合之后,并无自由指标,则結果是一純量. $u^i v_i$ 及 $g_{ij}u^i u^j$ 都是例子.

在应用中經常出现,用 g_{ij} 来"降低"张量的高标和用 g^{ij} 来"提高"张量的低标的方法. 例如,张量 T_{ijk} 就可由 g^{ij}, g_{ij} 升降,如下法:

$$g^{il}T_{ijk} = T^l_{jk};\quad g^{jl}T_{ijk} = T^l_{ik};\quad g^{kl}T_{ijk} = T^l_{ij},\quad g^{il}g^{jm}T_{ijk} = T^{lm}_k,$$
$$g^{il}g^{km}T_{ijk} = T^{lm}_j,\quad g^{il}g^{jm}g^{kp}T_{ijk} = T^{lmp}. \tag{7}$$

同样

$$T^{jk}_l = g_{il}T^{ijk};\quad T^k_{lm} = g_{il}g_{jm}T^{ijk},\quad T_{lmp} = g_{il}g_{jm}g_{kp}T^{ijk}.$$

注意. 以上的規則是可逆的,如由(7)的第一式可得

$$g_{lm}T^l_{jk} = g_{lm}(g^{il}T_{ijk}) = \delta^i_m T_{ijk} = T_{mjk}.$$

有时为了表示被"提升""下降"后的原空位,用点表示之,例如(7)第一式可以記为 $T_{\cdot}{}^l{}_{jk}$.

4) 张量的求商法則.

命 $T^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_n}$ 及 $T'^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_n}$ 各为一組 x^i 及 x'^i 的函数. 如果对任意逆变矢量 λ^i 与 λ'^i 及任一足标 p_h, q_h 常使

$$T^{r_1\cdots r_m}_{p_1\cdots p_h\cdots p_n}\lambda^{p_h},\quad T'^{s_1\cdots s_m}_{q_1\cdots q_h\cdots q_n}\lambda'^{q_h}$$

成为张量,则原来的 T 就是张量.

例如, T^{ij}_{klm} 与 T'^{pq}_{rst} 各为 x^i 与 x'^i 的函数,而且

$$T'^{pq}_{rst}\lambda'^s = T^{ij}_{klm}\lambda'^l \frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^m}{\partial u'^t},$$

则

$$T'^{pq}_{rst}\lambda'^s = T^{ij}_{klm}\lambda'^s \frac{\partial u^l}{\partial u'^s}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^m}{\partial u'^t},$$

即

$$\left(T'^{pq}_{rst} - T^{ij}_{klm}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}\frac{\partial u'^q}{\partial u^j}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r}\frac{\partial u^l}{\partial u'^s}\frac{\partial u^m}{\partial u'^t}\right)\lambda'^s = 0$$

对所有的 λ' 都对,所以其括弧中的表式等于 0, 即 T^{ij}_{klm} 是张量.

张量的特点是：从一个坐标系变为另一个坐标系，张量的变化是十分明显的。例如，我們証明了，在一特定的坐标系中张量的所有支量都等于 0，則在任何坐标系中都对。也极易看出，a^ib_i，$g_{ij}\lambda^i\lambda^j$ 等都是不因坐标而变化的不变量。

§17. 基本方程之一——Gauss 方程

在 §1 中已經将三矢量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ 作为我們研究曲面性質的出发点，我們現在研究它們的偏微商。把矢量 $\partial_j\mathbf{r}_i$ 按 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m}$ 分解，得

$$\partial_j\mathbf{r}_i = \Gamma^h_{ji}\mathbf{r}_h + H_{ji}\mathbf{m} \tag{1}$$

現在算出 Γ^h_{ji} 与 H_{ji} 的表示式。由于 $\partial_j\mathbf{r}_i = \partial_j(\partial_i\mathbf{r}) = \partial_i(\partial_j\mathbf{r}) = \partial_i\mathbf{r}_j$，可得对称性

$$\Gamma^h_{ji} = \Gamma^h_{ij}, \quad H_{ji} = H_{ij}. \tag{2}$$

求(1)与 $\mathbf{m}$ 的內积，得出

$$\partial_j\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{m} = H_{ji}. \tag{3}$$

微商 $\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{m} = 0$ 得 $\partial_j\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{m} = -\mathbf{r}_i\partial_j\mathbf{m}$，因此

$$H_{ji} = -\mathbf{r}_i\cdot\partial_j\mathbf{m}. \tag{4}$$

所以

$$H_{ij}du^idu^j = -(\mathbf{r}_idu^i)(\partial_j\mathbf{m}du^j) = -d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{m},$$

这就是第二基本型，卽

$$H_{11} = L, \quad H_{12} = H_{21} = M, \quad H_{22} = N.$$

H_{ij} 也是二級协变张量。

再求 Γ^h_{ji}，求

$$g_{ia} = \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_a$$

对 u^j 的微商。再以(1)代入得

$$\partial_jg_{ia} = (\partial_j\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_i\cdot(\partial_j\mathbf{r}_a) = \Gamma^h_{ji}\mathbf{r}_h\cdot\mathbf{r}_a + \Gamma^b_{ja}\mathbf{r}_b\cdot\mathbf{r}_i,$$

卽得

$$\partial_jg_{ia} = \Gamma^b_{ji}g_{ba} + \Gamma^b_{ja}g_{ib}. \tag{5}$$

交换 i，j 得

$$\partial_ig_{ja} = \Gamma^b_{ij}g_{ba} + \Gamma^b_{ia}g_{jb}. \tag{6}$$

再交换 i，a 得

$$\partial_ag_{ji} = \Gamma^b_{aj}g_{bi} + \Gamma^b_{ai}g_{jb}. \tag{7}$$

(5)，(6)相加，減去(7)式，得出

$$\partial_jg_{ia} + \partial_ig_{ja} - \partial_ag_{ji} = 2\Gamma^b_{ij}g_{ba}.$$

由 $g_{ba}g^{la} = \delta^l_b$ 得

$$2\Gamma^l_{ij} = (\partial_jg_{ia} + \partial_ig_{ja} - \partial_ag_{ji})g^{la}.$$

命

$$[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}\right)$$

及

$$\left\{ {h \atop ij} \right\} = [ij, k]g^{hk}.$$

这各称为 Christoffel 第一类、第二类符号，而得

$$\Gamma^l_{ij} = \left\{ {l \atop ij} \right\},$$

因此有

$$\partial_i \mathbf{r}_j = \begin{Bmatrix} h \\ ji \end{Bmatrix} \mathbf{r}_h + H_{ji}\mathbf{m}. \tag{8}$$

这称为 Gauss 方程.

用原符号 E, F, G 及 u, v 写出

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 21 \end{Bmatrix} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 11 \end{Bmatrix} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.$$

我們的問題是：Christoffel 符号是否成一张量. 答案是否定的.

从

$$g'_{pq} = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q}$$

得出

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial u'^r} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} + g_{ij}\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^q \partial u'^r} + \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^r}\right),$$

交换指标易得

$$\frac{\partial g'_{rq}}{\partial u'^p} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} + g_{ij}\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^r} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^q \partial u'^p} + \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^r}\right)$$

$$\frac{\partial g'_{pr}}{\partial u'^q} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} + g_{ij}\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^q \partial u'^r} + \frac{\partial u^j}{\partial u'^r} \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^q}\right).$$

此二式之和减去前式除 2 得

$$[pq, r]' = [ij, k] \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} \frac{\partial u^k}{\partial u'^r} + g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u'^r} \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^p \partial u'^q}, \tag{9}$$

这儿 $[pq, r]'$ 是由张量 g'_{ij} 所换成的 Christoffel 符号.

又由

$$g'^{rs} = g^{hl} \frac{\partial u'^s}{\partial u^h} \frac{\partial u'^r}{\partial u^l}$$

推得

$$g'^{rs} \frac{\partial u^h}{\partial u'^s} = g^{hl} \frac{\partial u'^r}{\partial u^l}.$$

以此乘(9)的两边，再对 r 求和得

$$\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}' \frac{\partial u^h}{\partial u'^s} = [ij, k] \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} g^{hl}\delta_l^k + g_{ij} g^{hl}\delta_l^i \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^p \partial u'^q},$$

即得

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^p \partial u'^q} + \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} = \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}' \frac{\partial u^h}{\partial u'^s}. \tag{10}$$

(9)与(10)説明了，$[ij, h]$ 与 $\begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix}$ 都非张量.

§ 18. 基本方程之一——Weingarten 方程

再求 $\partial_i\mathbf{m}$，我們也可以写成为

$$\partial_i\mathbf{m} = K_i^h\mathbf{r}_h + L_i\mathbf{m}. \tag{1}$$

由 $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$，所以 $\partial_i\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 0$，因此 $L_i = 0$. 又微分 $\mathbf{r}_j\cdot\mathbf{m} = 0$，得

$$\partial_i\mathbf{r}_j\cdot\mathbf{m} + \mathbf{r}_j\cdot\partial_i\mathbf{m} = 0.$$

以 Gauss 方程代入此式，得

$$H_{ij} + \mathbf{r}_j\cdot\partial_i\mathbf{m} = 0.$$

因此，由(1)得

$$H_{ij} = -K_i^h\mathbf{r}_j\cdot\mathbf{r}_h = -K_i^h g_{jh}.$$

因此

$$K_i^l = -H_{ij}g^{jl} = -H_i^{\cdot l}.$$

因此得 Weingarten 方程

$$\partial_i\mathbf{m} = -H_i^{\cdot l}\mathbf{r}_l. \tag{2}$$

命

$$(\partial_j\mathbf{m})\cdot(\partial_i\mathbf{m}) = N_{ji},$$

則得

$$N_{ji}\,du^j\,du^i.$$

称为第三基本型，

$$N_{11} = E_0,\quad N_{12} = N_{21} = F_0,\quad N_{22} = G_0.$$

不难証明，N_{ji} 也是二級协变张量. 利用 Weingarten 方程，可以求出

$$N_{ji} = (\partial_j\mathbf{m})\cdot(\partial_i\mathbf{m}) = (-H_j^{\cdot b}\mathbf{r}_b)(-H_i^{\cdot a}\mathbf{r}_a) = \\ = H_j^{\cdot b}H_i^{\cdot a}\mathbf{r}_b\cdot\mathbf{r}_a = g_{ba}H_j^{\cdot b}H_i^{\cdot a}.$$

或

$$N_{ji} = H_{jb}H_{ia}g^{ba}.$$

上节及本节之結果可以概括成为矩陣形式:

$$\partial_1\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{m}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & H_{11}\\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & H_{12}\\ -H_1^{\cdot 1} & -H_1^{\cdot 2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{m}\end{pmatrix},\qquad \partial_2\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{m}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & H_{21}\\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & H_{22}\\ -H_2^{\cdot 1} & -H_2^{\cdot 2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{m}\end{pmatrix},$$

卽三矢量 $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ 的一級偏微商公式. 下节的問題在于二級偏微商，并注意

$$\partial_1\partial_2 = \partial_2\partial_1.$$

§ 19. Gauss 与 Codazzi 方程

由 Gauss 方程

$$\partial_k\partial_j\mathbf{r}_i = \partial_k\left(\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}\mathbf{r}_h + H_{ji}\mathbf{m}\right) = \partial_k\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}\mathbf{r}_h + \begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}\partial_k\mathbf{r}_h + \\ + \partial_k H_{ji}\mathbf{m} + H_{ji}(\partial_k\mathbf{m}) = \left[\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}h\\ ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ ji\end{Bmatrix} - H_k^{\cdot h}H_{ji}\right]\mathbf{r}_h + \\ + \left[\partial_k H_{ji} + \begin{Bmatrix}a\\ ji\end{Bmatrix}H_{ka}\right]\mathbf{m}.$$

在这式子里交换 h 与 i, 然后相减得

$$0 = \left[\partial_k \left\{ {h \atop ji} \right\} - \partial_i \left\{ {h \atop ki} \right\} + \left\{ {h \atop ka} \right\} \left\{ {a \atop ji} \right\} - \left\{ {h \atop ja} \right\} \left\{ {a \atop ki} \right\} - H_k^{\cdot h} H_{ji} - H_j^{\cdot h} H_{ki}\right] \mathbf{r}_h +$$

$$+ \left[\partial_k H_{ji} - \partial_i H_{ki} + \left\{ {a \atop ji} \right\} H_{ka} - \left\{ {a \atop ki} \right\} H_{ja}\right] \mathbf{m}.$$

由于 $\mathbf{r}_h$ 与 $\mathbf{m}$ 綫性无关, 所以

$$\partial_k \left\{ {h \atop ji} \right\} - \partial_i \left\{ {h \atop ki} \right\} + \left\{ {h \atop ka} \right\} \left\{ {a \atop ji} \right\} - \left\{ {h \atop ja} \right\} \left\{ {a \atop ki} \right\} = H_k^{\cdot h} H_{ji} - H_j^{\cdot h} H_{ki},$$

$$\partial_k H_{ji} - \partial_i H_{ki} + \left\{ {a \atop ji} \right\} H_{ka} - \left\{ {a \atop ki} \right\} H_{ja} = 0.$$

因此, 如果命

$$R_{kji}^{\cdots h} = \partial_k \left\{ {h \atop ji} \right\} - \partial_j \left\{ {h \atop ki} \right\} + \left\{ {h \atop ka} \right\} \left\{ {a \atop ji} \right\} - \left\{ {h \atop ja} \right\} \left\{ {a \atop ki} \right\} \tag{1}$$

及

$$\nabla_k H_{ji} = \partial_k H_{ji} - \left\{ {a \atop kj} \right\} H_{ai} - \left\{ {a \atop ki} \right\} H_{ia}, \tag{2}$$

則上两式可以写成为

$$R_{kji}^{\cdots h} = H_k^{\cdot h} H_{ji} - H_j^{\cdot h} H_{ki} \tag{3}$$

及

$$\nabla_k H_{ji} = \nabla_j H_{ki}. \tag{4}$$

这两式子分别称为 Gauss 方程与 Codazzi 方程.

Gauss 与 Codazzi 方程可以看成为 Gauss, Weingarten 方程的求解条件, 說得更具体些, 給了两組函数 E, F, G 与 L, M, N. 如果 $EG - F^2 > 0$ 及它們适合 Gauss 及 Codazzi 方程, 則有一个曲面以此为第一、第二微分型. 除去一个位移这曲面是唯一决定的, 我們不証明这个定理, 但是可以把它說得更明确些: 存在函数

$$x = x(u^1, u^2), \quad y = y(u^1, u^2), \quad z = z(u^1, u^2)$$

使 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 适合于

$$\partial_i \mathbf{r} = \mathbf{r}_i, \ \partial_j \mathbf{r}_i = \left\{ {h \atop ji} \right\} \mathbf{r}_h + H_{ji} \mathbf{m}, \ \partial_j \mathbf{m} = - H_j^{i} \mathbf{r}_i$$

及

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = g_{ij}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_i = 0.$$

§20. 曲率张量

命

$$R_{kjih} = R_{kji}^{\cdots a} g_{ah}.$$

这 R_{kjih} 有以下的性質:

$$R_{kjih} = -R_{jkih}, \quad R_{kjih} = -R_{kjhi}, \quad R_{kjih} = R_{ihkj}, \tag{1}$$

$$R_{kjih} + R_{jikh} + R_{ikjh} = 0. \tag{2}$$

最后一式称为 Bianchi 恆等式. 由 (19.3),

$$R_{kjih} = H_{kh} H_{ji} - H_{jh} H_{ki}. \tag{3}$$

这称为 Riemann 第一类曲率张量，而 R^{a}_{kij} 称为第二类曲率张量. 现在直接証明，它确是一个张量.

前已算得

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^p \partial u'^q} + \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial u^i}{\partial u'^p} \frac{\partial u^j}{\partial u'^q} = \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}' \frac{\partial u^h}{\partial u'^s}. \tag{4}$$

对 u'^r 求偏微商，再减去将此式經 q, r 互换而得出的式子，则

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\begin{Bmatrix} h \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u^k}\begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} h \\ ij \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^q}\frac{\partial u^j}{\partial u'^r} - \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^p \partial u'^r}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u'^q}\begin{Bmatrix} s \\ pr \end{Bmatrix}' - \frac{\partial}{\partial u'^r}\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}'\right)\frac{\partial u^h}{\partial u'^s} + \begin{Bmatrix} s \\ pr \end{Bmatrix}' \frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^s \partial u'^q} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}' \frac{\partial^2 u^h}{\partial u'^s \partial u'^r}.$$

此式中的二阶偏微商用(4)代入，则得

$$R^h_{ijk}\frac{\partial u^i}{\partial u'^p}\frac{\partial u^j}{\partial u'^q}\frac{\partial u^k}{\partial u'^r} = R'^s_{pqr}\frac{\partial u^h}{\partial u'^s}.$$

我們为什么再給一个直接証明？ 表达式 (3) 与第二基本微分型有关. 但无論是对 Christoffel 符号与Riemann 张量来說，都只与第一基本微分型有关. 因此，开了一扇門，单从第一基本微分型出发可能进行不少深入的研究——这样就誕生了 Riemannian 几何学.

现在举一个例来說明张量的好处. 从最簡单的 $z=0$ 平面出发，它的第一微分二次型是

$$dx^2 + dy^2.$$

换变数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$，得出一个直覚上很不清楚的东西. 对原来的表达式来說，Christoffel 符号等于 0，但換了变数之后却并无保証. 用张量来說，那就可以知道了，不管你用什么参变量，Riemann 张量总是等于 0 的.

由(3)可知

$$R_{1212} = H_{12}H_{21} - H_{11}H_{22} = M^2 - LN.$$

經过关系 (1) 所得出的另一些支量可能非 0，但其它的支量一定等于 0. 因此，在曲面論中 R_{1212} 占特别重要的地位. 如果回到本章中的符号，Gauss 曲率

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{K_{1212}}{g}, \quad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix},$$

而平均曲率

$$H = \frac{LG - 2FM + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} g^{ij}H_{ij}.$$

又

$$H_{ij} = H_{ia}H_{jb}g^{ab} = (H_{ia}H_{jb} - H_{ij}H_{ab})g^{ab} + H_{ij}H_{ab}g^{ab} = -Kg_{ij} + 2HH_{ij}$$

$\left(\text{由于 } g^{11} = \frac{g_{22}}{g},\ g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g},\ g^{22} = \frac{g_{11}}{g}\right)$. 这样就建立起第一，第二，第三基本型的关系式

$$K d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} - 2H\, d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{m} + d\mathbf{m}\cdot d\mathbf{m} = 0.$$

第十九章　Fourier 級数

§ 1. 三角函数的正交性

我們已經知道

$$\sin x, \quad \cos x$$

是以 2π 为周期的函数，又任一以 ω 为周期的函数 $f(x)$（即 $f(x+\omega)=f(x)$）可以用换变数法变为

$$g(x)=f\left(\frac{\omega}{2\pi}x\right).$$

这是一个以 2π 为周期的函数．我們的問題是要研究一般的以 2π 为周期的函数．我們知道，对任一整数 $k\left(\gtreqless 0\right)$，

$$\sin kx, \quad \cos kx$$

都是以 2π 为周期的函数．又显然可知，以 2π 为周期的函数的綫性組合

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

仍以 2π 为周期．这便自然地引出了研究收斂級数

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

所代表的函数 $f(x)$．

为了研究函数 $f(x)$ 与系数 a_k, b_k 的关系，我們要用到三角函数的正交关系．

首先，不难証明

$$\int_0^{2\pi}\cos kx dx=0, \quad \int_0^{2\pi}\sin kx dx=0, \quad k=1,2,3,\cdots;$$

其次，由已知的三角公式

$$\sin kx\cos lx=\frac{1}{2}(\sin(k+l)x+\sin(k-l)x),$$

$$\sin kx\sin lx=\frac{1}{2}(\cos(k-l)x-\cos(k+l)x),$$

$$\cos kx\cos lx=\frac{1}{2}(\cos(k+l)x+\cos(k-l)x),$$

可以証明

$$\int_0^{2\pi}\cos kx\sin lx dx=0$$

及当 $k \neq l$ 时

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \, dx = 0.$$

也由于

$$\cos^2 kx = \frac{1 + \cos 2kx}{2}, \quad \sin^2 kx = \frac{1 - \cos 2kx}{2},$$

可知当 $k \neq 0$ 时

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi.$$

总括这些結果,可知

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad k = 1, 2, \cdots$$

是一系列函数,其中任意两个之积由 0 到 2π 求积分得 0,自己的平方的积分得 1. 前者称为一个函数系的正交性,后者称为就范性. 根据这个性質,如果級数(1)一致收斂于函数 $f(x)$,即

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

逐項求积分可知

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \pi a_0.$$

乘以 $\cos lx$ 而逐項求积分,可得

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos lx dx = \pi a_l.$$

又乘以 $\sin lx$ 而逐項求积分,可得

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin lx dx = \pi b_l.$$

因而得出

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_l &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos lx dx, \quad b_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin lx dx. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这些系数称为函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数,而級数(1)称为函数 $f(x)$ 的 Fourier 級数.

由此可見,一个一致收斂的 Fourier 級数代表一个函数 $f(x)$,而 $f(x)$ 也可以由(2)得出它的 Fourier 級数来. 对于任意一个可以求积分的函数 $f(x)$,我們都可以由(2)造出 Fourier 級数来,但問題在于,这 Fourier 級数在怎样程度上代表原函数 $f(x)$.

附記 1. 如果不假定一致收斂,而仅假定囿收斂,以上的叙述仍为正确.

2. 以上的区間 $(0, 2\pi)$ 若換为任意一个长度是 2π 的区間也真,即 $(c, c + 2\pi)$. 特别,如 $(-\pi, \pi)$.

§2. 几个三角級数的和

如果注意三角級数是冪級数的实数部分或虚数部分这一点,我們容易計算出三角級数的和来.

例如，当 $|z|<1$，我們有

$$1+z+z^2+\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{1-z}.$$

如果我們以 $z=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\sin\theta$ 代入，并分出实数与虚数部分，立得

$$2+2r\cos\theta+2r^2\cos 2\theta+\cdots=\frac{1}{1-re^{i\theta}}+\frac{1}{1-re^{-i\theta}}=\frac{2-2r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

及

$$i(2r\sin\theta+2r^2\sin 2\theta+\cdots)=\frac{1}{1-re^{i\theta}}-\frac{1}{1-re^{-i\theta}}=\frac{2ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

由此立得，当 $0<r<1$ 时，有

$$P_r(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos kx=\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\tag{1}$$

及

$$Q_r(x)=\sum_{k=1}^{\infty}r^k\sin kx=\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}.\tag{2}$$

同法，由 $-\log(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\cdots$ 立得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}r^k=\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-2r\cos x+r^2}\tag{3}$$

及

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}r^k=\operatorname{tg}^{-1}\frac{r\sin x}{1-r\cos x},\tag{4}$$

此处 $0<r<1$，$\operatorname{tg}^{-1}0=0$。

又从

$$1+z+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

可得

$$2+2\cos x+\cdots+2\cos nx=\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}+\frac{1-e^{-ix(n+1)}}{1-e^{-ix}}$$

$$=\frac{2-2\cos x-2\cos(n+1)x+2\cos nx}{2-2\cos x}=\frac{4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+4\sin\frac{x}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

因此得

$$p_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.\tag{5}$$

同法可証

$$q_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}. \tag{6}$$

由此可見，当 $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 时，

$$|p_n(x)|<\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon},\quad |q_n(x)|<\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

现在再考虑 $p_n(x)$ 的平均值

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}p_n(x)=\frac{1}{2N\sin\frac{1}{2}x}\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=\frac{\sin^2\frac{1}{2}Nx}{2N\left(\sin\frac{1}{2}x\right)^2}. \tag{7}$$

此式之証明可用次法

$$\sin\frac{1}{2}x\left(\sum_{n=0}^{N-1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(\cos nx-\cos(n+1)x)=\frac{1}{2}(1-\cos Nx)=\sin^2\frac{Nx}{2}.$$

最值得注意的一点是，$p_n(x)$的平均值**永远是正的**.

又从正交性立刻得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p_n(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=1, \tag{8}$$

$$\int_0^{2\pi}q_n(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=0, \tag{9}$$

还有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}Nx\,dx}{2N\left(\sin\frac{1}{2}x\right)^2}=1. \tag{10}$$

这些式子以后都很有用.

§3. Dirichlet 积分

我們考虑函数 $f(x)$ 的 Fourier 級数的部分和

$$s_n=s_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1}$$

此处

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt.$$

以此代入(1)式,可知

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt+\sin kx\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt.$$

命 $t=x+u$, 則得

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}f(x+u)\,du. \tag{2}$$

由于被积函数是以 2π 为周期的,所以

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}f(x+u)\,du.$$

此称为 Dirichlet 积分. 又可以把以上的积分分为两部分:

$$s_n=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}=\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0},$$

后者以 $-u$ 代 u, 則得

$$s_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u)+f(x-u))\,du. \tag{3}$$

由上节已知,当 $f(x)=1$ 时, $s_n=1$, 即

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}2\,du.$$

乘以 $f(x)$ 再在(3)式中減之,可得

$$s_n-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u)+f(x-u)-2f(x))\,du, \tag{4}$$

所以 s_n 是否收斂于 $f(x)$ 的問題,一变而为以上的积分是否收斂于 0 的問題了.

今后我們将研究怎样的函数在那些点 x, s_n 收斂于 $f(x)$. 在講收斂之前,先講逼近.

§4. 平方中值誤差及 Bessel 不等式

假定 $f(x)$ 是 $(0,2\pi)$ 上的一个函数,問題是怎样的三角多項式

$$g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx) \tag{1}$$

使平方中値誤差

$$\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|^2dx \tag{2}$$

最小，即定出系数 α_l, β_l 来使(2)最小.

我們把(2)写成为

$$\int_0^{2\pi}\left(f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right)^2dx=\int_0^{2\pi}f(x)^2dx-$$

$$-2\int_0^{2\pi}\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right)f(x)dx+$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right)^2dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}f(x)^2dx-2\pi\left(\frac{\alpha_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_ka_k+\beta_kb_k)\right)+\pi\left[2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right]$$

$$=\int_0^{2\pi}f(x)^2dx+\pi\left(2\left(\frac{\alpha_0-a_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right)-$$

$$-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)\geqslant\int_0^{2\pi}f(x)^2dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right),$$

即(2)的最小值等于

$$\int_0^{2\pi}f(x)^2dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right),$$

且仅当 $a_k=\alpha_k$, $b_k=\beta_k$ 时取这最小值.

总起来一句話，如果三角多項式的系数就是 $f(x)$ 的 Fourier 系数，那末原函数和这多項式的平方中値誤差最小.

又因积分(2)总是 $\geqslant 0$ 的，所以得不等式

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx\geqslant\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

我們現在看一下，在 $f(x)$ 上已經用了些什么假定，我們要的是

$$\int_0^{2\pi}f(x)^2dx,\ \int_0^{2\pi}f(x)\cos kx dx,\ \int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx \tag{A}$$

都存在. 如果我們假定 $f(x)$ 是 Riemann 可积的(注意并不是广义可积)，則 $f(x)$ 有界而且(A)中各积分都存在(这儿用了两个 Riemann 可积函数的乘积仍是 Riemann 可积). 在这假定下，命 $n\to\infty$，可知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx\geqslant\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2). \tag{3}$$

右边的收斂性可由单調遞增有界(即左边)这些性质得之，不等式(3)称为 Bessel 不等式.

由此立刻得出

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx dx\to 0,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx\to 0.$$

我們現在証明更普遍些的

定理 1（Riemann-Lebesgue）． 对任一有限区間$[a, b]$及其上任意一个 Riemann 可积函数$f(x)$，常有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0.$$

証． 先将$[a, b]$分成n个部分

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b, \tag{4}$$

分别用M_i及m_i来表示$f(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$上的确上界及确下界．因此

$$\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f(x)-m_i)\sin\lambda x\,dx+\sum_{i=0}^{n-1}m_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin\lambda x\,dx.$$

由于

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin\lambda x\,dx\right|\leqslant\frac{2}{\lambda},$$

故得

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)+\frac{2}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

任給$\varepsilon>0$，由于$f(x)$为一 Riemann 可积函数，所以选取$[a, b]$的分法(4)，使

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

分法确定后，則$\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$为一确定的数．取$A=\frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$，故当$\lambda>A$时

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx\right|<\varepsilon.$$

同理，当$\lambda>A$时

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right|<\varepsilon.$$

定理証完．

§5. 收斂判别条件

我們再回到§3，仍旧保留§4的假定(A)，考虑在什么条件下，$s_n\to s$． 当然趋向可以有多种意义，例如，在某一点$s_n\to s$或在某一区域内，s_n一致趋向s等．

为了簡便起見，命

$$\phi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2s. \tag{1}$$

这样§3的收斂条件就变为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\phi(u)du=0. \tag{2}$$

由 Riemann-Lebesgue 定理可知，对任一$\delta>0$，我們常有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,\frac{\phi(u)}{\sin\frac{1}{2}u}\,du=0, \tag{3}$$

原因是 $\phi(u)/\sin\frac{1}{2}u$ 在$[\delta, \pi]$上 Riemann 可积适合于条件(A)。

由(2)减(3)可知，收斂条件变为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\phi(u)du = 0. \tag{4}$$

再由 Riemann-Lebesgue 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}u}-\frac{1}{\frac{1}{2}u}\right)\phi(u)\,du = 0, \tag{5}$$

所以收斂条件又变为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\phi(u)}{u}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)udu = 0. \tag{6}$$

如果把

$$\lim_{u\to 0}\frac{\phi(u)}{u} \tag{7}$$

的存在性作为条件，则又由 Riemann-Lebesgue 定理可知(6)式是正确的，因而得出

定理 1. 如果 $f(x)$ 适合于条件 (A)，而且在 $x = x_0$ 这一点极限

$$\lim_{u\to 0}\frac{\phi(u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-2s}{u} \tag{8}$$

存在，则当 $n\to\infty$ 时

$$s_n \to s.$$

如果 $f(x)$ 在这一点連續，s_n 就趋于 $s = f(x)$. 如果 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时是一第一类間断点，则由(8)可知

$$s = \frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right),$$

即

$$s_n \to \frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right).$$

这也同样証明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}f(u)du = \frac{1}{2}\left(f(+0)+f(-0)\right).$$

处理积分(6)还有其他的方法. 例如，$\phi(u)$ 是单調函数，则由第二中値公式可知(如果 $\phi(u)$ 正的单調上升)

$$\int_0^\delta \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,\frac{\phi(u)}{u}\,du = \phi(\delta)\int_\eta^\delta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{u}\,du =$$

$$= \phi(\delta)\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

但积分 $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$ 是收斂的，所以获得結論(6)仍为正确。

由此可推得

定理 2. 如果 $f(x)$ 仅有有限个极大极小及有限个第一类間断点，則它的 Fourier 級数对所有的 x 都收斂于 $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$。

現在再研究在区間上收斂的問題。有这样的可能性，对每一 x，Fourier 級数都收斂于这个函数，但該級数并不一致收斂于这个函数。

定理 3. 如果在 (a, b) 中 $f(x)$ 是两个单调增加連續函数的差，則在任一处于 (a, b) 內部的閉区間中，它的 Fourier 級数一致收斂于 $f(x)$。

假定 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$，此处 f_1 与 f_2 都是单調增加的連續函数，由一致連續性可知，对于任何 $\varepsilon>0$，有 η，使

$$|f_1(x+h)-f_1(x)|<\varepsilon \quad (|h|<\eta),$$

这 η 的选择仅与 ε 有关而与 x 无关。

由以上的証明就可以得出积分的一致收斂性。

例 1. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中把函数 x 展开为 Fourier 級数。

因为 x 是奇函数，所以

$$\pi a_k=\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx=0,$$

而

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx dx=\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^\pi+\frac{1}{k}\int_0^\pi \cos kx dx\right\}=\frac{2(-1)^{k-1}}{k},$$

因而 x 在 $(-\pi, \pi)$ 上的 Fourier 級数等于

$$2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}+\cdots\right).$$

由定理 1 可知，当 $-\pi<x<\pi$ 时，上級数的和就是 x。把 x 視作为周期函数，即在 $(-\pi, \pi)$ 中用此定义，但出了这个区間之外，則用周期性获得函数的数值，如此則这个函数在 $x=\pi$ 这一点并不連續，該級数应当等于 $\frac{1}{2}(f(\pi+0)+f(\pi-0))=0$。所以

$$\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}+\cdots
=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 若 -\pi<x<\pi,\\ 0 & 若\ x=\pm\pi.\end{cases}$$

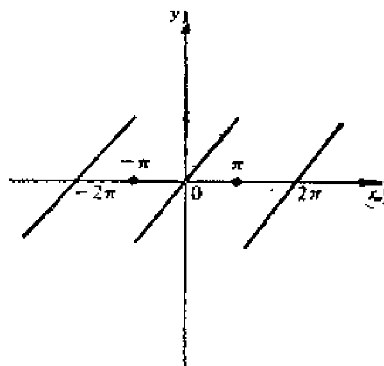


图 109

在这个式子里，取 $x=\frac{\pi}{2}$，立得公式

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

例 2. 求 x^2 在 $(-\pi, \pi)$ 間的 Fourier 級数。由于

x^2 是偶函数，所以

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin kx dx = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2\sin kx}{k}\bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin kx dx\right\}$$

$$= \frac{4}{k\pi}\left\{\frac{x\cos kx}{k}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\, dx\right\} = (-1)^k\frac{4}{k^2}.$$

由于 $f(\pi+0) = f(\pi-0)$，所以

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2},\quad -\pi < x < \pi.$$

它所表示的函数如图 110.

图 110

命 $x=0$，则得

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

若設

$$\sigma = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

则有

$$\sigma = \frac{\pi^2}{12} + 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{(2k)^2} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\sigma.$$

所以得

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

例 3. 命

$$f(x) = \begin{cases} C_1 & 若 -\pi < x < 0, \\ C_2 & 若\ 0 < x < \pi, \end{cases}$$

求它的 Fourier 級数.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} C_1 dx + \int_0^{\pi} C_2 dx\right] = C_1 + C_2,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} C_1\cos kx dx + \int_0^{\pi} C_2\cos kx dx\right] = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1\sin kx\, dx + \int_0^{\pi} C_2\sin kx\, dx\right) = (C_1 - C_2)\frac{(-1)^k - 1}{\pi k},$$

所以

$$\frac{C_1+C_2}{2}-\frac{2(C_1-C_2)}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\right)=$$

$$=\begin{cases}C_1, & -\pi<x<0,\\ C_2, & 0<x<\pi,\\ \dfrac{C_1+C_2}{2}, & x=0.\end{cases}$$

它的图形是

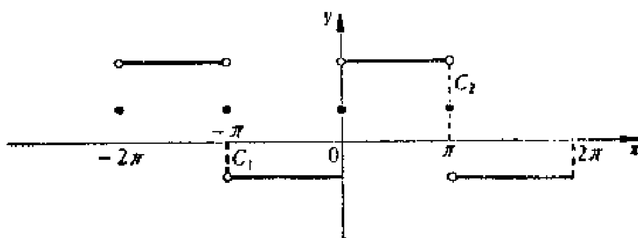


图 111

§6. 在区間 $(0,\pi)$ 上的展开式

由上节的例1与例2已經看出来，对于 $(-\pi,\pi)$ 中的奇函数 $f(x)$，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, \tag{1}$$

故奇函数的 Fourier 級数只含正弦項，即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx. \tag{2}$$

同样，若 $f(x)$ 是偶函数，则

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0. \tag{3}$$

因此偶函数的 Fourier 級数只含余弦項，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \tag{4}$$

如果給出区間 $(0,\pi)$ 上的任一函数 $f(x)$，則这个函数可以展开成只含正弦項的級数(2)，其系数 b_n 由(1)来定义．也可以展成只含余弦項的級数(4)，其系数由(3)定义，不过

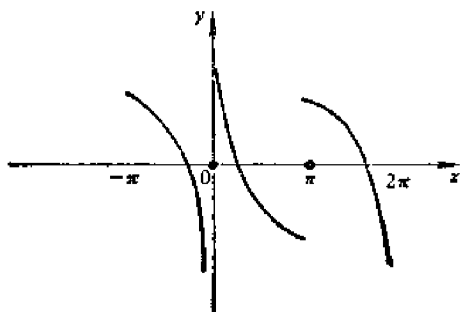


图 112

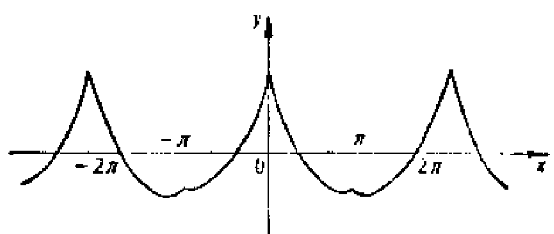


图 113

在$(0,\pi)$之外，它們所表示的函数就完全不同了．正弦級数給出的函数是奇函数：在开区間$-\pi<x<0$內为$-f(-x)$，

$$f(-0)=-f(+0),\quad f(-\pi+0)=-f(\pi-0)$$

且$f(0)=f(\pi)=0$，而余弦級数在$(-\pi,0)$內所給出的則是偶函数：

$$f(-0)=f(+0)=f(0),\quad f(-\pi+0)=f(\pi-0)=f(\pi).$$

例 1． 将x展开为余弦級数．

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\pi,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kxdx=\frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k-1],$$

因此

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\cdots+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\cdots\right],\quad (0<x<\pi).$$

在区間$(-\pi,0)$上，右边的級数和就是$-x$，因此，在$(-\pi,\pi)$上，这一級数与$|x|$完全相同（图 114）．

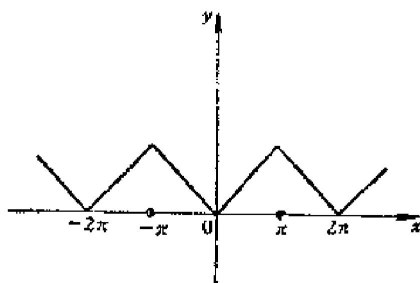


图 114

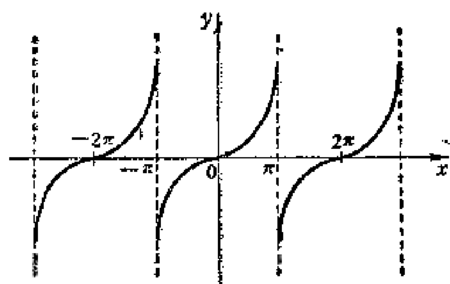


图 115

例 2． 将x^2展成正弦級数．

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin kxdx=\frac{2(-1)^{k-1}\pi}{k}+\frac{4[(-1)^k-1]}{\pi k^3},$$

故得

$$x^2=2\pi\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right]-\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\cdots\right]$$

（图 115）．

例 3． $\cos zx$是x的偶函数，故可以在$(-\pi,\pi)$上展开为余弦級数．

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos zxdx=\frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin zx}{z}\right|_0^\pi=\frac{2\sin\pi z}{\pi z},$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos zx\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(z+k)x+\cos(z-k)x]dx=$$

$$=(-1)^k\frac{2z\sin\pi z}{\pi(z^2-k^2)},$$

因此

$$\cos zx=\frac{2z\sin\pi z}{\pi}\left[\frac{1}{2z^2}+\frac{\cos x}{1^2-z^2}-\frac{\cos 2x}{2^2-z^2}+\frac{\cos 3x}{3^2-z^2}+\cdots\right].$$

以 $x=\pi$ 代入,得

$$\operatorname{ctg}\pi z=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{k^2-z^2}\right]. \tag{5}$$

这称为 $\operatorname{ctg}\pi z$ 的分式展开式. 对 z 求微商,即得 $\frac{1}{\sin^2\pi z}$ 的分式展开式:

$$\frac{1}{\sin^2\pi z}=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{z^2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+z^2}{(k^2-z^2)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(z+k)^2}+\frac{1}{(z-k)^2}\right\}\right]=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-k)^2}.$$

在(5)式中以 $\frac{z}{\pi}$ 代 z, 则得

$$z\operatorname{ctg}z=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z^2}{k^2\pi^2-z^2}.$$

当 $|z|<\pi$ 时,由于

$$\frac{2z^2}{k^2\pi^2-z^2}=\frac{2z^2}{k^2\pi^2\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}=2\frac{z^2}{k^2\pi^2}\left(1+\frac{z^2}{k^2\pi^2}+\cdots+\frac{z^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}}+\cdots\right),$$

故得

$$z\operatorname{ctg}z=1-2\frac{z^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-2\frac{z^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}-\cdots-2\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}-\cdots.$$

再以 $\frac{z}{2}$ 代 z, 得

$$\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right]z^{2n}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(2n)!}z^{2n}, \tag{6}$$

此处

$$B_n=\frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}, \tag{7}$$

称之为 Bernoulli 数. 用冪級数直接展开 $\cos\frac{z}{2}\Big/\left(\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}\right)$, 可知諸 B_n 都是有理数,例如

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},\cdots,$$

因此也算出了 Riemann ζ 函数在偶数所取的值

$$\zeta(2n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{(2\pi)^{2n}B_n}{2\cdot(2n)!}\ (n=1,2,\cdots).$$

在 (6) 中以 $\frac{t}{i}$ 代 z, 则得

$$\frac{t}{2i}\operatorname{ctg}\frac{t}{2i}=\frac{t}{2i}\cdot\frac{\cos\frac{t}{2i}}{\sin\frac{t}{2i}}=\frac{t}{2}\cdot\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}.$$

由此推出

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\cdots=A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots, \tag{8}$$

此处

$$A_0=1,\quad A_1=-\frac{1}{2},\quad A_{2k}=\frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!},\ A_{2k+1}=0\ (k=1,2,\cdots) \tag{9}$$

称之为 Euler 数。

§7. Gibbs 現 象

以上为了保持 Fourier 級数的收斂性，我們在 $f(x)$ 上加了两个条件：在連續性之外又添了另一个性质．我們可以举出例子，仅仅連續性并不能保証 Fourier 級数的收斂性，这样的例子是 P. Du Bois-Reymond 首先举出的，即一个 Fourier 級数在一点是发散的，虽然对应的函数在那一点是連續的．

关于不連續函数的 Fourier 級数的情况，更有所謂 Gibbs 現象。

已知

$$f(x)=2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\sin(2r-1)x}{2r-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\pi, & 若\quad 0<x<\pi,\\ -\dfrac{1}{2}\pi, & 若-\pi<x<0,\\ 0, & 若\quad x=0,-\pi,\pi.\end{cases}$$

命

$$s_n(x)=2\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin(2r-1)x}{2r-1},$$

則

$$\frac{d}{dx}s_n(x)=2\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)x=\frac{\sin 2nx}{\sin x}.$$

所以

$$s_n(x)=\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt,$$

因此

$$s_n(x)-\int_0^x\frac{\sin 2nt}{t}dt=\int_0^x\sin 2nt\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)dt,$$

即

$$s_n(x)-\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\sin 2nt\frac{t}{\sin t}\left(\frac{t}{3!}-\frac{t^3}{5!}+\cdots\right)dt.$$

因为当 t 由 0 增加至 $\frac{1}{2}\pi$ 时，$\frac{t}{\sin t}$ 連續地由 1 增加至 $\frac{\pi}{2}$；又当 $0<t\leqslant\frac{1}{2}\pi$ 时，$0<\frac{t}{3!}-\frac{t^3}{5!}+\cdots<\frac{t}{3!}$. 所以，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\left|s_n(x)-\int_0^{2nx}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\frac{\pi}{12}\int_0^x tdt=\frac{x^2}{24}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x < \delta$ 时, 对任意正整数 n, 皆有

$$\left| s_n(x) - \int_0^{2nx} \frac{\sin t}{t} dt \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

命

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

由于

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\pi \frac{(-1)^k \sin u}{k\pi + u} du,$$

所以当 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 时, 正負相間且絕对值单調递減, 故函数 $y = \varphi(x)$ 在 $x = \pi$、3π、5π、$\cdots$ 有极大值 $M_1 > M_3 > M_5 > \cdots$, 而在 $x = 2\pi$, 4π, 6π, $\cdots$ 有极小值 $m_2 < m_4 < m_6 < \cdots$.

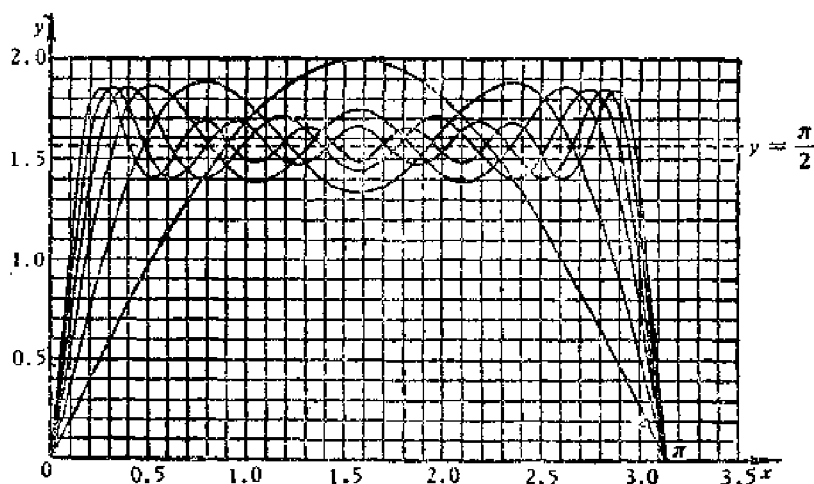


图 116

选取 $n > \frac{\pi}{2\delta}$, 則由(1)可得

$$\left| s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \varphi(\pi) > \frac{\pi}{2}.$$

因此尽管对每一固定的 $x (0 < x < \pi)$, 当 $n \to \infty$ 时, $s_n(x)$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$. 但是 $x = 0$、$0 \leqslant y \leqslant \varphi(\pi)$ 中的所有的点, 都是曲綫 $y = s_n(x)$ 上面的点的极限点, 而区間 $0 \leqslant y \leqslant \varphi(\pi)$ 的长度是 $(0, f(+0))$ 的长度的

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1.1789795\cdots$$

倍.

由于 $s_n(x)$ 为奇函数, 故在 $x = 0$ 的左边亦有类似的情况, 即在 $x = 0$ 的附近, 曲綫充滿了区間 $-\varphi(\pi) \leqslant y \leqslant 0$. 这一現象叫 Gibbs 現象(图 116).

一般言之, 命函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区間 $x_0 < x < x_0 + h$ 中收斂于函数 $f(x)$, 若当 n 及

$\frac{1}{x-x_0}$彼此独立地趋于 $+\infty$ 时,有

$$\overline{\lim} f_n(x) > f(x_0+0)$$

或

$$\underline{\lim} f_n(x) < f(x_0+0),$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 的右方有 Gibbs 现象. 同样可以定义在 x_0 左方的 Gibbs 现象.

§8. 均值求和

定理 1. 命

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n$$

表示一級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

的部分和,又

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

表示平均和. 如果

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

则也有

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s.$$

証. 由假定可知,給任一 $\varepsilon > 0$, 则存在一 $N > 0$, 使 $n > N$ 时, $|s_n - s| < \varepsilon$. 命 $\bar{s}$ 为

$$|s_0 - s|,\ |s_1 - s|,\ \cdots,\ |s_N - s|$$

的上界,如此则

$$|\sigma_n - s| \leqslant \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n}$$

$$\leqslant \frac{N\bar{s} + (n-N)\varepsilon}{n} = \frac{N}{n}(\bar{s} - \varepsilon) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

(当 n 充分大时). 所以定理得証.

反之,如果

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s,$$

并不一定可以得出

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

例如,

$$a_n = (-1)^n,$$

则 $s_{2n} = 1$, $s_{2n+1} = 0$, 故沒有极限, 但 σ_n 的极限等于 $1/2$.

定义. 如果一个級数的 σ_n 的极限存在, 则称为平均收斂, 或称 $(C, 1)$ 收斂. σ_n 的极限 s 称为該級数的 $(C, 1)$ 和.

我們現在运用平均求和法到 Fourier 級数.

命

$$s_n = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

及

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n},$$

如此则

$$\sigma_n = \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{u}{2} + \sin\frac{3}{2}u + \cdots + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u) + f(x-u))du$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2 (f(x+u) + f(x-u))\,du,$$

这公式称为 Fejér 积分,其重要性在于 $\left(\sin\frac{1}{2}nu \Big/ \sin\frac{1}{2}u\right)^2$ 是定正的. 在公式中取 $f(x) = 1$,则得

$$1 = \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2 2du,$$

因此得出

$$\sigma_n - s = \frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2 (f(x+u) + f(x-u) - 2s)du.$$

故 $f(x)$ 的 Fourier 级数的 $(C, 1)$ 和是 $s(x)$ 的必要且充分条件是这积分 $\to 0$.

依旧引进

$$\phi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2s.$$

由于

$$\left|\frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\phi(u)\,du\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_\delta^\pi \frac{|\phi(u)|}{\sin^2\frac{1}{2}u}du$$

显然趋于 0,所以 $(C, 1)$ 收敛的条件一变而为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\delta \frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{\sin^2\frac{1}{2}u}\phi(u)du = 0.$$

又由于

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^\delta \sin^2\frac{1}{2}nu\left(\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right)\phi(u)\,du\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\int_0^\delta \left(\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}u} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}u\right)^2}\right)|\phi(u)|\,du \to 0,$$

所以該条件又变为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\delta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\phi(u)du=0.$$

定理 1 (Fejér). 假如 $f(x)$ 仅有第一类間断点,則 $f(x)$ 的 Fourier 級数的 $(C,1)$ 和是

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

特別是对 $f(x)$ 的連續的点, $f(x)$ 的 Fourier 級数的 $(C,1)$ 和就是 $f(x)$.

証. 在上公式中命

$$s=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)),$$

則当 $u\to 0$ 时 $\phi(u)\to 0$. 故有 η 存在,使 $u<\eta$ 时, $|\phi(u)|\leqslant\varepsilon$. 如是則

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^\delta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\phi(u)du\right|\leqslant\frac{1}{n}\int_0^\eta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}\varepsilon\,du+$$

$$+\frac{1}{n}\int_\eta^\delta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}|\phi(u)|du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\int_0^\eta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du+\frac{1}{n}\int_\eta^\delta\frac{|\phi(u)|}{u^2}du=I_1+I_2\quad(\text{如是定义}).$$

現在

$$\frac{1}{n}\int_0^\eta\frac{\sin^2\frac{1}{2}nu}{u^2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}n\eta}\frac{\sin^2v}{v^2}dv<\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin^2v}{v^2}dv$$

是一常数,故 $I_1<A\varepsilon$. 对固定的 η, 当 $n\to\infty$ 时显然 $I_2\to 0$. 定理証毕.

定理 2. 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 中連續, 則对其所包有的任何一个閉子区間 $f(x)$ 的 Fourier 級数的平均和 σ_n 一致收斂于 $f(x)$.

証明完全与定理 1 相仿,但須注意, η 的选择仅与 ε 相关而与 x 无关.

§9. Parseval 等 式

以往我們已經知道 Bessel 不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^\infty(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx.$$

我們現在要进一步証明

定理 1. 如果 $f(x)$ 是連續函数,則

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^\infty(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx.$$

証. 由上节已知, $\sigma_n(x)$ 一致收斂于 $f(x)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-\sigma_n(x))f(x)dx=0,$$

而

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{m}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\left(1-\frac{k}{n}\right).$$

以此代入且逐項求积分,可知

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k^2+b_k^2)\left(1-\frac{k}{n}\right)\to 0.$$

由 Bessel 不等式知道

$$S_m=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2)$$

收斂于 A,由定理 8.1 可知

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}S_m=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k^2+b_k^2)\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

也收斂于 A, 卽得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

这式子称为 Parseval 等式.

命另一連續函数 $g(x)$ 的 Fourier 展开式是

$$\frac{1}{2}a_0'+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'\cos kx+b_k'\sin kx),$$

則由

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[(f(x)+g(x))^2-f^2(x)-g^2(x)]dx$$

$$=\frac{1}{2}[(a_0+a_0')^2-a_0^2-a_0'^2]$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\{(a_k+a_k')^2-a_k^2-a_k'^2+(b_k+b_k')^2-b_k^2-b_k'^2\}$$

可得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{2}a_0a_0'+\sum_{k=1}^{\infty}(a_ka_k'+b_kb_k').$$

这称为 Plancherel 关系式.

这些公式在很普遍的假定下仍然正确. 但为了簡单計,我們不贅述了.

§ 10. Fourier 級数可以逐項求积分

定理 1. 任何一个 Fourier 級数,不管它是收斂或发散,我們可以在两限之間逐項求

积分，积出后的级数的和等于該函数的积分的 Fourier 級数。

命 $f(x)$ 的 Fourier 系数是 a_n, b_n, 現在考慮函数

$$F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{1}{2}a_0\right)dt.$$

如此則 $F(x)$ 是周期的，連續的。

又命

$$f_1(t)=\begin{cases}f(t)-\frac{1}{2}a_0, & \text{当 } f(t)-\frac{a_0}{2}\geqslant 0,\\ 0, & \text{当 } f(t)-\frac{a_0}{2}<0,\end{cases}$$

$$f_2(t)=\begin{cases}f(t)-\frac{1}{2}a_0, & \text{当 } f(t)-\frac{a_0}{2}<0,\\ 0, & \text{当 } f(t)-\frac{a_0}{2}\geqslant 0,\end{cases}$$

因此

$$f(t)-\frac{a_0}{2}=f_1(t)+f_2(t).$$

因为

$$\int_0^x f_1(t)\,dt,\quad \int_0^x -f_2(t)\,dt$$

都是遞增函数，而

$$F(x)=\int_0^x f_1(t)\,dt-\int_0^x(-f_2(t))dt,$$

因此 $F(x)$ 是遞增函数的差。由定理 5.3，所以有收斂的 Fourier 級数

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx),$$

此处

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[F(x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}-$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)-\frac{1}{2}a_0\right)\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx=-\frac{b_n}{n}$$

及

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-F(x)\frac{\cos nx}{n}\right)_0^{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)-\frac{1}{2}a_0\right)\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{a_n}{n}$$

（注意 $F(2\pi)=F(0)=0$）。所以

$$F(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n}.$$

命 $x=0$，即得

$$\frac{1}{2}A_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

合計

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx+b_n(1-\cos nx)}{n},$$

卽得定理.

由此也順便証明了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

收斂.

本定理还有另一个有趣的証明. 已知

$$\frac{\sin(x-t)}{1}+\frac{\sin 2(x-t)}{2}+\cdots=\phi(t),$$

$\left(这儿\ \phi(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\pi-(x-t)], & 若\ 0<x-t<2\pi\\ 0, & 若\ x-t=0,2\pi,\end{cases}\right)$ 囿收斂,故可乘以 $f(t)/\pi$ 且逐项积分. 由 0 到 2π 积分,左边等于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin n(x-t)f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx-b_n\cos nx}{n},$$

而右边等于

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{x-2\pi}^{x}\phi(t)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{x-2\pi}^{x}\frac{1}{2}(\pi-x+t)f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big[(\pi-x+t)F(t)\Big]_{x-2\pi}^{x}-\frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x}F(t)dt=F(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)dt$$

(用了 $F(x-2\pi)=F(x)$ 和 $\frac{a_0}{2}\int_{x-2\pi}^{x}\frac{1}{2}[\pi-(x-t)]dt=0$). 定理証毕.

§ 11. Fourier 系数的性質

由前已知

$$a_k\to 0,\quad b_k\to 0.$$

我們現在加強条件来証明更明确的結果,例如,$f(x)$ 是单調上升有界函数,則由第二中值公式

$$\int_\alpha^\beta f(x)\cos kx\,dx=f(\beta)\int_\zeta^\beta\cos kx\,dx=O\left(\frac{1}{k}\right),$$

卽得

$$a_k=O\left(\frac{1}{k}\right),\quad b_k=O\left(\frac{1}{k}\right).\tag{1}$$

如果区間$(0,2\pi)$可以分为有限段,而每一段都是单調的,以上的結果(1)仍然成立.

如果 $f(x)$ 的微商有以上的性质,則由分部积分法可知

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx=f(x)\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin kx\,dx$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}f'(x)\sin kx\,dx=O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

所以有

$$a_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ 及 } b_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

同法可以証明，如果 $f(x)$ 的 l 次微商有以上的性质，则

$$a_k = O\left(\frac{1}{k^{l+1}}\right),\ b_k = O\left(\frac{1}{k^{l+1}}\right).$$

l 愈大，Fourier 級数收斂得愈快. 当 $l=1$ 时，

$$\left|\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) \leqslant \frac{1}{2}|a_0| + O\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right),$$

所以 Fourier 級数一致收斂，且絕对收斂.

如果一个函数仅有有限个間断点，我們可以用下法来做出一个沒有間断点的函数.

由例 5.1 已知

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k} + \cdots$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{若} \quad -\pi < x < \pi, \\ 0, & \text{若} \quad x = \pm\pi \end{cases}$$

仅在点 $x=\pi$ 有間断点，而且 $f(\pi-0) = \frac{1}{2}\pi$, $f(\pi+0) = -\frac{1}{2}\pi$, 考虑函数

$$g(x) = af(x+\pi-x_0) + b.$$

这是一个在 $x = x_0$ 时有間断点的函数，而

$$g(x_0+0) = -\frac{1}{2}a\pi + b, \quad g(x_0-0) = \frac{1}{2}a\pi + b,$$

解得

$$b = \frac{1}{2}(g(x_0+0) + g(x_0-0)), \quad a = \frac{1}{\pi}(g(x_0-0) - g(x_0+0)),$$

即如果 $g(x)$ 是一个仅在 $x = x_0$ 时有間断点的函数，而且 $g(x_0+0)$ 与 $g(x_0-0)$ 都存在，它的 Fourier 級数等于

$$g(x) = a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin k(x+\pi-x_0)}{k} + b$$

$$= b + a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\cos k(\pi-x_0)\sin kx + \sin k(\pi-x_0)\cos kx).$$

如果一个函数有有限个間断点，并且在这些間断点的左右极限都存在，則我們可以減掉有限个上述的函数使它变为連續的.

所減去的这些函数是"直綫周期函数"，因而在計算时可以先減去几个直綫周期函数，使得所剩下的函数的 Fourier 級数一致收斂.

这个方法当然可以用来处理有以下性质的函数：可以把区間分为有限段，在每一段中

都有 l 次微商(参考 Euler 求和公式).

§ 12. Fourier 級数的其他形式

先討論复数形式的 Fourier 級数,現在是

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

此处

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

讀者試証出与前相仿的結果.

又如果周期是 $2\pi\lambda$, 則我們有

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{kx}{\lambda} + b_k \sin\frac{kx}{\lambda}\right),$$

此处

$$a_k = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\cos\frac{kx}{\lambda}\, dx,\quad b_k = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\sin\frac{kx}{\lambda}\, dx.$$

命

$$a_k = \rho_k \sin\varphi_k,\quad b_k = \rho_k\cos\varphi_k,$$

則得

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k \sin\left(\frac{kx}{\lambda} + \varphi_k\right).$$

独項

$$y_k = \rho_k \sin\left(\frac{kx}{\lambda} + \varphi_k\right)$$

在物理上代表調和振动,振幅就是 ρ_k, 而 $2\pi\lambda$ 是周期, φ_k 是初位相.

§ 13. 实用調和分析——有限調和分析

把已知函数展开成 Fourier 級数的运算叫做調和分析.如果 $f(x)$ 是由分析方法定义出来的,而刚好又不难算出定积分 $C_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}\, dx$ 的数值来,則这个函数的 Fourier 展开式便立刻得到. 但如果 $f(x)$ 仅是由若干实驗数据所給定的,或者即使 $f(x)$ 由分析方法所定义,而 C_m 不易算出,那时就出現了如何去找 Fourier 系数的問題了. 解这样問題的运算称为实用調和分析. 人們往往容易产生这样的錯覚:当取定若干分点后,愈多算几項,就会得到愈精密的結果. 我們將着重指出,事实上并不然,过多的計算不仅浪費人力,而且会导致愈来愈大的誤差. 我們在这儿所介紹的有限調和分析的着眼点也就在于此. 本节用的方法是"从有限到有限",并研究了由有限多个数据所应計算的最恰当的項数.

先从复数形式的 Fourier 級数講起. 假定在 $[-\pi,\pi]$ 中給定函数 $f(x)$ 的 $n(=2n'+1)$ 个数据

$$y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right),\ l = 0,\ \pm 1, \cdots, \pm n' \tag{1}$$

利用

$$\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i l m/n} = \begin{cases} 0, & 若\ n \nmid m;^{1)} \\ 1, & 若\ n \mid m, \end{cases} \tag{2}$$

可以从

$$y_l = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{2\pi i l m/n} \quad |l| \leqslant n' \tag{3}$$

中定出 C'_m 来. 定出 C'_m 的方法是乘(3)以 $e^{-2\pi i l q/n}$, 而对 l 加之, 由(2)得出

$$\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l q/n} = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m \sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i(m-q)l/n} = nC'_q. \tag{4}$$

因此,我們建議用

$$S_n(x) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx},\ C'_m = \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \tag{5}$$

来逼近 $f(x)$. 現在来估計 $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 的誤差.

定理 1. 假如 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商,各阶微商均有周期 2π、且 $|f^{(r)}(x)| < C$, 則

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{6}$$

証. 已知

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx},\ C_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\,dx, \tag{7}$$

分部积分 r 次得

$$C_m = \frac{1}{2\pi(im)^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x) e^{-imx}\,dx,$$

所以

$$|C_m| < \frac{C}{|m|^r}.$$

因此

$$\left|f(x) - \sum_{m=-n'}^{n'} C_m e^{imx}\right| \leqslant \sum_{|m|>n'} |C_m|$$

$$< 2\sum_{m=n'+1}^{\infty} \frac{C}{m^r} < 2C\int_{n'}^{\infty} \frac{dx}{x^r} = \frac{2C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{8}$$

当 $|m| \leqslant n'$ 时

---

1) $a|b$ 表示 a 能整除 b, $a\nmid b$ 表示 a 不能整除 b.

$$C_m - C'_m = C_m - \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n}$$

$$= C_m - \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} e^{-2\pi i l m/n}\sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q e^{2\pi i q l/n}$$

$$= C_m - \frac{1}{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-n'}^{n'} C_q e^{2\pi i(q-m)l/n}$$

$$= C_m - \sum_{\substack{q=-\infty \\ n|(q-m)}}^{\infty} C_q,$$

因此

$$|C_m - C'_m| \leqslant \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' |C_{m+nt}|,$$

此处 $\sum'$ 表示除去 $t=0$ 这一项. 因此

$$\left|\sum_{m=-n'}^{n'} (C_m - C'_m) e^{imx}\right| \leqslant \sum_{m=-n'}^{n'} \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' |C_{m+nt}|$$

$$\leqslant \sum_{m=-n'}^{n'} \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' \frac{C}{|m+nt|^r} = 2C \sum_{l=n'+1}^{\infty} \frac{1}{l^r}$$

$$\leqslant \frac{2C}{(r-1)n'^r} \tag{9}$$

(任一整数 l 可以唯一地表成为 $nt+m(|m|\leqslant n')$ 的形式, 但 $t\neq 0$, 所以从所有的整数中除去适合于 $|l|\leqslant n'$ 之諸整数,故得所云).

因此,由(7),(8),(9)可得

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}.$$

定理証完.

有时为了减少計算量,在有了 n 个数据 $y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(|l|\leqslant n')$ 之后, 我們只希望計算 $2k+1$ 个系数 $C'_m(|m|\leqslant k)$, 此处 $k<n'$. 算法如下:定出 $C'_m(|m|\leqslant k)$ 来使

$$\sum_{l=-n'}^{n'} \left|y_l - \sum_{m=-k}^{k} C'_m e^{2\pi i l m/n}\right|^2$$

取最小值.

$$\sum_{l=-n'}^{n'} \left|y_l - \sum_{m=-k}^{k} C'_m e^{2\pi i l m/n}\right|^2$$

$$= \sum_{l=-n'}^{n'} \left(y_l - \sum_{q=-k}^{k} C'_q e^{2\pi i l q/n}\right)\left(\bar{y}_l - \sum_{r=-k}^{k} \bar{C}'_r e^{-2\pi i l r/n}\right)$$

$$= \sum_{l=-n'}^{n'} |y_l|^2 + n \sum_{m=-k}^{k} |C'_m|^2 - \sum_{q=-k}^{k} \sum_{l=-n'}^{n'} \bar{y}_l C'_q e^{2\pi i l q/n} -$$

$$- \sum_{r=-k}^{k} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \bar{C}'_r e^{-2\pi i l r/n}$$

$$= n \sum_{m=-k}^{k} \left(C'_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \right) \left(\bar{C}'_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} \bar{y}_l e^{2\pi i l m/n} \right) +$$

$$+ \sum_{l=-n'}^{n'} |y_l|^2 - \frac{1}{n} \sum_{m=-k}^{k} \left| \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \right|^2$$

$$\geqslant \sum_{l=-n'}^{n'} |y_l|^2 - \frac{1}{n} \sum_{m=-k}^{k} \left| \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \right|^2,$$

此处等号成立之充要条件为

$$C'_m = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n}.$$

因此仍用

$$S_{2k+1}(x) = \sum_{m=-k}^{k} C'_m e^{imx}, \quad C'_m = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} \tag{10}$$

来逼近 $f(x)$.

在定理 1 的条件下，与定理 1 相仿可得

$$|f(x) - S_{2k+1}(x)| < \frac{2C}{(r-1)} \left(\frac{1}{n'^{r-1}} + \frac{1}{k^{r-1}} \right).$$

这建議我們、如果只計算 $2k+1$ 項，可以少用一些数据。

在实际計算的时候，$S_n(x)$ 有以下的表达式：

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(\frac{nx}{2} - \pi l\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}. \tag{11}$$

这个式子的証明如下：

$$S_n(x) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{m=-n'}^{n'} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} e^{imx}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \sum_{m=-n'}^{n'} e^{im(x-2\pi l/n)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(n' + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l \frac{\sin\left(\frac{nx}{2} - \pi l\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}.$$

如果 $f(x)$ 是一个以 2π 为周期的实函数，则

$$S_n(x) = \sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx}$$

$$= C'_0 + \sum_{m=1}^{n'} (C'_m e^{imx} + C'_{-m} e^{-imx}),$$

这儿

$$C'_0 = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l = a'_0/2,$$

$$C'_m = \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos \frac{2\pi l m}{n} - i \sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin \frac{2\pi l m}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a'_m - b'_m i),$$

$$C'_{-m} = \frac{1}{2}(a'_m + b'_m i).$$

因此

$$C'_m e^{imx} + C'_{-m} e^{-imx}$$

$$= \frac{1}{2}(a'_m - b'_m i)(\cos mx + i \sin mx) +$$

$$+ \frac{1}{2}(a'_m + b'_m i)(\cos mx - i \sin mx)$$

$$= a'_m \cos mx + b'_m \sin mx.$$

因此

$$S_n(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{n'} (a'_m \cos mx + b'_m \sin mx), \tag{12}$$

此处

$$a'_0 = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l, \quad a'_m = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos \frac{2\pi l m}{n},$$

$$b_m' = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2\pi lm}{n}. \tag{13}$$

这就是实数形式的有限 Fourier 級数.

定理 2. 如果 $f(x)$ 为在 $[0, 2\pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商的实函数，各阶微商都有周期 2π，且 $|f^{(r)}(x)| < C$，則

$$\left|f(x) - \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \frac{\sin\left(\frac{1}{2}nx - \pi l\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}\right| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{14}$$

如果分点不是等距离的，即已知

$$y_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n(=2n'+1),$$

則可由联立方程組

$$y_i = \frac{a_0'}{2} + \sum_{l=1}^{n'}(a_l'\cos lx_i + b_l'\sin lx_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$y = f(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{l=1}^{n'}(a_l'\cos lx + b_l'\sin lx)$$

中消去 a_0', a_l', b_l' 而得出 y 与 $y_1, \cdots, y_n$ 的关系. 因而問題归結为解联立方程組的問題了.

習題 1. 研究分点个数 n 为偶数的情况.

附記. 有些书上利用矩形公式来近似計算定义 a_m' 与 b_m' 的积分，因此得出

$$a_m \doteq a_m' = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l\cos\frac{2\pi lm}{n},\quad b_m \doteq b_m' = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l\sin\frac{2\pi lm}{n},$$

然后用

$$S_{2r+1}(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{m=1}^{r}(a_m'\cos mx + b_m'\sin mx)$$

来逼近 $f(x)$. 虽然用这一方法得出的 $S_{2r+1}(x)$ 的表达式仍无两样，但由于

$$a_m' = a_{m+n}',\quad b_m' = b_{m+n}',$$

所以級数

$$\frac{a_0'}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m'\cos mx + b_m'\sin mx)$$

是发散的(除非 $a_1' = \cdots = a_{n'}' = b_1' = \cdots = b_{n'}' = 0$). 因此取 Fourier 級数的項数愈多，变化亦愈大. 如果原来的函数 $f(x)$ 有一定的光滑性(例如有連續的高阶微商等)，用这个方法来处理，当項数算多了，偏差反而会更大，換言之，这个方法容易使人产生引入迷途的可能性——謬以为項数愈多愈精密. 另一方面，当給了几个离散的数据时，亦不必用連續性的方法来处理.

关于实用調和分析进一步的討論，請讀者看华罗庚与王元的"数值积分及其应用"一书.

§ 14. Fourier 积分

把 §12 的公式写成为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda}f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda}f(t)\cos\frac{n(x-t)}{\lambda}\,dt. \tag{1}$$

現在使 $\lambda\to\infty$，如果命 $u_n=\frac{n}{\lambda}$，則該級数等于

$$\frac{\varphi(u_0)}{2\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)\varphi(u_n), \tag{2}$$

此处

$$\varphi(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda}f(t)\cos u(x-t)\,dt. \tag{3}$$

如果我們且不管 $\varphi(u)$ 与 λ 的关系，則 (2) 式就相似于 Riemann 积分的和，所以当 $\lambda\to\infty$ 时，我們得出

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x-t)u\,f(t)\,dt. \tag{4}$$

这称为 Fourier 积分公式．犹之于 Fourier 級数在有限范围内表示一个函数，Fourier 积分在无限范围内表示一个函数．

要把以上方法严格化并不簡单，我們現在用另一方法来处理公式(4)．

假定

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$$

是存在的，則积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)f(t)\,dt$$

对 u 在任一有限区間内一致收斂，故可由 0 到 U 对 u 积分，且交換符号，即得

$$\int_{0}^{U}du\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt.$$

給与 $\varepsilon>0$，可取 T 充分大，使

$$\int_{-\infty}^{-T}|f(t)|\,dt<\varepsilon,\quad \int_{T}^{\infty}|f(t)|\,dt<\varepsilon.$$

取固定的 x，并假定 $T>|x|+1$，則对所有的 U，

$$\left|\int_{-\infty}^{-T}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt\right|<\varepsilon,\quad \left|\int_{T}^{\infty}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt\right|<\varepsilon.$$

固定 T，由 Riemann-Lebesque 定理可知，当 $U\to\infty$ 时，积分

$$\int_{-T}^{x-\delta}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt,\qquad \int_{x+\delta}^{T}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt$$

都 $\to 0$，所以

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{U}du\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{\sin U(x-t)}{x-t}f(t)\,dt+o(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{\sin Ut}{t}\{f(x+t)+f(x-t)\}\,dt+o(1),$$

如此，把我們的問題一变而为前所討論过的 Dirichlet 积分相仿的問題了，卽如果假定

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt$$

存在以及在 $t=x$ 附近 $f(x)$ 是两递增函数之差，則

$$\lim_{U\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^U du\int_{-\infty}^{\infty}\cos u(x-t)f(t)\,dt=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

§15. Fourier 变 换

如果 $f(x)$ 是偶函数，則 Foureir 积分公式(14.4)变为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}(\cos xu\ \cos tu+\ \sin xu\sin tu)f(t)\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos xu\ du\int_0^{\infty}\cos tu\,f(t)\,dt, \tag{1}$$

这称为 Fourier 余弦公式. 又如果 $f(t)$ 是奇函数，則得 Fourier 正弦公式

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin xu\ du\int_0^{\infty}\sin tu\,f(t)\,dt. \tag{2}$$

如果我們命

$$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos xt\,f(t)\,dt,$$

則由(1)得出

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos xt\ g(t)\,dt,$$

卽 $f(x)$ 与 $g(x)$ 处于互逆的关系. 如此所关联着的一对函数，彼此称为 Fourier 余弦变换.

当然这是仅就形式言之，严格些說，在我們常遇到的条件下，必須修改 $f(x)$ 的数值为

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

同样

$$h(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin xt\,f(t)\,dt,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sin xt\ h(t)\,dt$$

被称为 Fourier 正弦变换. 注意，这也須修改 $f(x)$ 的数值为 $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$. 在 $x=0$ 时，更必須注意，我們是假定了 $f(x)$ 是奇函数才获得这公式的，所以 $f(0)$ 的数值是 0.

例 1. 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x>1 \text{ 时}\end{cases}$$

的 Fourier 余弦变换是

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du\int_0^\infty f(t)\cos ut\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du\int_0^1 \cos ut\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos ux \sin u}{u}\, du = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leqslant x < 1 \text{ 时}, \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x = 1 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x > 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

例 2. 取

$$f(x) = e^{-\beta x}, \quad \beta > 0.$$

它的 Fourier 正弦变换等于

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin ut\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{u^2+\beta^2},$$

所以

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{u^2+\beta^2}\sin ux\, du = \begin{cases} e^{-\beta x} & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

同样可証

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{u^2+\beta^2}\, du = \frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta x}.$$

例 3. 函数

$$x^{-\frac{1}{2}}, \quad e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \operatorname{sech} x\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

是它們自己的 Fourier 余弦变換,而函数

$$x^{-\frac{1}{2}}, \quad xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$$

是它們自己的 Fourier 正弦变換.

§ 16. Poisson 公式

假定 $f(x)$ 是一个在 $(0, \infty)$ 中定义了的函数,它連續而且当 $x \to \infty$ 时单調递減趋近于0,并假定

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

存在,命 $\alpha > 0$, $\alpha\beta = 2\pi$, 且 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 余弦变換,則得

$$\sqrt{\alpha}\left\{\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n\alpha)\right\} = \sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}g(0) + \sum_{n=1}^\infty g(n\beta)\right\}. \tag{1}$$

这公式称为 Poisson 公式.

証. 由 $g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos tx\, dt$ 可得

$$\sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}g(0) + \sum_{m=1}^n g(m\beta)\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty f(t)\, dt + \sum_{m=1}^{n} \int_0^\infty f(t) \cos m\beta t dt \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos m\beta t \right) dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\beta}} \int_0^\infty f\left(\frac{x}{\beta}\right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mx \right) dx \text{（换变数 } \beta t = x\text{）}$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi} \int_0^\infty f\left(\frac{x}{\beta}\right) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} dx$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi} \left(\int_0^\pi f\left(\frac{x}{\beta}\right) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} dx \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} f\left(\frac{x}{\beta}\right) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} dx \right). \tag{2}$$

用第二中值公式到积分上，则得

$$a_m = \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} f\left(\frac{x}{\beta}\right) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} dx$$

$$= f\left(\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right) \int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} dx.$$

由于

$$\left| \int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{(-1)^m}{x - 2m\pi} \right) dx \right|$$

$$\leqslant \int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi} \left| \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{(-1)^m}{x - 2m\pi} \right| dx = O(1)$$

及

$$\left| \int_{(2m-1)\pi}^{\xi\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x - 2m\pi} dx \right| = \left| \int_{-\pi}^{(\xi - 2m)\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)y}{y} dy \right|$$

$$= \left| \int_{-\pi(n+\frac{1}{2})}^{(\xi - 2m)(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin z}{z} dz \right| = O(1),$$

这儿用了 $\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz$ 是收敛的，因而得出

$$a_m = O\left(f\left(\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right)\right).$$

从而

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m = O\left(\sum_{m=1}^{\infty} f\left(\frac{(2m-1)\pi}{\beta}\right)\right) = O\left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{(2m-1)\pi}{\beta}}^{\frac{(2m+1)}{\beta}} f(t)\,dt + f\left(\frac{\pi}{\beta}\right)\right)$$
$$= O\left(\int_0^{\infty} f(t)\,dt\right) = O(1),$$

换言之,公式(2)是一个对 n 一致收斂的級数. 命 $n\to\infty$, 并且每一项如此取极限,由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{2}f(0),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} f\left(\frac{x}{\beta}\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\,dx = f\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right) = f(m\alpha),$$

得出最后結論

$$\sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} g(n\beta)\right\} = \sqrt{\alpha}\left\{\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\right\}.$$

例 1. 取 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, 则

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+4n^2\pi^2}.$$

例 2. 証明: 若 $x>0$, 則

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi^2/x^2}. \tag{3}$$

在 Poisson 公式中取 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, 則 $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 又取 $\beta = \sqrt{2}\,x$, $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{x}$, 则得

$$\sqrt{\sqrt{2}\,x}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\right\} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\,\pi}{x}}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{x^2}}\right\}.$$

故得公式(3).

§ 17. Fourier 变换的复数形式

函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{itx}\,dt \tag{1}$$

称为 $f(x)$ 的 Fourier 变换,由此得出

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} f(t)\,e^{itx}dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,e^{itx}dt\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\left(f(t)\,e^{itx} + f(-t)\,e^{-itx}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \{[f(t) + f(-t)]\cos tx + i[f(t) - f(-t)]\sin tx\} dt. \tag{2}$$

命

$$G(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{f(t) + f(-t)}{2} \cos tx \, dt \tag{3}$$

及

$$H(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{f(t) - f(-t)}{2} \sin tx \, dt, \tag{4}$$

显然可見 $G(-x) = G(x)$, $H(-x) = -H(x)$. 用反轉公式可知,

$$\frac{f(t) + f(-t)}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty G(x) \cos xt \, dx.$$

由于 $G(x)$ 是偶函数,所以

$$\int_{-\infty}^\infty G(x) \cos xt \, dx = 2\int_0^\infty G(x) \cos xt \, dx$$

及

$$\int_{-\infty}^\infty G(x) \sin xt \, dx = 0.$$

因此得到

$$f(t) + f(-t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty G(x)(\cos xt - i\sin xt) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty G(x) e^{-ixt} dx. \tag{5}$$

又由于 $H(x)$ 是奇函数,所以

$$\int_{-\infty}^\infty H(x) \cos xt \, dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^\infty H(x) \sin xt \, dx = 2\int_0^\infty H(x) \sin xt \, dx.$$

因而由反轉公式得出

$$f(t) - f(-t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty (-iH(x)) \sin xt \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty H(x) e^{-ixt} dx. \tag{6}$$

(5),(6)相加得

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty (G(x) + H(x)) e^{-ixt} dx.$$

由(2),(3),(4)卽得(1)的反轉公式

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(x) e^{-ixt} dx. \tag{7}$$

也可以由(7)推出(1)来,讀者試举出在怎样的条件下,反轉公式(7)能够成立.

§18. 其 他 变 换

在常用的变换中,我們介紹以下的两种,而不給出这些公式成立的条件.

命

$$\phi(s) = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx,$$

这称为函数 $f(x)$ 的 Laplace 变换．把变数 s 写成为 $\sigma+it$．則得

$$\phi(\sigma+it)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-\sigma x}e^{-itx}\,dx.$$

当固定 t 为变数，則

$$\phi(\sigma+it)$$

是函数

$$F(x)=\begin{cases}\sqrt{2\pi}\,f(x)e^{-\sigma x} & \text{当 } x>0,\\ 0 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

的 Fourier 变換

$$\phi(\sigma+it)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-itx}\,dx.$$

由反轉公式得

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\sigma+it)e^{itx}\,dt,$$

卽得

$$F(x)e^{\sigma x}=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\phi(s)e^{sx}\,ds.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\phi(s)e^{sx}\,ds=\begin{cases}f(x) & \text{当 } x>0,\\ 0 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

（当 $x=0$ 时，这积分的数值等于 $\frac{1}{2}f(0)$），这公式称为 Laplace 的反轉公式。

又我們有 Mellin 变換

$$\mathfrak{F}(s)=\int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}\,dx,$$

卽

$$\mathfrak{F}(s)=\int_0^{\infty} f(x)x^{\sigma+it-1}\,dx.$$

換变数 $y=\log x$，則得

$$\mathfrak{F}(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(e^y)e^{\sigma y}e^{ity}\,dy,$$

卽 $\mathfrak{F}(s)$ 是函数 $\sqrt{2\pi}\,f(e^y)e^{\sigma y}$ 的 Fourier 变換，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{F}(s)e^{-ity}dt=2\pi f(e^y)e^{\sigma y}.$$

卽得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{F}(s)e^{-(\sigma+it)y}\,dt=f(e^y).$$

卽得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathfrak{F}(s)x^{-s}\,ds=f(x).$$

这称为 Mellin 变換的反轉公式。

第二十章　常微分方程組

§1. 化任意的微分方程組为一阶微分方程組

假定有方程組

$$\Phi_i\left(x;\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}};\ \cdots;\ y_n,\ \frac{dy_n}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right)=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

我們可以如下引进新变数 $y_i^{(k)}$(及命 $y_i=y_i^{(0)}$):

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx}=y_i^{(k+1)},\quad k=0,1,2,\cdots,m_i-2;\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

因而得出新的方程組:(2)与

$$\Phi_i\left(x;y_1^{(0)},\ y_1^{(1)},\ \cdots,\ y_1^{(m_1-1)},\ \frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx};\ \cdots;\ y_n^{(0)},\ y_n^{(1)},\ \cdots,\ y_n^{(m_n-1)},\ \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx}\right)=0,$$

$$i=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

如果方程組(1)有解,則能从 $y_i(x)$ 得出 $y_i(x)$ 的微商来,使它們适合于(2)与(3). 反之,如果有一組函数 $y_i^{(k)}$ 适合于(2)与(3),亦易証函数 $y_i^{(0)}(i=1,2,\cdots,n)$ 一定适合于(1),也就是在方程組(2)中的 k 挨次取 $0,1,2,\cdots,m_i-2$, 即得出

$$y_i^{(k+1)}=\frac{d^{(k+1)}y_i^{(0)}}{dx^{k+1}}.$$

因此方程組(1)与方程組(2),(3)是等价的.

对

$$\frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx},\ \cdots,\ \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx}$$

来說,(3)是 n 个方程 n 个未知数的方程組. 我們假定它們已經解出,即

$$\frac{dy_i^{(m_i-1)}}{dx}=\varphi_i(x;\ y_1^{(0)},\ \cdots,\ y_1^{(m_1-1)};\ \cdots;\ y_n^{(0)},\ \cdots,\ y_n^{(m_n-1)}),$$

$$i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

連同(2)式在內得出一方程組,它是方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=\varphi_i(x;y_1,\ \cdots,\ y_N),\quad 1\leqslant i\leqslant N \tag{5}$$

的特例. 今后我們仅討論形如(5)的方程組.

在处理方程組(5)时,最好有些矩陣論的知識作为工具. 我們現在假定已經知道了以下的最簡单的結果.

定义 1. 假定

$$\left.\begin{array}{l} u_1=u_1(x_1,\ \cdots,\ x_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_m=u_m(x_1,\ \cdots,\ x_n)\end{array}\right\} \tag{6}$$

是 n 个变数的 m 个連續函数，而且有一阶連續偏微商。如果有一非零函数

$$F(u_1, \cdots, u_m)$$

存在，当(6)代入此函数时，得出一个对 $x_1, \cdots, x_n$ 恆等于 0 的式子，則这 m 个函数称为函数相关，不然，則称为函数无关。

主要的結果是

定理 1. 命 $m = n$，(6) 所定义的函数是函数相关的必要且充分条件是函数行列式(或 Jacobian)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

如果在某一点函数行列式之值 $\neq 0$，则由

$$y_i = u_i(x_1, \cdots, x_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

可以解得在該点附近有

$$x_i = g_i(y_1, \cdots, y_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

現在的討論，实质上是限定在某一給定区域內的。引用这个結果不难找出(3)可以解成为(4)的条件。

§2. 常微分方程組

在 §13.27 中已证明了以下的结果。

n 个未知函数的 n 个一阶方程所組成的微分方程組

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x; y_1, \cdots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x; y_1, \cdots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在給了初始条件

$$y_1|_{x=x_0} = y_1^{(0)}, \ \cdots, \ y_n|_{x=x_0} = y_n^{(0)} \tag{2}$$

之后，有一个解而且仅有一个解 $y_i = \omega_i(x)$ 满足

$$\omega_i(x_0) = y_i^{(0)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

当然，对 $f_1, \cdots, f_n$ 在 $x = x_0$, $y_1 = y_1^{(0)}, \cdots, y_n = y_n^{(0)}$ 的近旁需作些假定。为了方便起见，我們用比 §13.27 更强些的条件：假定 f_i 在这点近旁是連續的，而且对 $y_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 有連續偏微商，这样所得出的結論也是关于在点 x_0 的近旁的。

我們改变初始条件中 $y_i^{(0)}$ 的值，則方程組(1)的一般解含有 n 个任意常数。这些常数当然可以作为初始值 $y_i^{(0)}$ 在解中出現，但也可以以更一般的形式

$$y_i = \psi_i(x, c_1, \cdots, c_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

出现.

給了 $c_1, \cdots, c_n$ 的特定值及 $x=x_0$, 則得出一組 y_i 的初始值. 反之,对任何初始值 $y_i^{(0)}$, 我們也希望由(3)能解出 $c_1, \cdots, c_n$ 的数值来,也就是希望从

$$y_i^{(0)} = \psi_i(x_0, c_1, \cdots, c_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3'}$$

中可以解出 $c_1, \cdots, c_n$. 因此我們要求 ψ_i 对变数 $c_1, \cdots, c_n$ 而言是函数无关的. 带有这样常数 $c_1, \cdots, c_n$ 的解是一般解,例如

$$y_1 = (c_1 + c_2)x + c_3, \quad y_2 = c_3x^2, \quad y_3 = x^2 + c_3x + c_1 + c_2$$

并不是一般解,因为命 $c_1 + c_2 = c$, 实质上只有两个任意常数.

从(3')解出

$$c_i = \varphi_i(x, y_1, \cdots, y_n), \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{4}$$

这就得方程組的一般解的另一形式.

(4)中的任意一个叫做方程組(1)的一个积分. 于是,要作成(1)的一般积分,就需要有 n 个这样的积分,并且它們对 $y_1, \cdots, y_n$ 的函数行列式不为零. 这样我們便可由(4)解出 $y_1, \cdots, y_n$ 来.

方程組(1)可以写成为下面的連比形式:

$$dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \cdots, y_n)} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \cdots, y_n)}. \tag{5}$$

如果用 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 来代替 $x, y_1, \cdots, y_n$, 我們不难得出完全对称的形式

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}}, \tag{6}$$

这里 $X_1, \cdots, X_{n+1}$ 都是 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 的函数. 在新記号下,方程組的积分也变成

$$\varphi_i(x_1, \cdots, x_{n+1}) = c_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{7}$$

假定方程組(6)有 k 个积分

$$\varphi_i(x_1, \cdots, x_{n+1}) = c_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{8}$$

有时我們說方程組的积分不是指等式(8),而是指其左边的函数 $\varphi_i(x_1, \cdots, x_{n+1})$,也就是說,如果把方程組的任何解代入函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1})$ 中,它变为常数,这样的函数 φ 就称为方程組的一个积分, 这里当然假定 $\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1})$ 本身不是常数.

一个非常重要的性质是:方程組(1)的若干积分的函数仍然是方程組(1)的积分,也就是,如果 $F(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ 是 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 的函数,則对变数 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 来說,函数 $F(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ 也是方程組(1)的积分. 原因很簡单,把方程組(1)的值代入,既然 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 都是常数,当然 $F(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)$ 也是常数了.

也可以直接証明:由于(8)是积分,所以

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} X_j = 0.$$

由此

$$dF = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) X_j = 0,$$

即得

$$F = C.$$

假定(6)有 n 个积分(7)，而从 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 这 $n+1$ 个变数中可以解出 n 个来，这样解出后，一个变数为自变数，其他的是这个自变数的函数，也就是从方程組(1)的 n 个函数无关的积分(7)可以給出方程組(1)的一般积分。

例 1.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2+y^2)}. \tag{9}$$

由

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dx}{xz}$$

得

$$y = c_1 x.$$

又在

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{-(x^2+y^2)}$$

中代入 $y = c_1 x$，即得

$$(1+c_1^2)xdx + zdz = 0.$$

因而

$$(1+c_1^2)x^2 + z^2 = c_2,$$

也就是

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

从而两个积分是

$$y = c_1 x, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2. \tag{10}$$

不难証明，函数 $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ 是函数无关的，即 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$.

第一个方程代表通过 z 軸的平面族，而第二个方程代表球心在原点的球面族。这方程組的一般积分是

$$F\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0,$$

这里 $F = F(u, v)$ 是两个变量 u, v 的任意函数。

習題 1. 通过直綫 $x = 0$, $y = 0$ 外的一点，方程組(9)一定有唯一解。通过此直綫上的一点的解的情况如何？

習題 2. 解出

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

此处

$$X = ax + by + cz + d,$$
$$Y = a'x + b'y + c'z + d',$$
$$Z = a''x + b''y + c''z + d''.$$

建議：引进变数 t，考慮

$$\frac{dt}{\lambda t} = \frac{ldx + mdy + ndz}{lX + mY + nZ} \quad \left(= \frac{dx}{X}\right).$$

求 l、m、n，λ 使

$$lX + mY + nZ = \lambda(lx + my + nz) + r.$$

根据 λ 的三值解方程組.

習題 3. 解方程組

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + T(ax + by) = T_1, \\ \dfrac{dy}{dt} + T(a'x + b'y) = T_2, \end{cases}$$

此处 T、T_1、T_2 是 t 的函数.

習題 4. 解方程組

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{2}{t}(x - y) = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{t}(x + 5y) = t, \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} lt\dfrac{dx}{dt} = mn(y - z), \\ mt\dfrac{dy}{dt} = nl(z - x), \\ nt\dfrac{dz}{dt} = lm(x - y). \end{cases}$$

$$\text{(iii)} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{r},$$

此处 $\mathbf{r} = (x, y, z)$，$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$，$\mathbf{a} = (a, b, c)$.

§3. 質点的运动方程

用 t 代表时間，$\mathbf{r} = (x, y, z)$ 代表一質点在空間的位置，m 代表它的質量. $\mathbf{r}$ 是 t 的矢量函数，速度矢量是

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \tag{1}$$

加速度矢量是

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right). \tag{2}$$

Newton 的基本定律是：質量乘加速度等于力，用方程表出为

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F},\quad \mathbf{F}=(X,Y,Z), \tag{3}$$

这里 $\mathbf{F}$ 是力，也就是如果在空間每一点有一力 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x,y,z)$ 作用于这質点，則这質点在空間的运动方程是(3)。

分成分量写出得

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X,\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y,\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z.\end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

命 $\frac{dx}{dt}=u,\ \frac{dy}{dt}=v,\ \frac{dz}{dt}=w$，則得六个方程所形成的微分方程組：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=u, & m\frac{du}{dt}&=X,\\ \frac{dy}{dt}&=v, & m\frac{dv}{dt}&=Y,\\ \frac{dz}{dt}&=w, & m\frac{dw}{dt}&=Z.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

因此給了在 $t=t_0$ 时 x,y,z,u,v,w 的值，就可以唯一地解出(4)来，也就是如果在 $t=t_0$ 时，給了

$$\mathbf{r}=(x,y,z),\quad \mathbf{v}=(u,v,w)$$

的数值，則可以得出方程(3')的解来，也就是知道了初始位置 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ 及初始速度 $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0$，我們就知道質点的运动規律了。

最簡单的例子是自由落体，卽仅仅由于地心吸力把一物体向"下"拉。取 y 軸的負方向为这方向，則力的三支量是

$$X=0,\quad Y=-g,\quad Z=0,$$

卽得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=0. \tag{5}$$

如果在 $t=0$ 时，静止物体在高度 h 向下落，則得初始条件

$$\mathbf{r}_0=(0,h,0),\quad \mathbf{v}_0=(0,0,0).$$

從而解得

$$x=0,\quad y=-\frac{1}{2}gt^2+h,\quad z=0.$$

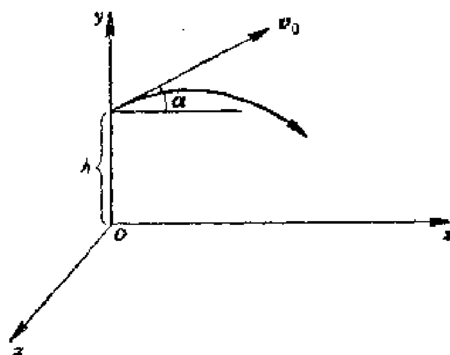


图 117

稍复杂的例子是无空气阻力的弹道：从高度 h 发射，仰角为 α，初速为 $\mathbf{v}_0$。仍取 y 軸为垂直方向。在 y 軸与初速矢量所决定的平面上，取定 x 軸。

如果测得初始位置 $\mathbf{r}_0 = (0, h, 0)$ 及初速为

$$\mathbf{v}_0 = (v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha, 0),$$

不难求出方程組(5)的解答是

$$\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)t, \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t + h, \\ z = 0. \end{cases}$$

一般講来,解方程組(3)常借助于以下一些考虑:

1) 求(3)式与矢量 $\mathbf{v}$ 的內积,得

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v},$$

即得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

即

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \tag{6}$$

此处

$$v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

(6)式就是力学上的动能定理:"动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 的增加等于沿质点軌道移动 $d\mathbf{r}$, 力 $\mathbf{F}$ 所做的功".

如果力 $\mathbf{F}$ 是某一个依賴于 x, y, z 的函数 U 的偏微商,这个函数 U 称为这个力的位势函数,而 $-U$ 称为这一点的位能,即

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

由(6)可知

$$\frac{m}{2}v^2 - U = c, \tag{7}$$

即在运动的整个过程中,动能与位能之和恆为常数.

2) 求(3)与矢量 $\mathbf{r}$ 的矢量积,得

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{r} = \mathbf{F}\times\mathbf{r},$$

即得

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}\times\mathbf{r}) = \mathbf{F}\times\mathbf{r}, \tag{8}$$

$m\mathbf{v}\times\mathbf{r}$ 称为动量矩. 动量矩的变化等于力矩.

如果力的方向总是指向一定点,取这点为原点,得

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

由(8)得

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=c_1,$$

$$m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=c_2,$$

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=c_3.$$

由此立刻看出

$$c_1x+c_2y+c_3z=0,$$

即軌迹在一平面上.

§4. 人造卫星的軌道方程

从地球表面上一点 P 依水平角 α，速度 v_0 射出一个質量为 m 的物体（体积比起地球来相对地很小，不妨看作一个質点），求这物体的运动軌道.

这是上节結果的一个具体的例子，我們把它讲得較詳尽些，而且計算到底.

以通过发射点和地心 O 的直綫作为 y 軸，这軸和投射方向所成的平面作为 (x, y) 平面. 在这平面上通过 O 点的垂直于 y 軸的垂綫作为 x 軸，取其正向使发射方向在第一象限內.

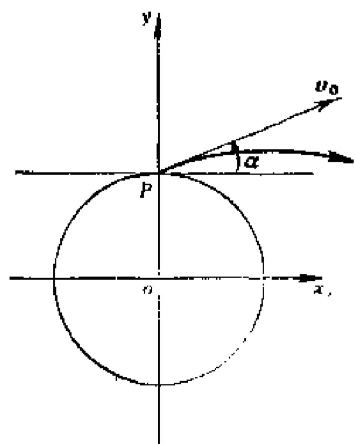


图 118

用 t 表示时間，取发射时刻为 $t=0$，物体运动的坐标用 (x, y) 表示. 由万有引力定律知道有一力

$$f\cdot\frac{mM}{x^2+y^2}$$

把物体拉向球心，其二支量是

$$\frac{-fmM}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{-fmM}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{1}$$

这里

$$M=5.98\times10^{27}\text{克} \tag{2}$$

是地球質量，而引力常数

$$f=6.685\times10^{-23}\,[\text{公里}]^3/[\text{克}][\text{秒}]^2 \tag{3}$$

（福里斯、季莫列娃著普通物理学，114 頁）.

因此得出物体的运动方程：

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{f\cdot mMx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{fmMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \end{cases} \tag{4}$$

这就是人造卫星的运动方程. 现在解方程(4).

由(4)可知

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0 \tag{5}$$

及

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)=$$

$$=-\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{3/2}}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{fM}{(x^2+y^2)^{3/2}}\frac{d(x^2+y^2)}{dt}. \tag{6}$$

积分(5),(6),立刻得出

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c_1 \tag{7}$$

及

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{2fM}{(x^2+y^2)^{1/2}}+c_2. \tag{8}$$

换为极坐标：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 得

$$dx=dr\cdot\cos\theta-r\sin\theta\cdot d\theta,$$
$$dy=dr\cdot\sin\theta+r\cos\theta\cdot d\theta.$$

代入(7),(8)得

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=c_1 \tag{9}$$

及

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2fM}{r}+c_2. \tag{10}$$

消去 $\frac{d\theta}{dt}$ 得

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}.$$

在开始发射时,距离是与时俱增的,所以

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}}.$$

与(9)联立,消去 dt 得

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r^2}{c_1}\sqrt{c_2+\frac{2fM}{r}-\frac{c_1^2}{r^2}}.$$

换变数 $r=\frac{1}{u}$，则

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{u^2c_1}\sqrt{c_2+2fMu-c_1^2u^2},$$

即

$$d\theta=\frac{-c_1du}{\sqrt{c_2+2fMu-c_1^2u^2}}=\frac{-du}{\sqrt{\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2-\left(u-\frac{fM}{c_1^2}\right)^2}}.$$

解得

$$\theta=\cos^{-1}\left\{\left(u-\frac{fM}{c_1^2}\right)\Big/\left[\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}+c,$$

也就是

$$\frac{1}{r}=u=\frac{fM}{c_1^2}+\left[\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2\right]^{1/2}\cos(\theta-c). \tag{11}$$

注意,当

$$\frac{c_2}{c_1^2}+\left(\frac{fM}{c_1^2}\right)^2<0 \tag{12}$$

时,(11)式无意义.

命

$$p=\frac{c_1^2}{fM}\quad(\text{参数}), \tag{13}$$

$$e=\sqrt{1+\frac{c_2c_1^2}{(fM)^2}}\quad(\text{离心率}), \tag{14}$$

得出轨道方程

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)}. \tag{15}$$

这里有三个常数 c_1, c_2, c, 可由开始发射时的情况决定: 当 $t=0$ 时, 假定发射点是地面,即

$$x=0,\quad y=R\quad(\text{地球半径}),$$

也就是 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $r=R$. 再由初速得

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha.$$

由(7)及(8)給出 c_1, c_2 的数值:

$$\left.\begin{aligned}c_1&=-Rv_0\cos\alpha,\\ c_2&=v_0^2-\frac{2fM}{R}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

再由(15)得出

$$R=\frac{p}{1+e\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\right)}=\frac{p}{1+e\sin c},$$

解答

$$\sin c=\frac{\left(\frac{p}{R}-1\right)}{e}. \tag{17}$$

由(14),(16)得

$$\begin{aligned}e^2&=1+\left(v_0^2-\frac{2fM}{R}\right)R^2v_0^2\frac{\cos^2\alpha}{(fM)^2}\\&=\left(1-\frac{Rv_0^2\cos^2\alpha}{fM}\right)^2+\frac{R^2v_0^4\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{(fM)^2}\\&=\left(1-\frac{p}{R}\right)^2+\frac{p^2}{R^2}\mathrm{tg}^2\alpha\geqslant\left(\frac{p}{R}-1\right)^2.\end{aligned} \tag{18}$$

因此(17)中的 c 是一定存在的.

§5. 軌道討論——第一、第二宇宙速度

再进一步研究軌道(4.15)的性质. 特别应当注意的是 $e=0$ 及 $e=1$ 这两个数值.

首先,当 $e=0$ 时,由(4.18)可以看到

$$\frac{p}{R}=1,\quad \operatorname{tg}\alpha=0,$$

即可以得出 $\alpha=0$, $p=R$. 由(4.16)第一式及(4.13)得

$$v_0^2=\frac{fM}{R}. \tag{1}$$

把地球半径 R 及質量 M 的数值代入,即得

$$v_0^2=\frac{6.685\times10^{-23}\times5.98\times10^{27}}{6370}[\text{公里/秒}]^2=62.76[\text{公里/秒}]^2,$$

所以

$$v_0=7.9\ \text{公里/秒}.$$

这是第一宇宙速度.

再当 $e=1$ 时,可以算出

$$v_0^2=\frac{2fM}{R}. \tag{2}$$

所求出的 v_0 是第一宇宙速度的 $\sqrt{2}$ 倍,即得

$$v_0=11.2\ \text{公里/秒}.$$

这是第二宇宙速度.

当 $e<1$ 时,即始速小于第二宇宙速度时,軌道(4.15)是一橢圓. 这是一个經过 P 点的橢圓,在 P 点的切綫斜率是 $\operatorname{tg}\alpha$. 如果軌道上有一点与地球中心的距离小于 R, 則物体便落在地球上而不能完成橢圓軌道,也就是函数

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-c)}$$

的最小数应当是 R(因为开始时是 $r=R$). 易見这一函数的最小值等于 $\frac{p}{1+e}$,因此

$$\frac{p}{1+e}=R,\quad e=\frac{p}{R}-1.$$

由(4.18)可知,这仅当 $\alpha=0$, 換言之,仅当沿地平方向发射才有可能.

另一方面,又由 $e\geqslant0$ 可知 $p\geqslant R$, 即

$$R\leqslant\frac{c_1^2}{fM}\leqslant\frac{R^2v_0^2}{fM},$$

即

$$v_0\geqslant\left(\frac{fM}{R}\right)^{1/2}\ (\text{第一宇宙速度}).$$

这就說明了,当初速度在第一、第二宇宙速度之間,沿地平方向发射,我們才可以获得橢圓軌道.

在实际进行的时候，我們并不用在地面上沿水平方向发射的方法，而是用先垂直向上然后傾斜进入軌道的方法，其原因是空气阻力大，不但要消耗大量能量，而且时間长了还可能使火箭因摩擦生热而燒毁．所以需要尽快地离开大气层．而垂直向上飞行时，在大气层中停留的时間最短．不但这样，发射方向即使稍許偏离了水平方向，也不致于卫星落地．当然，速度可能比第一宇宙速度要稍許大一些．

習题 1. 在离地 200 公里处依水面方向前进的物体，需要怎样的速度才能不落回地面？才能形成圓形軌道(即 $e = 0$)？若把形成圓形軌道的速度命之为 v_0，依此 v_0 但角度偏离水平，在怎样的限度內，才不致于落回地球？

前已講过軌道的最低点为 $R = \frac{p}{1+e}$，而最高点与球心的距离是 $\frac{p}{1-e}$.

再研究速度 v，由(4.8)得

$$v^2 - \frac{2fM}{r} = c_2 = v_0^2 - \frac{2fM}{R} \quad (r > R).$$

由此可見，速度是不均匀的，因为由

$$v^2 = \frac{2fM}{r} + v_0^2 - \frac{2fM}{R}, \quad R \leqslant r \leqslant \frac{p}{1-e}$$

可知

$$v_0^2 - \frac{4fMe}{p} \leqslant v^2 \leqslant v_0^2.$$

由于

$$v_0^2 - \frac{4fMe}{p} = v_0^2 - 4fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p}\right) = v_0^2 + \frac{4f^2M^2}{R^2v_0^2} - \frac{4fM}{R} = \left(v_0 - \frac{2fM}{Rv_0}\right)^2,$$

因此

$$\frac{2fM}{Rv_0} - v_0 \leqslant v \leqslant v_0.$$

这再次說明了，初速度应当在第一、第二宇宙速度之間，同时也說明了最低点速度最快，最高点最慢．軌道上每一点的速度不比初速快．

如果 v_0 大于第二宇宙速度，即 $e > 1$，軌道方程是一股双曲綫

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - c)},$$

假定 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

我們現在証明，随时間增大，r 永远增大，而且趋向于∞.

在开始发射时，r 显然是一个时間的增函数．如果它并不是永远增加的，則一定有一个值使 r 极大，即使 $1 + e\cos(\theta - c)$ 极小．这是一个連續函数，极小值是 $1 - e < 0$. 这是不可能的，所以这一物体一定沿軌道离地愈来愈远．但并不是真的飞向无穷，因为此时虽然地球不能自主，但太阳的引力可能使它不能远离．

这物体的速度平方

$$v^2 = \frac{2fM}{r} + v_0^2 - \frac{2fM}{R} > v_0^2 - \frac{2fM}{R},$$

也就是速度永远大于$\sqrt{v_0^2-\frac{2fM}{R}}$，并且愈远愈接近于这个速度。

2. 讀者自己討論以下两种情况：

(i) 恰好是第二宇宙速度时，

(ii) 垂直发射时，即$\alpha=\frac{\pi}{2}$时。

3. 以上的研究，不仅对地球为然，概括起来，可以有以下的結論：

一个質量为M克的天体，在离中心R公里处发射一物体，对这个天体来說，第一宇宙速度等于$\sqrt{\frac{fM}{R}}$，第二宇宙速度等于$\sqrt{\frac{2fM}{R}}$。

例如，月球半径是1750公里，質量是7.25×10^{25}克，因此月球上造成卫星的速度是

$$\left(\frac{6.685\times10^{-23}\times7.25\times10^{25}}{1750}\right)^{\frac{1}{2}}=1.66,$$

冲出月球引力的速度等于$\sqrt{2}\times1.66=2.34$。

讀者試根据以下数据算出各行星上的第一、第二宇宙速度：

	質量(以地球为单位)	直径(以地球为单位)
水　星	0.07	0.37
金　星	0.81	0.97
地　球	1.00	1.00
火　星	0.11	0.52
木　星	318	10.97
土　星	95	9.4
天王星	15	3.8
海王星	17	3.4
冥王星	0.03?	0.46

§6. 第三宇宙速度

数据：

太阳質量：1.983×10^{33}克，

太阳和地球的距离：1.495×10^{8}公里，

地球繞太阳旋轉的速度：29.76公里/秒。

第一步．在离太阳1.495×10^{8}公里处发射物体，怎样的速度可以逃出太阳引力．由§5可知，速度的平方应当大于或等于

$$\frac{2f\times\text{太阳質量}}{1.495\times10^{8}}=\frac{2\times6.685\times10^{-23}\times1.983\times10^{33}}{1.495\times10^{8}}=1,773.43=(42.11)^2.$$

第二步．地球繞太阳的速度是29.76，所以如果地球上发射时的速率恆超过$42.11-29.76=12.35$公里/秒，就可以达到目的。

第三步，命 v_0 是从地球上发射的始速，則由 §5 知，这物体的速度

$$v^2 = \frac{2fM}{r} + v_0^2 - \frac{2fM}{R} > v_0^2 - \frac{2fM}{R} = v_0^2 - 125.5.$$

如果 v_0 取得使

$$v_0^2 - 125.5 \geqslant (12.35)^2,$$

即

$$v_0^2 \geqslant 278.1 = (16.7)^2,$$

即得所求. 如果取

$$v_0 \geqslant 16.7 \text{ 公里/秒},$$

就保証了脫离太阳的引力而一去不复返了. 这就是第三宇宙速度.

这就是說，当我們在地球上順着地球前进的方向发射（例如，在下弦的时候向月球方向射去），如果初速是 16.7 公里/秒，則在出地球引力范围的时候，它对地球的速度将大于 12.3 公里/秒，加之地球前进的速度 29.8 公里/秒，所以对太阳來說，这物体获得了 42.1 公里/秒的速度. 因而可能逸出太阳系.

必須注意，如果不依照順着地球軌道方向发射，情况就完全不同了.

这也同时說明了苏联发射宇宙火箭为什么取順着地球前进方向发射的道理，也說明了为什么成了“外”行星，而不是“內”行星.

習題. 讀者試根据下列数据算出行星上的第三宇宙速度. 水，金，火，木，土，天王，海王，冥王諸星与太阳的距离各为 58，108，228，780，1430，2880，4500，5900 百万公里，它們繞太阳的平均速度是 47.83，34.99，24.11，13.05，9.64，6.36，5.43，4.73 公里/秒.

§7. 質点組——多体問題

在空間取定一个坐标系，有 n 个質点，它們的坐标是

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n). \end{array}\right\} \tag{1}$$

n 个質点間有內力，即其中任意二質点間的互相作用的力. 例如，第一質点对第二質点的作用力 $\mathbf{J}_{21}$ 与第二質点对第一質点的作用力 $\mathbf{J}_{12}$ 数値相等，但方向相反，加之第 i 質点所受的外力以 $\mathbf{F}_i$ 來代表，如此得出运动方程組

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \dfrac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{J}_{12} + \mathbf{J}_{13} + \cdots + \mathbf{J}_{1n}, \\ m_2 \dfrac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{J}_{21} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{J}_{23} + \cdots + \mathbf{J}_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n \dfrac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \mathbf{J}_{n1} + \mathbf{J}_{n2} + \mathbf{J}_{n3} + \cdots + \mathbf{J}_{nn-1} + \mathbf{F}_n. \end{array}\right\} \tag{2}$$

最有名的例子是天体力学上的 n 体問題. 假定有 n 个天体，質量各为 $m_1, \cdots, m_n$,

并不添加外力，求出仅靠万有引力而得出的軌道，即 $\mathbf{F}_i = 0$ 及

$$\mathbf{J}_{ij} = f\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^2}\left(\frac{x_i - x_j}{\rho_{ij}}, \frac{y_i - y_j}{\rho_{ij}}, \frac{z_i - z_j}{\rho_{ij}}\right), \tag{3}$$

这里 $\rho_{ij}^2 = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2$，即第 i 个天体与第 j 个天体的距离，f 是引力常数．方程組

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \\ &m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -f\sum_{j\neq i}\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant n \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

称为 n 体天体方程，共有 $6n$ 个一次方程．求解 $6n$ 个以 t 为变数的函数 $x_i, y_i, z_i, \frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}$.

$n = 2$ 时，基本上就是我們以上几节所討論过的問題；$n = 3$ 就是历史上沒有解决的有名的三体問題；$n > 3$ 更不必說了．

但我們还是可以給出以下 10 个积分：

1）重心积分．

将(4)总加起来，得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = 0. \tag{5}$$

积分得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i = t\mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{6}$$

分成支量写一共是 3 个方程．(6) 說明了这 n 个质点的重心依等速运动，共有 6 个常数 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$，因此可以作为 6 个积分．

2）扫面积积分．

求方程(4)与 $\mathbf{r}_i$ 的矢量积，得

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \times \mathbf{r}_i = -f\sum_{j\neq i}\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{r}_i = -f\sum_{j\neq i}\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}^3}\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j.$$

由于

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \times \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i),$$

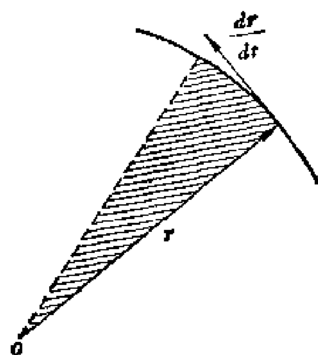


图 119

所以

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i) = 0,$$

即得

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{v}_i \times \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\alpha}. \tag{7}$$

讀者試自己回答何謂扫面积积分．

3）能量积分．

命

$$U = f\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{\rho_{ij}},\tag{8}$$

則

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(f\sum_{i<k}\frac{m_i m_k}{\rho_{ik}} + f\sum_{k<j}\frac{m_k m_j}{\rho_{kj}}\right) = -f\sum_{i\neq k}\frac{m_k m_i}{\rho_{ki}^3}(x_k - x_i).$$

因此(4)式可以改写成为

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i}\right) \quad i = 1, 2, \cdots, n.\tag{9}$$

求此式与矢量 $\mathbf{v}_i$ 的內积,得

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}\cdot\mathbf{v}_i = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right),$$

求和得

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i d(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}dz_i\right) = dU.$$

因此积分得

$$T - U = h,\tag{10}$$

这里 h 是常数, $-U$ 是位能,而

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i\tag{11}$$

是动能. (10)称为能量积分.

我們已經找出了 10 个已知积分,进一步的研究屬于天体力学范围,我們不在这里討論了.

習題. 具体解出 $n = 2$ 的情况,并且与 §§ 3—4 的結果相比較.

§ 8. Lagrange 綫性方程

在 §§ 8—11 中將討論一些一阶偏微分方程,这些偏微分方程的特点是它們的求解可归結为常微分方程組的求解問題.

先从一个最簡单的情况出发,假定

$$\varphi(u, v) = 0,\tag{1}$$

其中 φ 是任意函数, 而 u, v 是 x, y, z 的函数. 我們来消去这任意函数 φ. 对 x, y 求微商,得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, 因此

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

整理一下得

$$Pp+Qq=R, \tag{3}$$

此处

$$\frac{P}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Q}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{R}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}, \tag{4}$$

或与之等价的形式

$$\left.\begin{aligned}P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0,\\ P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在求解偏微分方程(3)的时候,我們主要的困难是找出 u, v 来.

我們現在考虑

$$u=a,\quad v=b, \tag{6}$$

这里 a, b 是常数,微分则得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0,\\ \frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=0.\end{aligned}\right\}$$

因此

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{dy}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{dz}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}},$$

即

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}. \tag{7}$$

这个常微分方程組以 $u=a$, $v=b$ 为解答,因此得出解題法則.

为了求偏微分方程

$$Pp+Qq=R \tag{3}$$

的解答,先写下常微分方程

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{7}$$

来,求出此常微分方程的两个函数无关的解答

$$u=a,\quad v=b, \tag{6}$$

則偏微分方程(3)有一解

$$\varphi(u,v)=0, \tag{1}$$

这里 φ 是任意函数.

反过来看，如果偏微分方程有一解

$$z = f(x, y),$$

以此代入常微分方程的解答(6)，则得

$$u = u(x, y, z) = u[x, y, f(x, y)] = u^*(x, y) = u^*,$$
$$v = v(x, y, z) = v[x, y, f(x, y)] = v^*(x, y) = v^*.$$

由此

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}.$$

由此 u^*、v^* 对 x, y 的 Jacobian 是

$$J = \frac{\partial u^*}{\partial x}\frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{\partial u^*}{\partial y}\frac{\partial v^*}{\partial x} =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) =$$
$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

另一方面，(6)是(7)的解，因此

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0,$$

也就是

$$\frac{\partial u}{\partial x}P + \frac{\partial u}{\partial y}Q + \frac{\partial u}{\partial z}R = 0.$$

同法得

$$\frac{\partial v}{\partial x}P + \frac{\partial v}{\partial y}Q + \frac{\partial v}{\partial z}R = 0.$$

因此

$$\frac{P}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Q}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{R}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = M, \tag{9}$$

这里 M 是公比. 代入(8)可知，

$$J = \frac{1}{M}(R - Pp - Qq). \tag{10}$$

由于 $R - Pp - Qq = 0$，因此，如果 $M \neq 0$，则可知

$$J = 0,$$

也就是 u^*, v^* 是函数相关的，也就是有一函数 φ 使

$$\varphi(u^*, v^*) = 0,$$

也就是把偏微分方程的解代入

$$\varphi(u, v)$$

时，它变为零，即在

$$\varphi(u, v) = 0$$

中包含了解 $z = f(x, y)$.

因此，以上所提出的解题法则并不一定得出所有的解来，还有那些使

$$M = M(x, y, z) = M(x, y, f(x, y)) = 0$$

的 $z = f(x, y)$ 可能是例外. 但由 $M = 0$ 得出来的解是不含有任意函数的，因此含有任意函数的解一定可以由以上的解题法则推算出来.

但请注意，偏微分方程还可能包有一些特解——并不包有任意函数的解.

例 1. 解方程

$$xp + yq = z.$$

由

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

解得 $z = ay$, $z = bx$. 因此得

$$\varphi\left(\frac{z}{y}, \frac{z}{x}\right) = 0.$$

例 2. 解方程

$$(mz - ny)p + (nx - lz)q = ly - mx.$$

由

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$$

得出

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = a$$

及

$$ldx + mdy + ndz = 0,$$

亦即

$$lx + my + nz = b.$$

因而得

$$lx + my + nz = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

例 3. 解方程

$$[1 + (z - x - y)^{1/2}]p + q = 2.$$

由

$$\frac{dx}{1 + (z - x - y)^{1/2}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

可得

$$2y - z = a, \quad y + 2(z - x - y)^{1/2} = b.$$

但特解

$$z = x + y$$

却不能表成为

$$\varphi(2y - z,\quad y + 2(z - x - y)^{1/2}) = 0$$

的形式。要証明这点，以 $z = x + y$ 代入 u, v 得

$$u = 2y - z = y - x,$$
$$v = y + 2(z - x - y)^{1/2} = y,$$

因此 u, v 是不相关的函数。

这个解是从

$$M = \frac{Q}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}} = (z - x - y)^{1/2} = 0$$

得来的。

例 4. 求方程

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} + 5 = 0$$

的解之經过直綫

$$x = a_1 v,\quad y = a_2 v,\quad z = a_3 v$$

者，这里 a_1, a_2, a_3 是常数，而 $3a_1 - 2a_2 \neq 0$。

先由

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{-5}$$

得解

$$u = 3x - 2y,\quad v = 5x + 2z.$$

因而得一般解

$$5x + 2z = \varphi(3x - 2y),$$

这里 φ 是任意函数。以直綫代入，得

$$(5a_1 + 2a_3)v = \varphi[(3a_1 - 2a_2)v],$$

所以

$$\varphi(t) = \frac{5a_1 + 2a_3}{3a_1 - 2a_2}t.$$

因而得出所求的解答

$$(3a_1 - 2a_2)(5x + 2z) = (5a_1 + 2a_3)(3x - 2y).$$

例 5. 求

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$$

的解答之适合于

$$z(1, y) = \varphi(y)$$

者.

先解

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{ydz}{x^3},$$

由前二項得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+a,$$

又由一,三項得

$$dz=\frac{x}{y}dx=x\left(\frac{1}{x}-a\right)dx=(1-ax)dx,$$

即得

$$z=x-\frac{1}{2}ax^2+b=\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2y}+b.$$

因而得一般解

$$z-\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2y}=\chi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),$$

这里 χ 是任意函数. 利用 $z(1,y)=\varphi(y)$, 定出

$$\varphi(y)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\chi\left(1-\frac{1}{y}\right),$$

算得

$$\chi(t)=\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right)-1+\frac{1}{2}t.$$

因而解答

$$z=\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2y}-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\varphi\left(\frac{xy}{xy-y+x}\right)=$$

$$=(x-1)\left(1+\frac{(x+1)(x-y)}{2xy}\right)+\varphi\left(\frac{xy}{xy-y+x}\right).$$

§9. 綫性方程的一般解

以上的解題法則可以推广成为 n 个变数的情形. 求

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=Z \tag{1}$$

的一般解,可以先解

$$\frac{dx_1}{X_1}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{Z}. \tag{2}$$

命共 n 个函数无关的解是

$$\varphi_1(z,x_1,\cdots,x_n)=c_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n(z,x_1,\cdots,x_n)=c_n,$$

这里 $c_1,\cdots,c_n$ 是常数,則偏微分方程(1)的通解是

$$\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=0,$$

这里 Φ 是任意函数.

例 1. 求解

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=mz,$$

这里 m 是常数. 先解

$$\frac{dx_1}{x_1}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{dz}{mz},$$

得出

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},\ \frac{z}{x_n^m}=c_n.$$

因此

$$\frac{z}{x_n^m}=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

这里 Φ 是一任意函数,卽得

$$z=x_n^m\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

这是齐次函数的 Euler 定理的逆定理.

如果方程(1)中 $Z=0$, 則方程組显然有一积分

$$z=c\ (\text{常数}).$$

命 $u_1,\cdots,u_{n-1}$ 是

$$\frac{dx_1}{X_1}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$$

的 $n-1$ 个积分,則方程(1)的解是

$$z=\Phi(u_1,\cdots,u_{n-1}),$$

这里 Φ 是一任意函数.

§ 10. 一般一級偏微分方程的解法——Charpit 法

我們現在考慮一般的一級偏微分方程

$$F(x,y,z,p,q)=0. \tag{1}$$

如果(1)的解答还适合于另一个一級偏微分方程

$$\Phi(x,y,z,p,q)=0, \tag{2}$$

則可由(1)与(2)解出

$$p=\phi(x,y,z),\qquad q=\chi(x,y,z),$$

但 Φ 不能是任意的,它必須使

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{3}$$

如果这条件适合了,則我們可由解

$$dz=pdx+qdy \tag{4}$$

来找出方程(1)的解. 因而解方程(1)的問題一变而为寻求适合于条件(3)的函数 Φ 的

問題.

对 x, y 求偏微商，得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}p+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}q+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0.$$

从前一对方程中消去 $\frac{\partial p}{\partial x}$，得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial q}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)=0.$$

从后一对方程中消去 $\frac{\partial q}{\partial y}$，得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)=0.$$

由于 $\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$，上两式相加后，这两項消去整理之得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\left(-\frac{\partial F}{\partial p}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x}+$$
$$+\left(-\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\left(-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0. \tag{5}$$

(5)是一个函数 Φ 的綫性方程，因而由上节的結果可知，問題化为求解下列綫性方程組的問題了.

$$\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dz}{-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dx}{-\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{d\Phi}{0}.$$

这説明了 $d\Phi=0$，即 Φ 是常数. 这是(5)式的显然解答，不必多論.

将这方程的解答与(1)联立，作为 x, y 的函数解出 p, q，然后积分 (4) 得出解答来，即为所求.

例 1. 解微分方程

$$p^2+q^2-2px-2qy+2xy=0,$$

其对应的常微分方程組是

$$\frac{dp}{2y-2p}=\frac{dq}{2x-2q}=\frac{dx}{-2p+2x}=\frac{dy}{-2q+2y},$$

故

$$dp+dq=dx+dy,$$

卽得

$$p-x+q-y=a.$$

与原方程

$$(p-x)^2+(q-y)^2=(x-y)^2$$

联立，解答

$$2(p-x)=a+[2(x-y)^2-a^2]^{1/2},$$
$$2(q-y)=a-[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}.$$

因此，$dz=pdx+qdy$ 变为

$$2dz=(2x+a)dx+(2y+a)dy+(dx-dy)[2(x-y)^2-a^2]^{1/2},$$

卽得

$$2z-b=x^2+ax+y^2+ay+\frac{x-y}{2}[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}-$$
$$-\frac{a^2}{2^{3/2}}\log(2^{1/2}(x-y)+[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}).$$

这是一个完全解，不难推导出一般解来．但注意，并无奇异解．

習題． 求解

i) $$p^2+q^2-2px-2qy+1=0,$$

ii) $$2(pq+py+qx)+x^2+y^2=0.$$

§ 11. 上节方法的特例

1) Lagrange 方程

$$R-Pp-Qq=0,$$

此时由

$$F=R-Pp-Qq$$

得

$$-\frac{\partial F}{\partial p}=P, \qquad -\frac{\partial F}{\partial q}=Q,$$

$$-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}=pP+qQ=R.$$

因此得綫性方程組

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

卽为前所談过的方程．

2) 解方程

$$\psi(p,q)=0,$$

此时

$$F=\psi(p,q),$$

其中 x, y, z 都不出現，故

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

所以

$$\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}=\frac{dx}{-\frac{\partial\psi}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial\psi}{\partial q}},$$

故得 $p=a$, $q=b$ 都是常数．由原方程可知

$$\psi(a,b)=0,$$

因此

$$dz=pdx+qdy=adx+bdy.$$

因而

$$z=ax+by+c,\quad \psi(a,b)=0.$$

3）解方程

$$\psi(z,p,q)=0,$$

其中 x, y 不出現．命 $F=\psi(z,p,q)$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

因此

$$\frac{dp}{p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{q\frac{\partial F}{\partial z}},$$

故得 $q=ap$．与 $\psi(z,p,q)=0$ 联立，我們可以解出 p 与 q 来，即 $p=f(z)$ 与 $q=af(z)$．代入

$$dz=pdx+qdy,$$

得

$$\frac{dz}{f(z)}=dx+ady.$$

因此

$$\int\frac{dz}{f(z)}+c=x+ay.$$

4）解

$$F=\varphi(x,p)-\psi(y,q)=0,$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial p}=\frac{\partial\varphi}{\partial p},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial q}=-\frac{\partial\psi}{\partial q};\quad \frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

故

$$\frac{dp}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{dx}{-\frac{\partial\varphi}{\partial p}}$$

或

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp + \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx = 0,$$

即

$$\varphi(x, p) = a,$$

故

$$\psi(y, q) = a.$$

解出 p 与 q 得

$$p = \theta_1(x, a), \quad q = \theta_2(y, a).$$

因此

$$dz = \theta_1(x, a)dx + \theta_2(y, a)dy,$$

而

$$z + c = \int\theta_1(x, a)dx + \int\theta_2(y, a)dy.$$

例 1. 求偏微分方程

$$p^2 + q^2 = 1$$

的解之过圆周 $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ 者.

由 2) 已知,这方程有一完全解

$$z = ax + by + c, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

命 $a = \cos\theta,\ b = \sin\theta,\ c = c(\theta)$, 求其一般解

$$z = x\cos\theta + y\sin\theta + c(\theta),$$
$$0 = -x\sin\theta + y\cos\theta + c'(\theta).$$

当 $z = 0$ 时,

$$1 = x^2 + y^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 =$$
$$= (c(\theta))^2 + (c'(\theta))^2.$$

这个微分方程的一般解是 $c(\theta) = \cos(\theta + k)$, k 是常数,而奇异解是 $c(\theta) = \pm 1$. 由奇异解得

$$(z \pm 1)^2 = x^2 + y^2.$$

从一般解

$$z^2 = (x + \cos k)^2 + (y - \sin k)^2,$$

这并非所求之解, 当 $z = 0$ 时得出一点 $x = -\cos k,\ y = \sin k$, 而不是整个圆周 $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$.

索 引 一

七 画

八 画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

十 八 画

索 引 二

N

O

P

R

S

T

V

W

Б

В

З

О

С

高等数学引论

第二卷 第一分册

科学出版社

高等数学引论

第二卷　第一分册

华罗庚

科学出版社

1981

内 容 简 介

本书主要介绍复变函数论的一般理论。书中涉及的方面较多，例如第十一章求和法及第十二章适合各种边界条件的调和函数等内容，在一般的复变函数教材中均未论及。书中不少地方采用由特殊到一般的写法，有助于读者对问题的理解。

本书可作为高等学校教学参考用书。

高 等 数 学 引 论

第二卷 第一分册

华 罗 庚 著

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年6月第一版 开本：787×1092 1/16

1981年6月第一次印刷 印张：18 1/2

印数：精 1—6,160 插页：精3 平2

平 1—6,720 字数：127,000

统一书号：13031·1574

本社书号：2159·13-1

定价：布脊精装 3.75 元
平 装 2.95 元

序　　言

本书是1963年我在中国科学技术大学讲授高等数学时所用的讲义，主要论述复变函数论的一般理论，作为《高等数学引论》的第二卷第一分册出版.

那本讲义在讲授后曾作过较大的修改，可惜修改稿在"四害"横行时已被遗失了. 这份稿子是由仅能找到的原来科大的印刷稿稍加校订而成的. 考虑到《高等数学引论》第一卷出版至今已有十五年，广大读者希望能早日看到第二卷的出版. 如果这一分册全部重新改写，我的工作情况和身体条件也许会使这一分册的出版再推迟很长时间. 好在现在的版本基本上能反映作者的一些观点，所以为了争取时间也就不揣冒昧，将这一分册以现在的形式呈献给读者，并希望阅读后提出宝贵意见，以便再版时修正.

无比感谢党和人民对我的关怀和期望. 我决心以毛主席"为人民服务"的教导严格要求自己，争取在有生之年，把这套书写完整，写到底，为党为人民多做些工作，以报答党的恩情于万一.

华　罗　庚

一九七八年一月十九日于北京医院

目　　录

第一章　复数平面上的几何

§1. 复数平面

一个复数可以写成为

$$z = x + yi. \tag{1}$$

这儿 x 与 y 都是实数，x 称为 z 的实数部分，y 称为 z 的纯虚部分，各以 $Rz(=x)$，$Iz(=y)$ 表之．如果两个复数的实部和纯虚部分别相等，我们就说这两个复数相等．$x - yi$ 称为 z 的共轭数，以 $\bar{z}$ 表之．

对复数的运算我们作如下规定：任给两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，

两数之和为
$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$
两数之积为
$$z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

在平面上取垂直坐标系．对应于一个复数(1)，我们有一点 P，它的坐标是 (x, y)，这点称为复数 z 的写象．这样就建立起复数与平面上的点之间的一一对应的关系．实数对应于 x 轴上的点，因此 x 轴有时也称为实轴．同样原因，y 轴也称为虚轴．今后我们不再区别复数与平面上的点，例如，如果我们说点 $1 + i$ 就是指 $x = 1$，$y = 1$ 所代表的点．

从原点 O 到 P 作一线段，称为矢量 $\overrightarrow{OP}$．对应于一个复数有一个由原点出发的矢量，反之亦然．而且，复数的和对应于矢量之和．矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

称为 z 的绝对值或模，以 $|z|$ 表之．矢量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴的交角 θ 称为辐角，以 $\theta = \arg z$ 表之．度量的方向以反时针方向为正，显然有

$$z = x + yi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} = |z|e^{i\arg z}. \tag{2}$$

不难证明：在此表示法下，两复数 $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ 之积为 $z_1z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$．必须注意辐角是不唯一的．$(\rho, \theta)$ 固然代表 z，而 $(\rho, \theta + 2\pi)$ 也代表 z．更一般地说

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2k\pi \text{（如果 } z \text{ 在 I, IV 象限）} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi \text{（如果 } z \text{ 在 II, III 象限）} \end{cases}$$

这儿 k 是任意整数，而 arctg 表示适合于

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

的反正切函数．适合于

$$-\pi < \varphi = \arg z \leqslant \pi$$

的 φ 称为主值，以 $\arg z$ 表之．

这样表示复数的平面称为 Argon 平面或 Gauss 平面，或迳称为复平面．

以 c（复数 $\beta + i\gamma$）为圆心，以 ρ（实数）为半径的圆的方程式是

$$|z - c| = \rho, \tag{3}$$

也就是 $(z-c)(\overline{z-c}) = \rho^2$，即

$$z\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + c\bar{c} = \rho^2.$$

更一般些，考虑

$$\alpha z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + \delta = 0, \tag{4}$$

这儿 α, δ 是实数，当 $\alpha = 0$ 时，(4) 代表直线

$$\beta x + \gamma y - \frac{\delta}{2} = 0.$$

这是一般的直线方程．如果 $\alpha \neq 0$，则由 (4) 得

$$\left(z - \frac{c}{\alpha}\right)\left(\overline{z - \frac{c}{\alpha}}\right) = \frac{c\bar{c}}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}.$$

如果 $c\bar{c} > \delta\alpha$，则 (4) 代表以 $\frac{c}{\alpha}$ 为圆心，$\sqrt{\frac{c\bar{c}}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}}$ 为半径的圆．当 $c\bar{c} = \delta\alpha$ 时，(4) 所代表的圆化为一点 $\frac{c}{\alpha}$，称为点圆．当 $c\bar{c} < \delta\alpha$ 时，(4) 没有实轨迹，则 (4) 代表一个虚圆．

附记．把 (4) 的系数列成为

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{c} \\ -c & \delta \end{pmatrix}.$$

这是一 Hermitian 方阵．一个 Hermitian 方阵代表一个圆，反之，不同的 Hermitian 方阵可能代表同一圆．不难证明，两个 Hermitian 方阵代表同一圆的条件是它们相差一个实数因子．

如果H的行列式是正的，则它代表虚圆；负的，代表实圆；0 代表点圆．

§2. 复平面上的几何学

考虑变换(或称变形)

$$w = az + b, \quad a \neq 0. \tag{1}$$

(a, b 是复的常数)对应于一个复数 z，我们有一个复数 w，并且可以解得

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}. \tag{2}$$

而对应于一个 w，也有唯一的一个 z，因此变换 (1) 把复平面一一对应地变为其自己．又如

$$z = a_1 z_1 + b_1, \quad a_1 \neq 0,$$

则得

$$w = a(a_1 z_1 + b_1) + b = aa_1 z_1 + ab_1 + b.$$

依旧如 (1) 的形式，即连续施行两次形如 (1) 的变形依然是形如 (1) 的变形，这些性质可以概括为“群”的概念．所有的形如 (1) 的变换称为成一整线性变换群．

我们现在先研究在此变换群之下的“几何学”．

首先，任何一点可以变为任何一点，即如果给了任何二点 z_0 及 w_0 我们可以找到一个

形如 (1) 的变换把 z_0 变为 w_0. 显然

$$w = z + (w_0 - z_0)$$

有此功能,这一性质称为可递性,即在整线性变换群下,复平面成一可递集合.

其次,任何两点可以变为任何两点,例如变形

$$w = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} z + \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2} \tag{3}$$

可以把 z_1 变为 w_1, 把 z_2 变为 w_2.

再次考虑三个点的问题,并不是任意三点都能变为任意三点. 三点 z_1, z_2, z_3 依次变为 w_1, w_2, w_3 的条件是

$$\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}. \tag{4}$$

显然 (3) 把 z_1, z_2 变为 w_1, w_2. 又由 (4) 可知

$$\frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} z_3 + \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2} = w_1 \left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) + w_2 \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right)$$

$$= w_1 \left(\frac{w_3 - w_2}{w_1 - w_2}\right) + w_2 \left(\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right) = w_3,$$

即如果条件 (4) 适合,则 (3) 就把 z_1, z_2, z_3 依次变为 w_1, w_2, w_3. 反之,如果

$$w_i = a z_i + b,$$

则得

$$\begin{vmatrix} w_1 & z_1 & 1 \\ w_2 & z_2 & 1 \\ w_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

这等价于 (4). 概括起来可以作如下的说法: 三点定一比 $\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$, 三点可以依次变为另三点的必要且充分条件是比值相等.

比值的几何意义是什么? 命

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \rho e^{i\theta}.$$

ρ 是三角形两边边长之比, 而 θ 是夹角, 也就是如果两个三角形有一角相等, 夹这角的两边的比例相等,则可以由整线性变换把其一变为另一.

刚才是以点为对象的几何学,现在以直线及圆为对象来进行研究,变形 (1) 显然变直线为直线,变圆为圆.

直线的一般形式是

$$I(cz + d) = 0. \tag{5}$$

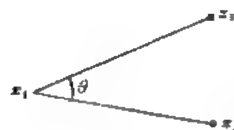


图 1

变换 $w = cz + d$ 把直线 (5) 变为 $Iw = 0$, 即变为实轴, 因此复平面上的任一直线可经过整线性变换变为实轴, 也就是直线成一可递集合.

两条直线可以变为两条直线的必要且充分条件是前二直线的夹角等于后二直线的夹角,读者试自证之.

圆的一般形式是

$$(z-c)(\overline{z-c})=\rho^2.$$

经变换 $z-c=\rho w$ 可以变为 $w\overline{w}=1$，即以原点为中心的单位圆．因此，任何(实)圆都可以变为单位圆，也就是在整线性变换群之下，(实)圆成一可递集．

读者试自求出两圆变为两圆的必要且充分条件，先分相交不相交，相交的看交角，不相交的看什么？

§3. 线性变形（Möbius 变形）

现在研究比整线性变换群更一般的群：这群是由形如

$$w=(az+b)/(cz+d),\quad ad-bc\neq 0 \tag{1}$$

的变换所组成的，特别当 $c=0$ 时这就是整线性变换．由所有的形如 (1) 的变换所成的集合称为线性变换群．变换 (1) 称为线性变换或 Möbius 变换或称射影变换．显然 (1) 有逆变换

$$z=(dw-b)/(-cw+a). \tag{2}$$

也不难证明连续施行两次形如 (1) 的变换其结果仍然是形如 (1) 的变换，所得出的变换称为前两变换之积．

但有一点需注意，(1) 并不把复平面一对一地变为其自己，由 (1) 可见并无 w 与 $z=-\frac{d}{c}$ 对应，由 (2) 可见并无 z 点可以对应于 $w=\frac{a}{c}$．

如果要求一一对应，我们势必要扩充我们的复平面．加上一个无穷远点，即 (1) 把 $-\frac{d}{c}$ 变为无穷远点 $w=\infty$．而 $z=\infty$ 这一点经 (1) 而变为 $\frac{a}{c}$．

加上无穷远点的平面称为函数论平面或称一维复射影空间．一维复射影几何学就是研究在一维射影群下，一维射影空间的性质．

较严格的定义如下考虑：非全为零的一对复数 (z_1, z_2)，如果有一个复数 $p(\neq 0)$ 使

$$z_1=pw_1,\quad z_2=pw_2,$$

则两个复数对 (z_1, z_2) 及 (w_1, w_2) 称为等价，用符号

$$(z_1, z_2)\sim(w_1, w_2)$$

表之．等价关系显然有以下的三性质：

(i) $(z_1, z_2)\sim(z_1, z_2)$；

(ii) 若 $(z_1, z_2)\sim(w_1, w_2)$，则 $(w_1, w_2)\sim(z_1, z_2)$；

(iii) 若 $(z_1, z_2)\sim(w_1, w_2)$，$(w_1, w_2)\sim(u_1, u_2)$，则 $(z_1, z_2)\sim(u_1, u_2)$．

依等价关系把所有的非 0 复数对分类，凡等价的归一类，不同类的对一定不等价．每一类定义一点，这些点的集合便成一维射影空间．如果 $z_2\neq 0$，则 $\frac{z_1}{z_2}=z$ 就是普通复平面上的点，而 (z_1, z_2) 称为点 z 的齐次坐标，这说明与 (z_1, z_2) 同一类的 (pz_1, pz_2) 也代表同一点 z．如果 $z_2=0$，则 (z_1, z_2) 代表无穷远点，由于 $(z_1, 0)\sim(1, 0)$，所以无穷远点是唯一的．

在齐次坐标下线性变换也可以写成为

$$\begin{cases} w_1 = az_1 + bz_2, \\ w_2 = cz_1 + dz_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

用矩阵符号可以写成为

$$(w_1, w_2) = (z_1, z_2)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

注意,并不是对应于一个方阵 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 就有一个变换.

由于等价关系,对任一 $p(\neq 0)$, $\begin{pmatrix} ap & cp \\ bp & dp \end{pmatrix}$ 也代表相同的变换,这一点从 (1) 也显然可以看出,因为分子分母同乘一数 p, 其值不变.

方阵

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

也称为变形 (1) 的方阵,但需注意,对任一 $p \neq 0$, $p\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 都是代表同一变换.

对应于方阵

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

的两个变形之积的方阵等于所对应的方阵之积

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + b_1c, & ac_1 + cd_1 \\ ba_1 + db_1, & c_1b + dd_1 \end{pmatrix}.$$

§4. 群 与 分 群

定义 1. 如果一个线性变换的集合适合于以下的三条件则称为成一个群:

(i) 包有单位变换: $w = z$.

(ii) 包有逆变换: 即如果它包有 $w = (az + b)/(cz + d)$, 则也包有

$$w = (dz - b)/(-cz + a).$$

(iii) 包有其中任二变换之积: 即如果它包有

$$w = (az + b)/(cz + d), \quad w = (a_1z + b_1)/(c_1z + d_1),$$

则也包有

$$\begin{aligned} w &= [a(a_1z + b_1)/(c_1z + d_1) + b]/[c(a_1z + b_1)/(c_1z + d_1) + d] \\ &= [(aa_1 + bc_1)z + (ab_1 + bd_1)]/[(ca_1 + dc_1)z + (cb_1 + dd_1)]. \end{aligned}$$

定义 2. 一个群的一部分如果也成一群,则这部分称为原群的分群(或子群).

例 1. 所有的线性变换成一群.

例 2. 所有的整线性变换成一群,这是线性变换群的分群.

例 3. 所有的形如 $w = z + a$ 的变换成一群,称为平移群,它是整线性变换群的分群. 整线性变换群之另一分群是

$$w = az, \quad a \neq 0.$$

而这个群又有两个重要分群. 对正数 k, 所有的形如 $w = kz$ 的变换所成的群, 称为放

大缩小群. 对所有的绝对值等于1的数 $e^{i\theta}$, $w=e^{i\theta}z$ 成一个群,称为旋转群.

例 4. 对实数 a, b, c, d,

$$w=(az+b)/(cz+d),\ ad-bc\neq 0$$

也成一群,称为实群. 适合于 $ad-bc=1$ 的成一实群的分群.

例 5. 形如

$$w=(az-b)/(\bar{b}z+\bar{a}),\ a\bar{a}+b\bar{b}=1$$

的变形也成一群,称为酉群.

例 6. 形如

$$w=az+b,\ |a|=1$$

的变换成一群. 如果写成实数的形式,即命

$$w=u+iv,\ z=x+iy,\ a=e^{i\theta},\ b=p+iq,$$

则得

$$u=x\cos\theta-y\sin\theta+p,$$
$$v=x\sin\theta+y\cos\theta+q.$$

这就是我们所习知的刚体运动,即旋转与平移,因此这群也可以称为刚体运动群.

例 7. 形如

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

的变形也成一群. 这群称为非欧运动群,或称 Лобачевский 群.

例 8. 所有的形如

$$w=z+\omega k,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

的变换成一群,称为以 ω 为周期的群. 它是以下的双周期群的子群,

$$w=z+\omega l+\omega' k,\ l, k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

例 9. 如果 a, b, c, d 是适合于

$$ad-bc=1$$

的整数,则形如

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

的线性变换也成一群,称为模群.

例 10. 如果 a, b, c, d 是适合于

$$ad-bc=1$$

的复整数(如果 α_1, α_2 都是整数, $a=\alpha_1+\alpha_2 i$ 称为复整数.),则形如

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

的变形也成一群.

定义. 在一群 G 中如果可以找出一批变换, 使 G 中任一变换都可表为这些变换及其逆变换之积,则这批变换称为群的演出元素.

例 11. 例 8 中所给的群,以

$$w=z+\omega$$

为周期群的演出元素. 而双周期群以

$$w=z+\omega,\ w=z+\omega'$$

为其演出元素.

例 12. 整线性变换所成的群,可以由以下诸元素演出之:

(i) $w = z + b$, (平移),

(ii) $w = e^{i\theta} z$, (旋转),

(iii) $w = kz$, (放大缩小), $k > 0$.

"放大缩小"或称"仿射". 演出元素有以下的功用: 任何一个性质经平移,旋转,仿射而不变,则经整线性变换也不变. 例如,两直线的夹角. 反之,如两点间的距离虽经平移与旋转不变,但它经仿射而变化,因此距离在整线性变换群下是可能变化的.

例 13. 再看线性群,由于

$$w = (az + b)/(cz + d), \quad c \neq 0$$

可以变为

$$w = \frac{a}{c} + z', \quad z' = \frac{1}{z''}, \quad z'' = \frac{c(cz + d)}{bc - ad}$$

之积,因此这群可由整线性变换群添加 $w = \frac{1}{z}$ 而得之. (如果 $c = 0$, 则本身就是整线性变换,毋待多论.)因此,线性变换可以由平移,仿射,旋转及 $w = \frac{1}{z}$ 演出之.

§ 5. Neumann 球

为了把无穷远点讲得更清楚,我们引进球面投影法,建立起球面与平面的关系.

作一球,其半径为 1,其球心在原点. 设球面动点为 $P(\xi, \eta, \zeta)$, 则此球面的方程式是

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{1}$$

从点 $N = (0, 0, 1)$ 把球上之一点 $P = (\xi, \eta, \zeta)$ 投影于 ξ-η 平面上之一点 $Q = (x, y)$. 命 T 为以 ON 与 OQ 为边的矩形的另一顶点. 命 SPF 平行于 NO, 命 FG 与 QH 平行于 η 轴, 则 $OG = \xi$, $FG = \eta$, $PF = \zeta$, $OH = x$, $QH = y$. 由于三角形 NSP 与 NTQ 的相似性,可知

$$(1 - \zeta):1 = SP:TQ = NS:NT = OF:OQ = \eta:y = \xi:x.$$

所以

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \tag{2}$$

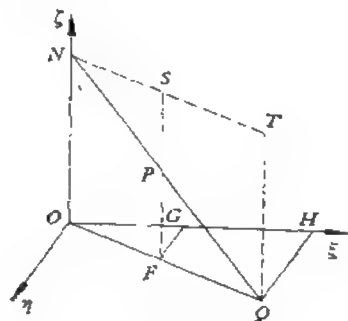


图 2

由 (1) 可知

$$1 + x^2 + y^2 = \frac{(1 - \zeta)^2 + \xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2}$$

$$= \frac{1 - 2\zeta + 1}{(1 - \zeta)^2} = \frac{2}{1 - \zeta}.$$

因此

$$\xi = \frac{2x}{r}, \quad \eta = \frac{2y}{r}, \quad \zeta = 1 - \frac{2}{r}, \quad r = 1 + x^2 + y^2. \tag{3}$$

写 $z = x + iy$，公式(2)与(3)建立单位球与复射影平面间的一一对应关系($z=\infty$ 对应于 N).

平面上一个圆

$$\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0 \tag{4}$$

变为

$$\alpha\left(\frac{2}{1-\zeta} - 1\right) + 2\beta \frac{\xi}{1-\zeta} + 2\gamma \frac{\eta}{1-\zeta} + \delta = 0.$$

即

$$(\alpha - \delta)\zeta + 2\beta\xi + 2\gamma\eta + \alpha + \delta = 0. \tag{5}$$

这是一个平面，与单位球交于一圆. 反之有一平面 (5)，我们在复射影平面上也得一圆 (4). 现在证明：视 (5) 交，切，或不交单位球而决定圆 (4) 为实圆，点圆，虚圆.

从几何上来说明这问题十分容易. 如果 (4) 是实圆，由投影法的性质，在单位球上一定有轨迹，它是单位球与 (5) 的交线，即 (5) 一定与单位球相交，同样证明相切及不相交的情况. 因此虚圆在三维空间也有了实表示法，即一个不交于单位球的平面. 但必须注意唯一的例外，即虚圆 $z\bar{z} + 1 = 0$ 所对应的 (5) 是 $2 = 0$，是一矛盾方程.

现在我们研究球上大圆在平面上所对应的圆的性质. 一个大圆与赤道交于两点，这两点是平面上单位圆的一个直径的两端. 因此球上的一个大圆对应于平面的交单位圆于一直径两端的圆，反之亦真. 从这个性质我们容易证明以下的初等平面几何上的定理.

定理 1. 假定两个圆 A, B 都交定圆 Γ 于直径之两端，则 A, B 一定有两个交点. 过这两交点作圆 C，它也是交 Γ 于直径两端的圆.

证. 设两圆 A, B 对应于球面上大圆 A_1, B_1. 他们的交点是球的直径的两端. 假定 C_1 是对应于 C 的圆，由其过球的直径之两端，因此 C_1 是大圆，其对应的 C 当然是交于 Γ 的直径两端的圆.

§6. 交　　比

现在考虑线性群下的几何学.

由于线性群的子群整线性群已经能把任意两点变成为任意两点，因此射影空间成一可递集，任意二点可以变为任意二点.

现在再证任意三点可以变为任意三点. 由以上的性质不妨假定三点中之二已经变为 $0, \infty$，而另一是 a，则再施行

$$w = a^{-1}z,$$

可以把原来三点变为 $0, 1, \infty$.

由于使 $0, 1, \infty$，都不动的变换是恒等变换，故任意四点并不能变为任意四点.

定义.

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} \Big/ \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4}$$

称为 (z_1, z_2, z_3, z_4) 之交比，特别当 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = -1$，谓四点 z_1, z_2, z_3, z_4 组成调和点列.

定理 1. 交比经线性变换后保持不变.

命

$$w_i = (az_i + b)/(cz_i + d),$$

则

$$w_i - w_j = \frac{(ad - bc)(z_i - z_j)}{(cz_i + d)(cz_j + d)}.$$

因此

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

定理 2. 四点 w_1, w_2, w_3, w_4 可以依次变为 z_1, z_2, z_3, z_4 的必要且充分条件是它们的交比相等.

证. 前已证明如果 $w_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 可以依次变为 $z_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$，则交比相等.

任意四点中的三点可以变为 $0, \infty, 1$，假定四点已变成为 $0, \infty, z, 1$，则交比等于 z. 即任何交比为 z 的四点一定可以变为 $0, \infty, z, 1$. 证毕.

具体地看一下,线性变换

$$w = (z_1, z_2, z_3, z) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} \Big/ \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}\frac{z_2 - z}{z - z_1}.$$

它把 z_2 变为 0，z_1 变为 ∞，而把 z_3 变为 1. 因此

$$(w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z) \tag{1}$$

定义一个线性变换，把 $z = z_1, z_2, z_3$ 变为 $w = w_1, w_2, w_3$.

由于交比的不变性,此线性变换是唯一具有此性质的. 因此,(1) 所表示者乃线性变换的一般形式,即三对对应点唯一地决定一个线性变换. 这个变换就是 (1) 式.

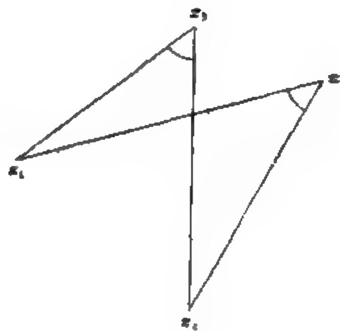


图 3

考虑交比的辐角

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z) = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} - \arg\frac{z - z_1}{z_2 - z} = \angle z_1 z z_2 - \angle z_1 z_3 z_2.$$

如果交比是实数，即 $\angle z_1 z z_2 = \angle z_1 z_3 z_2$，可见 z 在经三点 z_1, z_2, z_3 的圆周上. 反之亦然.

若 (z_1, z_2, z_3, z) 是实数，则由 (1) 所定义的 (w_1, w_2, w_3, w) 也是实数. 因此，当 z 过由 z_1, z_2, z_3 所决定的圆周时，w 也过由 w_1, w_2, w_3 所决定的圆周. 但需注意，如果 z_1, z_2, z_3 在一直线上,则所定的直线亦叫"圆",可以认为是半径为∞的"圆".

所以线性变换把圆变为圆. 特别取 $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = -i$，则过 z_1, z_2, z_3 的圆是单位圆. 取 $w_1 = \infty, w_2 = 0, w_3 = 1$，则过 w_1, w_2, w_3 的圆是 x 轴，因此得变换

$$w = (w_1, w_2, w_3, w) = (z_1, z_2, z_3, z) = i\,\frac{1 + z}{1 - z}. \tag{2}$$

它把单位圆变为实轴,并且把单位圆的内部 $|z| < 1$ 变为上半平面 $Iw > 0$.

如果取另一次序 $z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = -i$，则得

$$w = -i\,\frac{1 - z}{1 + z}.$$

它把圆的外部 $|z|>1$ 变为上半平面 $Iw>0$.

又取 $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=\infty$, 则

$$w=\frac{z-1}{z}=1-\frac{1}{z}.$$

这变形把上半平面变为其自己．又取 $z_1=1$, $z_2=0$, $z_3=\infty$, 则

$$w=\frac{z}{z-1}.$$

它把上半平面变为下半平面.

(读者试求出：z_1, z_2, z_3 以任何次序取 0, 1, ∞ 的各种变形．并且区别哪些是变上半平面为上半平面者,哪些是变上半平面为下半平面者.)

§7. 圆　对

以圆为几何对象．上节已经说明了,在线性变换群下,平面上所有的圆(包括直线)成一可递集．现在我们来考虑圆对的问题.

定理 1. 线性变换使二圆的交角不变.

证．假定两圆的交点在 z_1, z_2(图 4)．在二圆上各取一点 z_3, z_4．这些点交比的辐角

$$\arg(z_3, z_4, z_1, z_2)=\angle z_3z_2z_4-\angle z_3z_1z_4.$$

当 z_3 与 z_4 都趋近于 z_1 时,即得两圆之交角．由交比的不变性,故定理得证.

定理 2. 两个相切的圆可以变为任意两个相切的圆．两对相交的圆的夹角如果相等,则可由其一对变为另一对.

证．把交点之一变为 ∞,则得:(i) 把相切圆变为平行线,(ii) 把相交圆变为二相交的直线.

任意两条平行线可以变成为 $y=0$ 与 $y=1$．故得第一段结论．任意夹角为 θ 的直线可变 $y=0$ 及 $x\sin\theta-y\cos\theta=0$．因得第二结论.

也就是：相交的两圆以夹角为其唯一的不变量.

再看不相交的情况．假定 A, B 是两个不相交的圆．先把 A 变为一条直线 A_1, 同时把 B 变为圆 B_1(图 5)．A_1 与 B_1 也不相交．通过 B_1 的中心作一直线 l 垂直于 A_1, 交 A_1 于 M．以 M 为中心作一圆 C 正交 B_1．由于 C, l 相交,出定理 1 可知有一线性变换把 C,

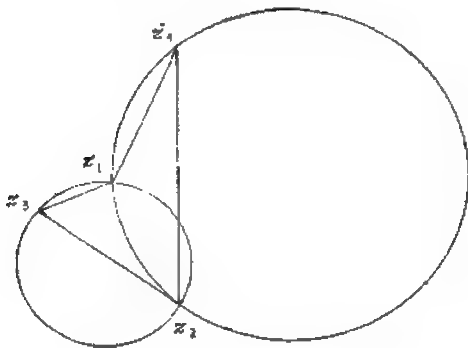


图 4

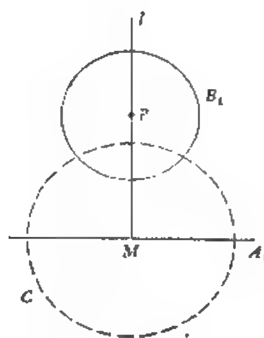


图 5

l 变为二直线（正交的），A_1，B_1 变为与二直线正交的二个圆 A_2，B_2，因此 A_2，B_2 是同心圆．因此得

定理 3. 任意两个不交圆可以变为两个同心圆．

两个不交圆的不变量是什么？同心圆过圆心的直线交两圆于四点．这四点有交比．这交比就是不变量（注意虽然直线可以不同，但交比始终相等），这一不变量可以改述为：两个不交圆 A，B，作一圆与 A，B 都正交，交出四点．这四点的交比，就是两个不交圆的唯一不变量．

附记 1．两圆

$$\alpha(x^2+y^2)+2\beta x+2\gamma y+\delta=0,$$
$$\alpha_1(x^2+y^2)+2\beta_1 x+2\gamma_1 y+\delta_1=0$$

的中心各为 $\left(-\frac{\beta}{\alpha},-\frac{\gamma}{\alpha}\right)$，$\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1},-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)$，半径各为 $\sqrt{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha\delta}{\alpha^2}}$，$\sqrt{\frac{\beta_1^2+\gamma_1^2-\alpha_1\delta_1}{\alpha_1^2}}$．因此它们正交的条件是

$$\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha\delta}{\alpha^2}+\frac{\beta_1^2+\gamma_1^2-\alpha_1\delta_1}{\alpha_1^2}=\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2,$$

即

$$\alpha_1^2(\beta^2+\gamma^2-\alpha\delta)+\alpha^2(\beta_1^2+\gamma_1^2-\alpha_1\delta_1)=(\alpha_1\beta-\beta_1\alpha)^2+(\alpha_1\gamma-\gamma_1\alpha)^2,$$

即

$$\alpha_1\delta+\alpha\delta_1=2\beta\beta_1+2\gamma\gamma_1. \tag{1}$$

这个正交条件是在 $\alpha\neq 0$，$\alpha_1\neq 0$ 的条件下推出来的．不难证明，当 $\alpha=0$ 或 $\alpha_1=0$ 时，它也代表两方程所定义的直线的正交性．

附记 2．把条件 (1) 改写为

$$2\beta\beta_1+2\gamma\gamma_1-\alpha\delta_1-\delta\alpha_1=0.$$

命

$$Q=-2\beta\beta_1-2\gamma\gamma_1+\alpha\delta_1+\delta\alpha_1.$$

在 $\alpha=\alpha_1$，$\beta=\beta_1$，$\gamma=\gamma_1$，$\delta=\delta_1$ 时，则当 $Q>0$，$=0$，<0 原方程所对应的圆分别是虚，点，实．

§8. 圆 串 (Pencil)

定义. 给了两个圆 A，B．与 A，B 正交的圆成一集合，称为与 A，B 共轭的圆串．

定理 1. 圆串有一个参变数．

证．首先如果 A，B 相交．我们不妨假定 A，B 是以 O 为交点的直线，与此二直线正交的圆是以 O 为中心的任意圆，即以半径 R 为参变数的圆串．

其次，A，B 相切．不妨假定 A，B 是二平行的直线，与 A，B 正交的圆是所有的垂直于 A，B 的直线，也是一个参变数．

最后，A，B 不交．不妨假定 A，B 是二同心圆，垂直于 A，B 的圆是通过圆心的所有的直线，也是一个参变数．

定义. 这三类串各称为双曲的，抛物的，椭圆的．

在定理 1 的证明中实质上已经给出了串的标准型.

任何一个双曲串可以用线性变换变为"以原点为中心的所有的圆"其中包括两个点圆,一在原点,一在 ∞. 同时也可以推出双曲串中任二圆不相交. 两个点圆 P, Q 称为这串的极限点.

任何一个抛物串可以用线性变换,变为"平行于 x 轴的所有直线",以 ∞ 为切点. 因此抛物串的诸圆有一公切点,此点称为结点.

任何一个椭圆串可以用线性变换变为"过原点的所有的直线",每一直线过两点 0, ∞. 因此椭圆串的圆过两个定点.

因此,任何一个串可以变为以上三者之一. 由于椭圆串中任何两圆有二公共点,抛物串有一公共点,双曲串无公共点,因此,没有变换可以把一类性质的串变为另一类性质的串.

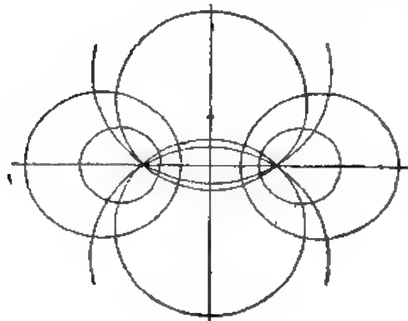


图 6

也显然可见,如果知道了一串中的两个圆,则这个串就唯一决定了.

由于"以原点为中心的圆"所成的串与"过原点的直线"所成的串是正交的(即一串中任一圆与另一串中任一圆正交),由此可以有椭圆串正交于一个双曲串. 同时有抛物串正交于一个抛物串. 双曲串正交于一个椭圆串. 这样的串称为互相共轭(图 6).

由标准型可以看出: 给了平面上一点(除极限点和结点外),在串中有一个圆而且只有一个圆通过此点.

附记 1. 参数所活动的范围也各有不同的性质. 双曲串的参数与射线上的点一一对应(例如 $(0, \infty)$). 抛物串的参数与一直线上的点一一对应. 椭圆串的参数则与圆周上的点一一对应. 由此也可推出没有线性变换可以把不同类的串变来变去.

附记 2. 用矢量 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 表圆

$$\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0,$$

则由两实圆 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 及 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ 所定义的圆串是由圆

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + \mu(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$$

所组成的. 这儿 λ, μ 是非同时为 0 的任意实数.

由此代数形式进行分类. 由二次型

$$(\lambda\alpha + \mu\alpha_1)(\lambda\delta + \mu\delta_1) - (\lambda\beta + \mu\beta_1)^2 - (\lambda\gamma + \mu\gamma_1)^2$$

入手,这个二次型可能有三种不同的情况: (i) 标签是+,-(双曲串),(ii) 降秩(抛物串),(iii) 定负(椭圆串).

§9. 圆 族 (Bundle)

现在研究三个圆 A, B, C 的问题. 假定它们没有公共交点.

若 A, B 无交点,我们有线性变换把 A, B 变为同心圆 A_1, B_1. 假定 C 也变为 C_1. 过 A_1, B_1 与 C_1 的中心作一直线,这直线正交 A_1, B_1 与 C_1 三圆. 因此在这种情况下,我们可以找到一圆与 A, B, C 三圆直交.

其次，若 A，B 相切，可找到一个线性变换把 A，B 易为二平行线 A_1，B_1。C 也因而变为 C_1。由 C_1 的中心可以作一直线垂直于 A_1，B_1 因此，在这情况下也有一圆与 A，B，C 三圆正交.

最后，如果 A，B 有交点，则有线性变换把 A，B 变为两直线 A_1，B_1 相交于 O。而 C 也同时变为 C_1。(i) O 在 C_1 之外，我们能够找到一个以 O 为中心而与 C_1 正交的圆。也就是在这种场合下，有一圆同时正交三圆 A，B，C（图 7）；(ii) O 在圆 C_1 之内，以 O 为

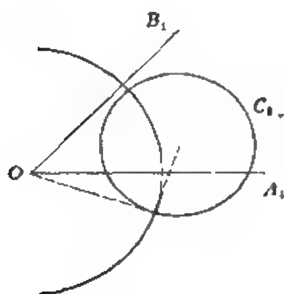


图 7

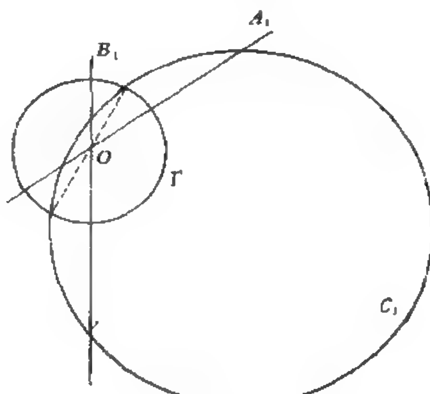


图 8

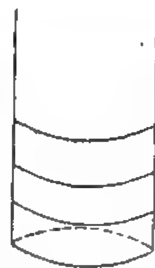
中心作一圆 Γ，使 C_1 与 Γ 的交点在 Γ 的直径的两端(图 8)。因此有

定理 1. 射影平面上的三个圆一定是以下三种情况之一： (i) 有一公共点，(ii) 有一公共正交圆，(iii) 有一线性变换把这三圆变为交定圆 Γ 于 Γ 之直径两端的圆.

定义. 与一定圆正交的所有的圆所成的集合称为双曲的圆族. 过一定点的所有的圆所成的集合称为抛物的圆族. 而经过线性变换可以变为交定圆于其直径两端的所有的圆的集合称为椭圆的圆族.

这三种不同的圆族不可能用线性变换从其一变为另一. 其道理是：椭圆族中任意两个圆一定有两个交点，抛物族中两个圆可能有两个交点，也可能仅有一个交点，但并不存在两个圆无交点的，双曲族中存在有两个圆无交点的.

再看参数变化的情况. 双曲圆族所正交的圆不妨假定是 x 轴，这双曲圆族中的圆是中心在 x 轴上的圆. 圆心的位置与直线 $(-\infty, \infty)$ 相对应，而半径大小从 0 到 ∞，所以它是一个两个参数的系. 参数变化范围与半个平面有相同的情况. 抛物圆族，不妨假定其公共点是 ∞，这圆族中的圆是任意直线，所以有两个参数，变化范围与全平面相同. 椭圆族的定圆不妨假定是单位圆，它由过单位圆的直径的两端的圆所组成. 定圆直径的位置决定于它和 x 轴的夹角，圆的半径从 0 变到 ∞，因此是两个参变数的，并且可以半柱面表之(图 9).


图 9

定理 2. 如果圆族包有两个圆 A 与 B，它一定也有由 A，B 定出的圆串中的所有的圆.

证. 1) 如果是抛物族，即有一公共点 P. 无疑问，因为其中任意二圆 A，B 必有 P 为其公共点，而 A，B 串上之圆也一定过此公共点.

2）双曲族中如果一个圆正交 A 与 B，则也正交 A，B 所定义的串中之圆.

3）椭圆族由以下的初等几何定理推得之．如果 A，B 各交 Γ 于其直径之两端，则过 A，B 交点的圆也交 Γ 于其直径之两端．而这一定理已经在 § 5 中证明过了．

不难证明

定理 3. 命 P 是平面上的任一点．族中无穷个圆过 P 点，这些圆成一串（P 不是抛物族的共点）．

定理 4. 命 A，B，C 是一族中的三圆，不在同一串中者，D 为一第四圆，则我们可由 A，B，C 用逐步作串法得出 D 来．

证．在 D 上可以找到一点 P，它既不是串 (A, B)，(A, C) 的极限点或共点，又不是 A 上的点． 已知过 P 可以作一圆 E 属于串 (A, B)，作一圆 F 属于串 (A, C)． 由于 A，B，C 不在同一串中，E，F 不相同．由定理 3 可知 D 属于 (E, F) 串．

由此推得

定理 5. 一族由其中非同串的三个圆唯一决定．

以上所谈到的双曲族及抛物族的性质，是经线性变换而不变的． 但椭圆族的定义并不是经过线性变换而不变．现在可以补足这个缺点．族可定义由不同串三圆连续作串所得出来的集合． 双曲族抛物族的定义照旧，而椭圆族的定义可以改为族之非双曲与抛物者．

附记．命

$$\alpha_i(x^2 + y^2) + 2\beta_i x + 2\gamma_i y + \delta_i = 0,\quad i = 1, 2, 3$$

代表三圆．由

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) = 0$$

所代表的诸圆称为圆族．试由此研究圆族及其分类等．

§ 10. Hermitian 方 阵

现在我们概括地提一下用 Hermitian 方阵来处理圆串的方法，也可以说给 Hermitian 方阵的研究提供一些最简明的几何背景．

1）一个圆

$$\alpha z\bar{z} + h\bar{z} + \bar{h}z + \delta = 0,\quad h = \beta + i\gamma \tag{1}$$

即

$$\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$$

对应于一个 Hermitian 方阵

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & h \\ \bar{h} & \delta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

但相差一个实数因子的 Hermitian 方阵代表同一圆（即如果有实数 $\lambda \neq 0$ 使 $H = \lambda H_1$，则 H，H_1 代表同一个圆）．

2）H 的行列式

$$\alpha\delta - |h|^2 = \det(H) > 0,\ = 0,\ < 0 \tag{3}$$

等价于它所代表的圆是虚圆、点圆或实圆．这个条件可以改写为：命

$$F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

则

$$\operatorname{tr}(FHF\bar{H})=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\bar{h} & \delta\\ -\alpha & -h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h & \delta\\ -\alpha & -\bar{h}\end{pmatrix}=2(|h|^2-\alpha\delta),$$

即得

$$\det H=-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(FHF\bar{H}).$$

所以依

$$\operatorname{tr}(FHF\bar{H})<0,\ =0\ \text{或}\ >0 \tag{4}$$

而决定H代表虚圆、点圆或实圆．

3）经过变换

$$z\to\frac{az+b}{cz+d},\quad P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \tag{5}$$

以H为方阵的圆变为以

$$\bar{P}'HP=\begin{pmatrix}|a|^2\alpha+\bar{a}ch+a\bar{c}\bar{h}+|c|^2\delta, & \bar{a}b\alpha+\bar{a}dh+b\bar{c}\bar{h}+d\bar{c}\delta\\ a\bar{b}\alpha+c\bar{b}h+a\bar{d}\bar{h}+\bar{d}c\delta, & b\bar{b}\alpha+\bar{b}dh+b\bar{d}\bar{h}+d\bar{d}\delta\end{pmatrix} \tag{6}$$

为方阵的圆．关系

$$H_1=\bar{P}'HP$$

就是我们所熟悉的"相抵关系"．取行列式 $\det H_1=|\det P|^2\det H$，故圆的虚实性不变．由 Hermitian 方阵的相抵理论可以知道，圆可变为以下三种之一：

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\text{虚}),\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(\text{点}),\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(\text{实}).$$

4）正交条件．不难证明，两个圆 H, H_1 相正交的条件是

$$\operatorname{tr}(FHF\bar{H}_1)=0. \tag{7}$$

这个关系是经过相抵性而不变的，也就是

$$\operatorname{tr}(F(\bar{P}'HP)F(P'\bar{H}_1\bar{P}))=\operatorname{tr}((\bar{P}F\bar{P}')H(PFP')\bar{H}_1)=|\det P|^2\operatorname{tr}(FHF\bar{H}_1).$$

$$\left(\text{由于}\ PFP'=\begin{pmatrix}s & t\\ u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & t\\ u & v\end{pmatrix}'=(\det P)F\right).$$

5）与一定圆 H_0 正交的诸圆称为一个圆族．也就是适合于

$$\operatorname{tr}(FHF\bar{H}_0)=0$$

的诸 Hermitian 方阵 H．这是一个线性关系，因此有两个参变数．由相抵的条件可知有三类不同的族，即以

$$H_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

分之，各为

$$\begin{pmatrix}\alpha & b\\ \bar{b} & -\alpha\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha & b\\ \bar{b} & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha & b\\ \bar{b} & \alpha\end{pmatrix}. \tag{8}$$

这族是椭圆的，抛物的，双曲的.

6）因此在一族中可以找出三个圆 H_1, H_2, H_3，使这族可以表成为

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3.$$

就（8）来说，椭圆族可以表为

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix},$$

而抛物族可以表为

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix},$$

而双曲族可以表为

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}.$$

（读者试指出 α, β, γ 适合何种关系，才是实圆.）

7）给两个定圆 H_1 与 H_2. 形如

$$\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$$

的圆成一圆串. 如果一个圆与 H_1 正交与 H_2 正交，则与圆串中的任一圆也正交. 由

$$\operatorname{tr}(FHF\overline{H}_1) = \operatorname{tr}(FHF\overline{H}_2) = 0$$

可知 H 的元素适合两个线性关系. 因此是有一个参变数的，即可知有二圆 $H^{(1)}$ 与 $H^{(2)}$ 使 H 可以表为

$$\mu_1 H^{(1)} + \mu_2 H^{(2)}.$$

这是一个圆串.

8）研究圆串中点圆的个数，即求

$$\operatorname{tr}(F(\lambda H_1 + \mu H_2)F(\lambda\overline{H}_1 + \mu\overline{H}_2)) = 0$$

的解. 这是一个二次方程式，共有三种情况：(i) 有二实解，(ii) 有一实解（即重根），(iii) 无实解. 不难证明他们各对应于双曲，抛物，椭圆串，并可以用相抵关系各变为

$$\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ \text{（二个点圆，双曲串），} \tag{i}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{（平行线，抛物串），} \tag{ii}$$

$$\lambda\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}\ \text{（过原点的直线，椭圆串）.} \tag{iii}$$

并且 (i) 与 (iii) 正交，(ii) 与 $\lambda\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$ 正交. 极易看出给了一个串（椭圆，抛物，双曲）则存在唯一的串（双曲，抛物，椭圆）与之正交.

9）圆族中经一点（它不是抛物族的公共点）的诸圆成一圆串这是显然的事实，由于"经一点"与正交一"点圆"等同.

对一圆族来说，也可以考虑

$$\operatorname{tr}(F(\lambda H_1 + \mu H_2 + \nu H_3)F(\lambda\overline{H}_1 + \mu\overline{H}_2 + \nu\overline{H}_3)),$$

它是一个二次型. 可以看出三种情况：(i) 有唯一点圆，(ii) 有无穷个点圆，(iii) 无点

圆，不难证明各相抵于以下诸例.

例 1. $H_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $H_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $H_3=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$, 二次型是 $-\mu^2-\nu^2$. 如果 $\mu^2+\nu^2=0$, 则 $\mu=\nu=0$, 即得一个点圆 H_1（抛物）.

例 2. $H_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $H_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $H_3=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$, 二次型是 $-\lambda^2+\mu^2+\nu^2$, $\lambda^2=\mu^2+\nu^2$, 有无数个解（双曲）.

例 3. $H_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $H_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $H_3=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$, 二次型是 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2$, $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=0$, 即得 $\lambda=\mu=\nu=0$, 故无点圆（椭圆）.

这三个例就是 6) 中的三例，因此结论已明.

10) 因此椭圆族中仅能有椭圆串（无点圆），抛物族中仅有椭圆串与抛物串（而且一定有），双曲族中有三类串.

读者不妨以此方法来推出上文的一切结果.

§11. 变 形 分 类

变形

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

的不变点（或称不动点）适合于二次方程

$$cz^2+(d-a)z-b=0. \tag{1}$$

如果 (1) 的系数都等于 0，则得 $w=z$，即恒等变形，任何一点都不变.

若 $c\neq 0$，则 (1) 有二根，

$$z_i=\frac{a-d\pm\sqrt{D}}{2c},\ D=(d-a)^2+4bc.$$

视 $D=0$ 或 $\neq 0$，我们有一个或两个不变点. 下面我们分别讨论 $c=0$ 和 $c\neq 0$ 的情况.

1) 若 $c=0$, $d-a=0$，则只有一个不变点 ∞. 仅有 ∞ 为不变点的变形是

$$w=z+k, \tag{2}$$

这就是平移.

若 $c=0$，而 $d-a\neq 0$，则我们可以看成为两个不变点，一个是 ∞，一个是 $\frac{b}{d-a}$.

而命

$$w_1=w-\frac{b}{d-a},\ z_1=z-\frac{b}{d-a},$$

得

$$w_1=\frac{a}{d}z_1.$$

2) 如果 $c\neq 0$, $D=0$，则 $g=z_1=z_2=\frac{a-d}{2c}$. (1) 变为

$$\frac{1}{w-g}=\frac{1}{z-g}+\frac{2c}{a+d}.$$

命 $w_1=\frac{1}{w-g}$, $z_1=\frac{1}{z-g}$，则仍然得出 (2) 来. 由此 (2) 是仅有一个不变点的变形的标准型.

如果 $c\neq 0$, $D\neq 0$，则命

$$w'=\frac{w-z_2}{w-z_1},\quad z'=\frac{z-z_2}{z-z_1}.$$

不变点变为 0 与 ∞. 因而也得

$$w'=\rho z'. \tag{3}$$

对应于 $z=\infty$，我们有 $w=\frac{a}{c}$ 及 $z'=1$. 故由上式

$$\rho=w'=\frac{a-cz_2}{a-cz_1},$$

即得

$$\rho=\frac{a+d+\sqrt{D}}{a+d-\sqrt{D}}. \tag{4}$$

以上所做的是把线性变换 $w=f(z)$ 的两个变数经过同一变换的结果. 即命 $w=g(w_1)$, $z=g(z_1)$. 它的几何意义是原来在 z 平面上有一变换 Γ，现在把 z 平面变为 z_1 平面，在 z_1 平面上变换 Γ 所变成的新变换. 代数形式是：如果原变换的方阵是 M，而变换 g 的方阵是 P，则我们新变换的方阵是

$$M_1=P^{-1}MP.$$

两方阵是相似的. 相似性是等价关系，因此可把线性变换分类.

定义. 如果线性变换只有一个不动点，则称为抛物型的变换. 假设线性变换有两个不动点，如果由 (4) 定义的 ρ 是实的，则称为双曲型的，如果 ρ 的绝对值等于 1，则称为椭圆的，如果 ρ 是一般复数，则称为等纬型的. ρ 称为乘数.

ρ 的几何意义是什么？它等于下列四点的交比. 这四点是二个不动点，原来的 z，与其映象 w. 更明确些

$$\rho=(z_1,z_2,z,w).$$

特别是 $z_1=\infty$, $z_2=0$, $w=\rho z$，得 $(\infty,0,z,\rho z)=\rho$.

ρ 的代数意义是什么？它是M的两个特征根的比值.

注意，$\frac{1}{\rho}=(z_2,z_1,z,w)$，而且 $\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{z}\right)$. 由此可知，如果 $\lambda\neq\rho$ 及 $\frac{1}{\rho}$，则 λ 所对应的线性变换一定不相似于 ρ 所对应的线性变换. 因此二线性变换相似的必要且充分条件是它们的系数相等或互为倒数.

另一方面抛物型变换 $w=z+k$，可以变为 $\left(\frac{w}{k}\right)=\left(\frac{z}{k}\right)+1$. 因此任何一个抛物型变换都可以变为 $w=z+1$，即任意两个抛物型变换都是相似的.

经椭圆，抛物，双曲变形而不变的圆成一双曲串，抛物串与椭圆串. 要证明这点并不困难，这只要从 $w=z+1$ 使所有的平行于实轴的直线不变，$w=e^{i\theta}z$ 使以原点为中心的圆不变，$w=kz$ 使通过原点的直线不变，而且无其他的不变圆即可看出.

§12. 广义线性群

定义. 在线性群中再添上一变换

$$w=\bar{z}, \tag{1}$$

这样所演出的群称为广义线性群.

因此,广义线性群中除线性变换外,还有形如

$$w=(a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d) \tag{2}$$

的变换. 不难证明,除此之外便没有了. 圆是由实交比定义的,因此广义线性变换还是把圆变为圆.

如果

$$w_1=(a_1\bar{w}+b_1)/(c_1\bar{w}+d_1),$$

则得

$$\begin{aligned} w_1&=(a_1(\bar{a}z+\bar{b})+b_1(\bar{c}z+\bar{d}))/(c_1(\bar{a}z+\bar{b})+d_1(\bar{c}z+\bar{d}))\\ &=((\bar{a}_1\bar{a}+b_1\bar{c})z+a_1\bar{b}+b_1\bar{d})/((c_1\bar{a}+d_1\bar{c})z+c_1\bar{b}+d_1\bar{d}). \end{aligned}$$

其方阵等于

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix}}.$$

即两个形如 (2) 的变换之积是一个线性变换.

习题. 任何一个 (2) 添到线性变换群中都与 (1) 有同样的作用.

现在考虑 (2) 的不变点. (2) 的不变点适合于

$$cz\bar{z}+dz-a\bar{z}-b=0. \tag{3}$$

由 (3) 推得

$$\bar{c}z\bar{z}+\bar{d}z-\bar{a}z-\bar{b}=0.$$

因而得出两个圆

$$\begin{cases}(c+\bar{c})z\bar{z}+(d-\bar{a})z+(\bar{d}-a)\bar{z}-b-\bar{b}=0,\\ (c-\bar{c})z\bar{z}+(d+\bar{a})z+(\bar{d}+a)z-b+\bar{b}=0.\end{cases} \tag{4}$$

因此,一般说来,它使这两圆的交点不变并且把由这两圆定义的圆串变为自己. 特别情况是 $c=\bar{c}$, $b=\bar{b}$. $d=-\bar{d}$ 即 (4) 并不是两圆,而只定义一个. 则此变形变为

$$w=\frac{-h\bar{z}-\delta}{\alpha\bar{z}+\bar{h}}, \qquad \alpha,\ \delta \text{ 实数}. \tag{5}$$

这变换有不变圆

$$\alpha w\bar{w}+\bar{h}w+h\bar{w}+\delta=0. \tag{6}$$

连用两次 (5), 得

$$u=\frac{-h\bar{w}-\delta}{\alpha\bar{w}+h}=\frac{-h(-\bar{h}z-\delta)-\delta(\alpha z+h)}{\alpha(-\bar{h}z-\delta)+\bar{h}(\alpha z+h)}=z.$$

即全等变换.

这样的变换定义为反演,圆(6)称为这一反演的基圆,连行两次反演即得全等变换.它的几何意义如下: 先看最简单的反演 $w=\bar{z}$, 它以 x 轴为镜子, 把上半平面的点变为下

半平面以 x 轴为对称轴的点. 因此,反演也称为对称,依基圆对称.

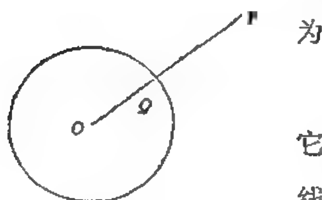


图 10

(6) 可以是实圆或虚圆. 把任一实圆变为 $z\bar{z}=1$, 反演简化为

$$w=\frac{1}{\bar{z}}. \tag{7}$$

它的几何意义是: 任一点 $P(z=\rho e^{i\theta})$ 变为 $Q\left(\frac{1}{\rho}e^{i\theta}\right)$, 即由直线 OP 上取一点 Q, 使 $OP\cdot OQ=1$ (图 10). 读者不难看出以任一圆为基圆的反演.

由虚圆得出的反演是

$$w=-\frac{1}{\bar{z}}. \tag{8}$$

定理 1. 任何一个线性变换一定可以依四个实圆作反演得出.

证. 只要考虑

$$w=z+1,\ w=\rho e^{i\theta}z$$

即是.

1) 抛物型. $w=z+1$ 是 $w=-\bar{w}_1$, $w_1=-\bar{z}-1$ 之积. 前者是对 y 轴的反演, 后者是 $\left(w_1+\frac{1}{2}\right)=-\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)$, 是对 $x=-\frac{1}{2}$ 的反演. "$x=0$" 与 "$x=-\frac{1}{2}$" 是两个相切的圆. 因此任何一个抛物变换可以表为对两个相切圆的反演之积(属于一个抛物串的二圆).

2) 双曲型. $w=\rho z$ 是 $w=\frac{1}{\bar{w}_1}$, $w_1=\frac{1}{\rho\bar{z}}$ 之积. 它们是依圆 $z\bar{z}=1$, $z\bar{z}=\frac{1}{\rho}$ 的两个反演,它们是同心圆. 因此,双曲变换是依不相交的圆反演出来的(双曲串的二圆).

3) 椭圆型. $w=e^{i\theta}z$, $w=e^{\frac{1}{2}i\theta}\bar{w}_1$, $w_1=e^{-\frac{1}{2}i\theta}\bar{z}$, 它们是以二过原点的直线的反演. 因而,椭圆变换是依两个相交圆反演出来的(椭圆串中的二圆).

4) 等纬型. 即 $w=\rho e^{i\theta}z$. 把等纬型写为 $w=\rho w_1$, $w_1=e^{i\theta}z$ 之积, 因而得出定理.

上定理的证明包括了更多的内容,不难推出以下的定理.

定理 2. 椭圆,抛物,双曲变换可由两个反演得之.

定理 3. 从一个椭圆(或抛物或双曲)串中任二圆作反演得出的线性变换是椭圆的(或抛物的或双曲的),所有的这些变换成一群(这群是一个参数的群).

证. 先以抛物串

$$y=k,\qquad k\text{实数}$$

为例. $w=\bar{z}+2k_1i$, $w=\bar{z}+2k_2i$ 分别是以 $y=k_1$, $y=k_2$ 的两个反演. 其积是

$$w=z+2(k_1-k_2)i.$$

即得出所有形如 $w=z+ki$ 的变形. 这些变形成一分群, 这分群与"实数的加法群"相同.

再讨论椭圆串 $y=x\operatorname{tg}\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

$$w=e^{2i\theta}\bar{z}$$

是以 $y=x\operatorname{tg}\theta$ 为基圆的对称. $w=e^{2i\theta}\bar{z}$, $w=e^{2i\theta_1}\bar{z}$ 之积的形式是 $w=e^{it}z$. 这些变

换成一分群，这分群与“绝对值=1 诸数的乘法群”相同.

最后讨论双曲串 $z\bar{z}=\rho^2$. 变形 $w=\dfrac{\rho^2}{\bar{z}}$, $w=\dfrac{\rho_1^2}{\bar{z}}$ 之积为 $w=\dfrac{\rho^2}{\rho_1^2}z$. 即得形如 $w=kz(k>0)$ 的变换，这群与“正实数的乘法群”相同.

§ 13. 射影几何的基本定理

定理 1. 任何一个连续变换如果把一维射影(复)空间一一对应地变为其自己，并且使调和点列变为调和点列，一定是一个广义线性变换.

证. 假定

$$w=f(z)$$

是这样的一个变换. 由于线性变换可以把任意三点变为任意三点，因此我们不妨假定

$$0=f(0),\ 1=f(1),\ \infty=f(\infty).$$

由

$$(\infty,z_2,z_3,z_4)=-1$$

可知 $z_2=\dfrac{1}{2}(z_3+z_4)$. 因此，如果 $w_3=f(z_3)$, $w_4=f(z_4)$, 则

$$\frac{1}{2}(w_3+w_4)=f\left(\frac{1}{2}(z_3+z_4)\right).$$

即对任二复数 a, b 常有

$$f(a)+f(b)=2f\left(\frac{1}{2}(a+b)\right).$$

由 $b=0$ 得, $f(a)=2f\left(\dfrac{1}{2}a\right)$. 因此由上式推得

$$f(a)+f(b)=f(a+b).$$

特别对任一自然数 n, $f(n)=nf(1)=n$. 又由 $f(-n)+f(n)=f(0)=0$, 可知 $f(-n)=-f(n)$. 又由 $pf\left(\dfrac{n}{p}\right)=f(n)=n$, 可知 $f\left(\dfrac{n}{p}\right)=\dfrac{n}{p}$. 即对任一有理数 r, 常有 $f(r)=r$. 由连续性可知对任一实数 x, $f(x)=x$.

命 $f(i)=j$. 由于 $(1,-1,i,-i)=\left(\dfrac{i-1}{1+i}\right)^2=-1$, 可知 $(1,-1,j,-j)=-1$. 即得

$$\frac{j-1}{-1-j}\Big/\frac{-j-1}{-1+j}=-1,$$

即 $j^2=-1$. 故 $f(i)=i$, 或 $f(i)=-i$.

如果 $f(i)=i$, 则同法可证：对任一有理数 r, $f(ri)=ri$; 对任一实数 y, $f(yi)=yi$. 因此

$$f(x+yi)=f(x)+f(yi)=x+yi.$$

即

$$f(z)=z.$$

如果 $f(i)=-i$, 则对任一实数 y, $f(iy)=-iy$, 因而

$$f(z)=\bar{z}.$$

即得所证.

第二章　非欧几何学

§1. 欧几里得几何学(抛物几何学)

考虑一个抛物圆族，不妨假定它是由过∞的诸圆所成的族，即所有的直线所成的族。我们现在考虑依此族中诸圆(即直线)所得出的反演所演出的群。

考虑反演

$$w = e^{i\theta}\bar{z} + ie^{\frac{1}{2}i\theta}\lambda, \qquad \lambda \text{ 实数} \tag{1}$$

(不难直接证明它是反演)，这反演的不变圆是

$$\frac{1}{i}\left(ze^{-\frac{1}{2}i\theta} - \bar{z}e^{\frac{1}{2}i\theta}\right) = \lambda,$$

即

$$y\cos\frac{1}{2}\theta - x\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{\lambda}{2}.$$

这是一般的直线，即当 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$\lambda$ 实数，则 (1) 代表了对这些抛物圆族的所有可能的反演. 两个反演之积

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{i\psi}\bar{w} + ie^{\frac{1}{2}i\psi}\tau = e^{i\psi}(e^{-i\theta}z - ie^{-\frac{1}{2}i\theta}\lambda) + ie^{\frac{1}{2}i\psi}\tau \\ &= e^{i(\psi-\theta)}z + ie^{\frac{1}{2}i\psi}\tau - ie^{i(\psi-\frac{1}{2}\theta)}\lambda, \end{aligned} \tag{2}$$

它的形式是

$$w = e^{i\theta}z + q, \qquad q \text{ 复数}. \tag{3}$$

反之，前已证明形如 (3) 的变形可以表为二反演之积. 因此，由抛物圆族出发得一个群，其中的变换或是(3)，或是 $w = \bar{z}$，或是二者之积. 我们看看 (3) 的几何意义. $w = e^{i\theta}z$ 是旋转，$w = z + q$ 是平移，因此 (3) 所表示的就是刚体运动，而 $w = \bar{z}$ 是反演，这样所得出的群称为欧几里得群.

在平面上，在此群下的几何学就是普通的欧几里得几何学.

所以欧几里得几何学可以看成为由抛物族所引出来的几何学.

欧氏几何学有以下的一些重要性质:

(i) 这空间是可递的，即任一点可以变为另一点.

(ii) 两点间的距离是唯一不变量.即如果 A,B 间与 C,D 间的距离相等，则有一变形把 A,B 变为 C,D.

(iii) 直线变为直线(即抛物族中的圆仍然变为此族的圆).

(iv) 两直线的夹角是唯一不变量.

(v) 过二点可以作一(唯一的)直线.

(vi) 过一点可以作一(唯一的)直线与一给定的直线平行.

附记. 再看变形 (3). 如果 $\theta \neq 0$，则

$$w - a = e^{i\theta}(z - a), \quad a = q/(1 - e^{i\theta})$$

是一个以 a 为不变点的椭圆变形，也就是绕 a 旋转的变形．如果 $\theta=0$，则得平移——抛物变形．因此，在欧几里得几何中没有双曲变形．

§2. 球面几何学(椭圆几何学)

考虑一个椭圆圆族，不妨假定它就是交单位圆于直径两端的圆所组成的．交单位圆于 $\pm e^{i\theta}$ 的圆的方程式是

$$\alpha(z\bar{z}-1)-i\lambda e^{i\theta}\bar{z}+i\lambda e^{-i\theta}z=0. \tag{1}$$

这儿 α,λ,θ 是实参变数．(1) 代表整个的椭圆族，对应于圆 (1) 我们有反演

$$w=(i\lambda e^{i\theta}\bar{z}+\alpha)/(\alpha\bar{z}+i\lambda e^{-i\theta}), \tag{2}$$

行列式等于 $-\alpha^2-\lambda^2$．分子分母同除以 $i\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}$，命

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}=\sin\tau,\quad \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}=\cos\tau,$$

则得变形

$$w=(\bar{z}e^{i\theta}\cos\tau-i\sin\tau)/(-i\bar{z}\sin\tau+e^{-i\theta}\cos\tau). \tag{3}$$

这个变形的行列式等于 1．假定还有一反演

$$z=e^{2i\phi}\bar{z}_1, \tag{4}$$

则其乘积等于

$$w=(z_1e^{i(\theta-\phi)}\cos\tau-ie^{i\phi}\sin\tau)/(-iz_1e^{-i\phi}\sin\tau+e^{-i(\theta-\phi)}\cos\tau). \tag{5}$$

这变形的方阵是

$$M=\begin{pmatrix} e^{i(\theta-\phi)}\cos\tau & -ie^{i\phi}\sin\tau \\ -ie^{-i\phi}\sin\tau & e^{-i(\theta-\phi)}\cos\tau \end{pmatrix}. \tag{6}$$

这是一个行列式等于 1 的酉方阵(即 $M\bar{M}'=I$)，简称为特殊酉方阵．反之，任一行列式等于 1 的酉方阵一定可以表为以上的形式．它的证明如下：如果

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$|a|^2+|b|^2=1,\ a\bar{c}+b\bar{d}=0,\ |c|^2+|d|^2=1,\ ad-bc=1,$$

适合第一个式子的一般解是 $a=e^{i(\theta-\phi)}\cos\tau$，$b=-ie^{i\phi}\sin\tau$．由第二式 $c=-\bar{d}t$，$d=\bar{a}t$，由 $ad-bc=(|a|^2+|b|^2)t=1$，得到 $t=1$，所以

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},\quad |a|^2+|b|^2=1. \tag{7}$$

因而得出表达式 (6)．

定理 1. 由一个椭圆族的圆经反演而得出的群是特殊酉群（但需注意 $\pm M$ 仅表一个变换）．

附记．(7) 式表示酉方阵与四元数的关系．命 $m=a+bj$ 表一四元数．由 $|a|^2+|b|^2=1$，可知 $|m|=1$．如果 $m_1=a_1+b_1j$，则 $mm_1=aa_1-b\bar{b}_1+(ab_1+b\bar{a}_1)j$．这也表示乘积 MM_1．因此特殊酉群可以表为单位四元数的乘法群．

再看反演 (2) 在 Neumann 球上的意义．对应于圆 (1)，我们有平面

$$\alpha\zeta+\lambda\xi\sin\theta-\lambda\eta\cos\theta=0. \tag{8}$$

这是一个过球心的平面，在球面上表一大圆.

定理 2. 反演 (2) 在 Neumann 球上表示一个依平面 (8) 而对称的变换.

证. 如果我们能够证明 $\theta = 0$ 时的情况，便由平面旋转可以推出一般的情况. 这时平面 (8) 变为

$$\zeta \sin \tau - \eta \cos \tau = 0. \tag{9}$$

变形 (3) 变为

$$w = (\bar{z} \cos \tau - i \sin \tau)/(-i\bar{z} \sin \tau + \cos \tau). \tag{10}$$

由此得

$$1 + |w|^2 = \frac{1 + |z|^2}{|iz \sin \tau + \cos \tau|^2}.$$

命 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则

$$\begin{aligned} w &= \frac{(\bar{z} \cos \tau - i \sin \tau)(iz \sin \tau + \cos \tau)}{|-i\bar{z} \sin \tau + \cos \tau|^2} \\ &= \frac{i(z\bar{z} - 1) \sin \tau \cos \tau + \bar{z} \cos^2 \tau + z \sin^2 \tau}{|-i\bar{z} \sin \tau + \cos \tau|^2}. \end{aligned}$$

由此可知

$$u = \frac{x}{|iz \sin \tau + \cos \tau|^2}, \quad v = \frac{(z\bar{z} - 1) \sin \tau \cos \tau - y(\cos^2 \tau - \sin^2 \tau)}{|iz \sin \tau + \cos \tau|^2}.$$

因此

$$\frac{2u}{1 + |w|^2} = \frac{2x}{1 + |z|^2}, \quad \frac{2v}{1 + |w|^2} = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \sin 2\tau - \frac{2y}{1 + |z|^2} \cos 2\tau,$$

$$\begin{aligned} \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} &= \frac{1}{1 + |z|^2}(1 + |z|^2 - 2|iz \sin \tau + \cos \tau|^2) \\ &= \frac{1}{1 + |z|^2}(1 + |z|^2 - 2|z|^2 \sin^2 \tau - 2 \cos^2 \tau + 4y \sin \tau \cos \tau) \\ &= \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) \cos 2\tau + \frac{2y}{1 + |z|^2} \sin 2\tau. \end{aligned}$$

在球上，假定 ξ, η, ζ 对应于 z，ξ', η', ζ' 对应于 w，则得

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi, \\ \eta' &= -\eta \cos 2\tau + \zeta \sin 2\tau, \\ \zeta' &= \eta \sin 2\tau + \zeta \cos 2\tau. \end{aligned}$$

(ξ_1, η_1, ζ_1) 与其映象 (ξ_2, η_2, ζ_2) 的中点 $\left(\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2), \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)\right)$ 一定在 (9) 上. 此点可以直接验算出来，即

$$\begin{aligned} &\sin \tau(\zeta_1 + \eta_1 \sin 2\tau + \zeta_1 \cos 2\tau) - (\eta_1 - \eta_1 \cos 2\tau + \zeta \sin 2\tau) \cos \tau \\ &= \zeta_1(\sin \tau + \sin \tau \cos 2\tau - \cos \tau \sin 2\tau) \\ &\quad + \eta_1(-\cos \tau + \sin \tau \sin 2\tau + \cos \tau \cos 2\tau) = 0. \end{aligned}$$

即 (ξ_1, η_1, ζ_1) 与 (ξ_2, η_2, ζ_2) 依平面 (9) 而对称.

定理 3. 连续两个反演的结果在 Neumann 球上表示一个旋转，其旋转轴的两端对应于两个反演的基圆的交点.

证. 椭圆族中二圆定有二交点. 这二点是经此二反演的不变点. 由于某圆是大圆，二不变点在球面上一定是直径的两端. 这二反演变为依通过此直径两平面求对称而得的变换. 在任一垂直于直径的平面上看，图形是：有两条相交直线，对之各反演一次，其结果是一旋转，假定二直线 l_1, l_2 的交角为 τ. 原来位置是 m_1 上的一点 P_1，m_1 与 l_1 的夹角是 θ，对 l_1 反演后得 m_2 上的一点 P_2. m_2 与 l_2 的夹角等于 $\tau-\theta$. 对 l_2 反演得 m_3，m_3 与 m_1 的夹角是 2τ.

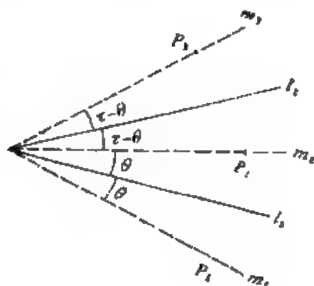


图 11

不难证明，任何一个旋转也可以用此法得之. 因此，椭圆几何也就是在旋转群下的球面几何学.

附记 1. 注意：$M\bar{M}'=I$ 也可以申述为变换使虚圆 $z\bar{z}+1=0$ 变为其自己.

附记 2. 椭圆几何中的变形都是椭圆的. 原因是其变换的不变圆成一圆串，而且是双曲的.

§3. 椭圆几何的一些性质

不难证明椭圆几何有以下一些性质：

(i) 这空间是可递的.

(ii) 两点间有以下的唯一不变量. 对应于这两点在 Neumann 球上有两点，通过这两点与球心各做一矢量(但注意 θ 与 $2\pi-\theta$ 可能是同一的)，这矢量的夹角是不变量.

(iii) 椭圆族中的圆仍然变为此族之圆，此圆称为测地线(或迳称直线).

(iv) 两测地线的夹角是唯一不变量.

(v) 过两点(除去对应于 Neumann 球的直径两端的情况)，有唯一的测地线.

(vi) 过一点不能作一测地线与一给定的测地线不相交.

§4. 双曲几何 (Лобачевский 几何)

考虑一个双曲圆族，不失去普遍性我们假定这族是由正交于单位圆诸圆所成的. 由正交条件得 $\alpha-\delta=0$，所以圆的形式是

$$\alpha z\bar{z}+h\bar{z}+\bar{h}z+\alpha=0,\quad |h|^2-\alpha^2>0. \tag{1}$$

所对应的反演是

$$w=(-h\bar{z}-\alpha)/(\alpha\bar{z}+\bar{h}). \tag{2}$$

由

$$\begin{aligned}1-w\bar{w}&=[(\alpha\bar{z}+\bar{h})(\alpha z+h)-(-h\bar{z}-\alpha)(-\bar{h}z-\alpha)]|\alpha\bar{z}+\bar{h}|^{-2}\\&=(1-z\bar{z})|\alpha\bar{z}+\bar{h}|^{-2}(|h|^2-\alpha^2),\end{aligned}$$

可见反演(2)把单位圆内 ($|z|<1$) 变为单位圆内 ($|w|<1$)，圆周变为圆周，圆外变为圆外.

显然 $|h|>\alpha$. 命 $a=-\dfrac{\alpha}{h}$ (圆内一点)及 $-h/\bar{h}=e^{i\theta}$，则 (2) 变为

$$w = e^{i\theta}(\bar{z} - a)/(-\bar{a}\bar{z} + 1). \tag{3}$$

再进行一次变换，$z \to \bar{z}$，则得线性变形

$$w = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}. \tag{4}$$

这一变形把单位圆变为单位圆，把圆内一点 $z = a$ 变为 $w = 0$。不难证明，任意两个反演之积也是一个使单位圆不变的线性变换.

反过来，我们证明，凡使单位圆不变的线性变换一定是(4)的形式. 假定 $w = (az + b)/(cz + d)$ 是这样的一个变换，把圆

$$|az + b|^2 - |cz + d|^2 = 0$$

变为单位圆，这圆

$$(|a|^2 - |c|^2)z\bar{z} + (a\bar{b} - c\bar{d})z + (\bar{a}b - \bar{c}d)\bar{z} + |b|^2 - |d|^2 = 0$$

是单位圆的充分且必要的条件是 $a\bar{b} - c\bar{d} = 0$ 及 $|a|^2 - |c|^2 = -(|b|^2 - |d|^2) \neq 0$。由前式可知 $a = \bar{d}t$，$c = \bar{b}t$，代入后式得 $(1 - |t|^2)(|b|^2 - |d|^2) = 0$，即 $|t| = 1$。代入原来的变形中得

$$w = (\bar{d}tz + b)/(\bar{b}tz + d) = \frac{\bar{d}t}{d}\left(z + \frac{b}{\bar{d}t}\right)\Big/\left(\frac{\bar{b}t}{d}z + 1\right).$$

由于 $\left|\frac{\bar{d}}{d}t\right| = 1$，及 $\overline{\left(\frac{b}{\bar{d}t}\right)} = \frac{\bar{b}}{d\bar{t}} = \frac{\bar{b}t}{d}$，这就是形式(4)的变换.

以单位圆内部作为空间，形如(4)的变换所成的群作为变换群，这样所得出的几何学称为 Лобачевский 几何学，或双曲几何学.

刚才是以单位圆的内部作为空间出发的，如果我们以上半平面作为空间出发，则得性质相同而表达方式不同的几何学. 群变为

$$w = (az + b)/(cz + d), \quad ad - bc = 1, \tag{5}$$

而且 a, b, c, d 是实数. 要证明此点只要证明把上半平面变为上半平面的线性变换一定是而且也就是(5)即足. 把 $z = 0, 1, \infty$ 代入(5)式，要求 w 是实数，因而可以得出 a, b, c, d 是实数，而且 $ad - bc \neq 0$。再由

$$\frac{ai + b}{ci + d} = \frac{ac + bd + i(ad - bc)}{c^2 + d^2},$$

可知如果 $ad - bc > 0$，则把 i 变为上半面的点，不然，把 i 变为下半平面的点. 因此 $ad - bc = \rho^2$，分子分母各以 ρ 除之即得所求.

今后我们按照方便有时考虑单位圆内部，有时考虑上半平面，但所得的结果极易由其一而推出另一.

上半面的表达形式称为双曲几何的 Poincaré 表达形式.

§5. 距　离

单位圆内(或上半面上)的点作为几何对象，有变换

$$w = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1, \ 0 \leqslant \theta < 2\pi. \tag{1}$$

(1) 也称为一个非欧运动. 作为我们的运动群 Γ 中的一个变换，首先，圆内任一点 a

可以由运动群 Γ 中的一个变换变为 0. 因此,双曲空间是在 (1) 下可递的. 不仅如此,一点带一方向所成的集合也是可递的. 方法是先把一点换为 0, 然后经过旋转把任意方向变为与 x 轴的正向同向.

再看"测地线"(或迳称直线), 即正交单位圆的圆, 通过两点有一条而且仅有一条"测地线". 证明此点极易. 我们可以看上半平面. 作这两点的垂直平分线交 x 轴于 C, 以 C 为心过这两点的圆,就是唯一的过这两点的合乎要求的圆.

测地线成一个可递的集合. 还是用上半平面来证明, 任一测地线对应于 x 轴上两点(交点), 对任意二实数, 有一实变换 $w=(az+b)/(cz+d)$, $ad-bc=1$ 把它们变为任意二点. 故得所证.

两条测地线如果相交则其夹角是不变量.

现在主要需要研究的是两点间的不变量的问题. 假定 z_1, z_2 是两点, 命 $\bar{z}_1^{-1}, \bar{z}_2^{-1}$ 是其对单位圆的对称点. 作交比

$$g(z_1, z_2)=(z_1, \bar{z}_1^{-1}, z_2, \bar{z}_2^{-1})=\frac{z_2-z_1}{\bar{z}_1^{-1}-z_2}\bigg/\frac{\bar{z}_2^{-1}-z_1}{\bar{z}_1^{-1}-\bar{z}_2^{-1}}=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|^2, \tag{2}$$

这是 z_1, z_2 两点的不变量. 换言之,如果 z_1, z_2 变为 w_1, w_2, 则

$$g(z_1, z_2)=(z_1, \bar{z}_1^{-1}, z_2, \bar{z}_2^{-1},)=(w_1, \bar{w}_1^{-1}, w_2, \bar{w}_2^{-1})=g(w_1w_2).$$

反之,如果 $g(z_1, z_2)=K$, K 是正数, 则有变换把 z_2 变为 0, 把 z_1 变为 z, 而 $g(z, 0)=|z|^2=K$. 经过旋转可以使 0 不变,而把 z 变为 $K^{\frac{1}{2}}$. 因而得出: $g(z_1, z_2)$ 也是两点的唯一不变量. 如以上半平面为基础,则得出不变量

$$h(z_1, z_2)=\left|\frac{z_1-z_2}{\bar{z}_1-z_2}\right|^2.$$

直接用 $g(z_1, z_2)$ 作为距离, 并不能得出距离的若干重要性质. 我们用以下的方法来推出距离函数. 取 $z_1=z+dz$, $z_2=z$, 则得出

$$\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}. \tag{3}$$

这是微分不变量,即它经过 (1) 而不变. 直接的证法是微分 (1) 得

$$dw=e^{i\theta}\left(\frac{1}{1-\bar{a}z}+\frac{\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2}\right)dz=e^{i\theta}\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}dz,$$

即

$$|dw|^2=\frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\bar{a}z|^4}|dz|^2,$$

又

$$1-|w|^2=1-\frac{|z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2},$$

因此,得

$$\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}=\frac{|dw|^2}{(1-|w|^2)^2}.$$

在双曲几何中长度元素等于

$$ds=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1-x^2-y^2},$$

而面积元素等于

$$d\sigma=\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

如果对上半平面来讲,长度元素与面积元素各为

$$ds=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y},\quad d\sigma=\frac{dxdy}{y^2}.$$

定理 1. 在双曲空间中取二点 z_1, z_2, C 为连接此二点之任意曲线(假定它是连续的而且有连续切线),则使

$$\int_C ds$$

取最小值的 C 就是测地线.

证. 取上半平面为基础. 作一中心在 x 轴上,而且经过 z_1, z_2 的圆,命其中心为 $(t, 0)$, 则圆之方程可以写成为

$$x=t+\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

且设 $\theta=\theta_1$ 及 θ_2 时, $z=z_1, z_2$. 曲线 C 的方程可以写成为

$$x=t+\rho(\theta)\cos\theta,\quad y=\rho(\theta)\sin\theta,$$

$$\rho(\theta_1)=\rho(\theta_2)=\rho,\quad 0<\theta_1<\theta_2<\pi,$$

则

$$\int_C\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sqrt{(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)^2+(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta)^2}}{\rho(\theta)\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\left(\frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}\right)^2}\frac{d\theta}{\sin\theta}\geqslant\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\log\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_1}.$$

当且仅当 $\rho'(\theta)=0$ 时取等号,即当 $\rho(\theta)=\rho$ 是一常数时取等号,即当 C 是过 z_1, z_2 正交于 x 轴的圆时取等号.

这证明不但证明了定理,而且证明了沿测地线该积分的值等于

$$\log\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_1}.$$

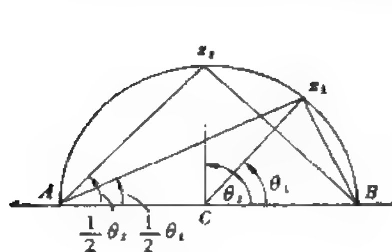


图 12

这一数值的几何意义是: 过 z_1, z_2 的测地线交 x 轴于 A, B; C 为圆的中心,因此

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_1=\frac{Bz_1}{z_1A},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_2=\frac{Bz_2}{z_2A}.$$

因此

$$\log\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta_1}=\log|(B, A, z_2, z_1)|.$$

不难算出

$$|(B,A,z_2,z_1)|^2=\frac{1+|z_1-z_2|/|\bar{z}_1-z_2|}{1-|z_1-z_2|/|\bar{z}_1-z_2|}=\frac{1+h^{1/2}(z_1,z_2)}{1-h^{1/2}(z_1,z_2)}.$$

因此，我们可以定义

$$D(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\log\frac{|\bar{z}_1-z_2|+|z_1-z_2|}{|\bar{z}_1-z_2|-|z_1-z_2|},\quad I(z_1)>0,\ I(z_2)>0$$

是两点 z_1, z_2 间的非欧距离。

在单位圆的情况是

$$D(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\log\frac{|1-\bar{z}_1z_2|+|z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1z_2|-|z_2-z_1|},\quad |z_1|<1,\ |z_2|<1.$$

由定义显然可见，如果

$$D(z_1,z_2)=0,$$

则

$$\frac{|1-\bar{z}_1z_2|+|z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1z_2|-|z_2-z_1|}=1.$$

即 $|z_2-z_1|=0$，即 $z_1=z_2$。因此，距离函数有下列性质：

(i) $D(z_1,z_2)=0$ 的必要且充分条件是 $z_1=z_2$。

(ii) $D(z_1,z_2)\geqslant 0$。 由于 $|1-\bar{z}_1z_2|+|z_2-z_1|\geqslant|1-\bar{z}_1z_2|-|z_2-z_1|$，故得所证。

(iii) $D(z_1,z_2)=D(z_2,z_1)$。

(iv) $D(z_1,z_3)\leqslant D(z_1,z_2)+D(z_2,z_3)$。 当且仅当 z_1, z_2, z_3 在一测地线上取等号。

由极小性质可得以上的结论。 性质 (iv) 可讲述为：非欧三角形两边之和大于另一边。

§6. 三 角 形

所讲三角形是指三条测地线所围成的三角形（图 13）。不难推出"两边夹一角全等定理"，"两角一联边全等定理"，"三边全等定理"，"大角对大边定理"等等。我们现在来求三角形的面积。

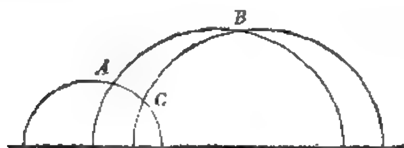


图 13

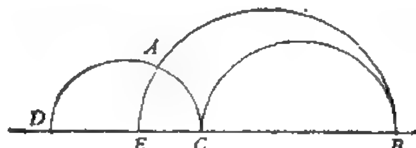


图 14

定理 1. 三角形 A, B, C 的非欧面积等于 $\pi-\angle A-\angle B-\angle C$。

证. 以上半平面为基础，面积等于

$$\iint\frac{dxdy}{y^2}.$$

1) 先研究 $\angle B=\angle C=0$ 的情况（如图 14）。不难证明有实变换把 B, C, D 各变

为 ∞，1，−1（或变为 ∞，−1，1），而且所对应的行列式是正的．实质上，

$$z' = \pm\frac{(D-2B+C)z+(BC-2DC+DB)}{(C-D)z+(D-C)B}$$

就是这样的变换．而且行列式等于 $\pm 2(D-C)(C-B)(B-D)$ 经此变换后，图 14 变为图 15．假定 A 的坐标是 (x_0, y_0)，则

$$\int_{x_0}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{dxdy}{y^2}=\int_{x_0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x\Big|_{x_0}^{1}=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x_0=\pi-\angle A.$$

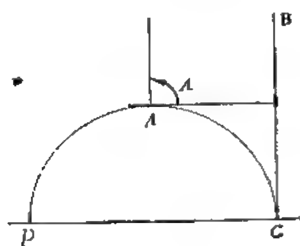


图 15

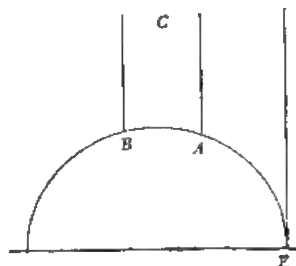


图 16

2）假定 $\angle C=0$．用实变换把 C 变为 ∞，得图 16．由 1）可知

$$\triangle ABC=\triangle BEC-\triangle AEC=\pi-\angle B-(\pi-(\pi-\angle A))=\pi-\angle A-\angle B.$$

3）如果 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 无一为 0，如图 17．由 2）可知

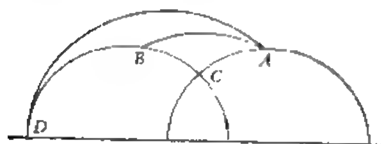


图 17

$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\triangle ADC-\triangle ABD\\&=(\pi-\angle C-\angle A-\angle BAD)\\&\quad-[\pi-(\pi-\angle B)-\angle BAD]\\&=\pi-\angle A-\angle B-\angle C.\end{aligned}$$

定理证毕．

由此定理立刻推出

定理 2. 三角形三内角之和不大于二直角，其值可取 0 与 π 之间的任何一值．

§7. 平 行 公 理

总结一下这三种几何的一个基本不同点．

欧几里得几何学(抛物)．平面上的点是我们的几何对象(不包括无穷远点)．运动群由 $z\to e^{i\theta}z+k$ 及 $z\to\bar z$ 所组成．测地线就是直线．在平面上过一点只能作一(唯一)测地线与一给定的测地线不相交(欧几里得第十一公设)．

Riemann 几何学(椭圆)．球面上的点是我们的几何对象．运动群：球的旋转，及对过球心平面的对称．测地线就是大圆．在球面上过一点不能作一测地线与一给定的测地线不相交．

Лобачевский 几何学(双曲)．单位圆内的点是我们的几何对象．运动群是

$$z\to e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar a z}$$

及 $z\to\bar z$．测地线就是正交于单位圆的圆(在单位圆内的部分)．过一点有无穷个测地线

与一给定的测地线不相交。

当球与圆的半径充分大的时候，如果我们的测量仪器根本分辨不出圆弧的曲率的时候，我们就无法分辨我们所在的空间是那一类几何学．在历史上"陆地如棋局"的看法，就是把地球面的椭圆几何误认为抛物几何的看法． 把空间看为无穷无尽的欧几里得空间，而日月星辰处于其中的看法，也忽视了测地线有曲率这一事实．

§ 8. 非欧运动分类

我们现在来研究非欧运动

$$W = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \tag{1}$$

的分类．在椭圆几何中我们已经看到其中的变换只可能是椭圆的． 在抛物几何中，可能有抛物的也可能有椭圆的． 在双曲几何中，问题更复杂这里可能是双曲的，抛物的及椭圆的三种变换．

1) 圆内有一个不变点．如果(1)把 0 变为 0，则得 $W = e^{i\theta}z$．这是一个椭圆变换．因此

$$\frac{w-a}{1-\bar{a}w} = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \tag{2}$$

是一个使 a 不变的非欧运动而且没有其他不动点(在圆内)．因此，在圆内有一个不动点的非欧运动是椭圆的，而且形式就是(2)．这样的变形称为非欧旋转．如果圆外有一个不变点 b，则 $a = \frac{1}{\bar{b}}$ 是一个圆内的不变的，因而仍然是椭圆的．因此今后我们仅需讨论不变点在圆周上的情况．

2) 圆周上有二不变点．现在取上半平面，即二不变点在 x 轴上．如果它们是 $0, \infty$，则得 $W = kz$，$k > 0$．它是一个双曲变形．如果 α, β 是任意二不变点，则

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = k\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

是使 α, β 不变的双曲变形．总之，如果二不动点在圆上，则得双曲变形．

3) 仅有一个不变点． 还是以上半平面为例． 当此点在 ∞，则 $W = z + \lambda$ (λ 实数)．而一般的是

$$\frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda.$$

这是抛物变形．

第三章　解析函数、调和函数的定义及例子

§1. 复 变 函 数

复变函数是一个复变数 z 的函数，函数值也是复数 $w=f(z)$. 变数的范围是复平面上的一个点集 M. 对 M 的每一点 z，对应一个复数 w，这样的函数 $f(z)$ 称为单值的. M 称为 $f(z)$ 的变数范围. 当 z 取 M 的一切值而得出的所有的 w 值的集合 N，称为函数值的范围.

命 $z=x+iy$，$w=u+iv$. 实际上所谓复变函数 $w=f(z)$，就是两个实变数 x，y 的两个实函数

$$u=u(x, y),\quad v=v(x, y).$$

分别把 z 与 w 各安置在一个复数平面上，则一个复变函数可以看成为 (x, y) 平面上的集合 M 到 (u, v) 平面上的集合 N 的某一映照. 如果 $w=f(z)$ 是单值的，而且对应于不同的 $z\in M$，有不同的 $w\in N$，则这样的映照称为在 M 内是一一的，或单叶的. 在这样的情况下，我们可以定义 $z=\varphi(w)$. 它把 N 上每个 w 映到 M 上的 z 点，这 z 正是在 $f(z)$ 下映到 w 的点. 它称为 $w=f(z)$ 的反函数.

如果 $w=f(z)$ 把 M 映到 N 上，而 $w'=g(w)$ 又把集合 N 映到 P 上，则

$$w'=h(z)=g[f(z)]$$

把 M 映到 P 上，这叫做函数 f, g 的复合函数. 特别当 $w=f(z)$ 是一一的，而 $z=\varphi(w)$ 是 f 的反函数，则有

$$\varphi(f(z))=z.$$

例 1. 第一、二章所说的线性变换

$$w=(az+b)/(cz+d),\quad ad-bc\neq 0$$

都是这样的变形（M, N 是整个 Gauss 平面）.

例 2. $w=z^n$ 把单位圆的内部变为单位圆的内部，但并不是一一的. 因为对任一整数 l，$r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{2\pi il}{n}+\frac{i\theta}{n}}$ 都对应于一点 $re^{i\theta}$.

§2. 保角变换(或称共形映照)

一个复变函数 $w=f(z)$ 可以看成为一个复平面上的变换(或映照):

$$u=u(x, y),\quad v=v(x, y),\tag{1}$$

它把区域 M 变为区域 N. 假定函数 u, v 对 x, y 在 M 内是可微分的，则微分矢量间的关系是

$$\left.\begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\\ dv&=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\end{aligned}\right\}.\tag{2}$$

另一微分矢量 (d_1u, d_1v) 对应于 (d_1x, d_1y)．矢量 (du, dv) 与 (d_1u, d_1v) 的夹角的余弦等于

$$\frac{dud_1u + dvd_1v}{\sqrt{(du^2 + dv^2)(d_1u^2 + d_1v^2)}}$$
$$= \frac{Edxd_1x + F(dxd_1y + d_1xdy) + Gdyd_1y}{\sqrt{(Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2)(Fd_1x^2 + 2Fd_1xd_1y + Gd_1y^2)}}. \tag{3}$$

这儿

$$E = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \quad F = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad G = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

如果在某区域内这夹角等于矢量 (dx, dy)，(d_1x, d_1y) 的夹角，特别分别取 $dx = d_1y = 0$ 和 $dx = d_1x$，$dy = -d_1y$，则得条件

$$F = 0, \quad E = G. \tag{4}$$

由 $F = 0$ 得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\varphi\frac{\partial u}{\partial y}.$$

代入 $E = G$，则

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \varphi^2\left(\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

即得 $\varphi^2 = 1$．因此，$\varphi = \pm 1$．若还要求角度的方向保持不变，则需 $\varphi = 1$，即得著名的 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

由于两条曲线的交角决定于其交点处的两个切线方向，因此，如果映照 (1) 使任何两条曲线的交角不变，则它一定适合于 (5)．反之，如果在某区域内 (1) 适合于 (5)，则一定使两曲线的交角(在此区域内的)不变．

因此适合此条件的变换称为**保角变换**(或称保角映象)．但必须排除一种可能性，即那些使 $E = F = G = 0$ 的点．此时，公式 (3) 的右边变为 $\frac{0}{0}$，因此并不能得出保角的性质．

例如：$u = x^2 - y^2$，$v = 2xy$．在原点并非保角变换，虽然其他诸点都保角．

如果变换 (1) 适合于 (5)，则得

$$du^2 + dv^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right](dx^2 + dy^2). \tag{6}$$

这说明了：一个保角变换把一点附近的一个无穷小圆周变为一个无穷小圆周(圆性质)．因此，也有人称为共形映照．当然也必须注意使

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

的一些点，对这样的点，结论并不正确．

前二章所谈到的线性变换都是保角变换,而且是在大范围内具有圆性质的。

从 Cauchy-Riemann 条件可以推出(假定在某区域D内,u,v有二阶连续偏微商)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0.$$

同样可以得出

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

算子 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为 Laplace 算子. 方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

称为 Laplace 方程. 任何一个在区域D内所定义的保角映象(1),其u与v都是 Laplace 方程的解.

在区域D中适合于 Laplace 方程的函数称为D内的调和函数,或称位函数. 而v称为u的共轭函数,显然可见$-u$亦是v的共轭函数.

现在考虑由一个调和函数$u(x, y)$求出它的共轭函数的问题.

假定D是一单连通域,而$u(x, y)$是D上的调和函数,则定义

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right), \tag{7}$$

这儿(x_0, y_0)是D内的一定点,(x, y)是D内的一变点. Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

就是积分(7)为确切微分的积分的条件. 即(7)是(x, y)的函数,与由(x_0, y_0)到(x, y)的积分线路无关.

再看

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h, y)-v(x, y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{(x, y)}^{(x+h, y)}\left[-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}-\frac{\partial u}{\partial y}dx=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

同样可得 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$. 即$v(x, y)$是$u(x, y)$的共轭函数. 但因为$v(x, y)$是由它的偏微商来决定的,因此可以相差一个常数. 也就是$u(x, y)$的共轭函数一般是

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+C.$$

这儿C是一实数.

再看D为多连通域的情况. 此时积分

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+C$$

不一定是一个单值函数. 常会因为所取的路径不同而得不同的数值. 如果两条路线L,$\tilde{L}$可以在D的范围内由其一连续变形变为另一时,沿它们的积分还是相等的. 但,当不可能的时候,则不一定相等. 例如

$$u = \log(x^2 + y^2).$$

它在环形 $\rho_0^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_0^2$ 内是一调和函数. 环形是连通的，但不是单连通的. 其共轭函数

$$v(x, y) = 2\int_{z_0}^{z} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} + C = 2\operatorname{Arg} z + C_2$$

在环形内是一个无限多值的函数. 我们有

$$\Gamma_1 = \int_{x^2+y^2=\rho^2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

图 18

在环形中任何一条曲线如果绕 $z = 0$正向一周，则可以不出环形之外连续地变为圆 $x^2 + y^2 = \rho^2$. 任何一条由 z_0 到 z 的线 C 可以连续变化变为另一条由 z_0 到 z 的路线. $\widetilde{C}$ 是由以下诸部分构成的: (i) 一条无交点的曲线 $\widetilde{C}_0$, (ii) 绕 $|z| = \rho N$ 圈(正向的N是正，负向的N是负). 这样

$$v(x, y) = 2\arg z + 2\pi N.$$



图 19

再回到一般的问题. 假定D内有m个"岛屿" $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$, 命

$$\Gamma_h = \int_{\bar{\gamma}_h} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right).$$

$\bar{\gamma}_h$ 是只含有 γ_h 的在D内的闭曲线. 任何一条联接 z_0z 的曲线 C 可以改变为一条曲线 $\widetilde{C}$. 它是由以下诸部分所构成的: (i) 一条由 z_0 到 z 的简单曲线 $\widetilde{C}_0$(指无交点的曲线), (ii) 绕 γ_h 的简单闭曲线，可能绕行 N_h 次(正向正 N_h, 负向负 N_h). 而积分

$$v(x, y) = \int_{\substack{z_0\\ C}}^{z} = \int_{\substack{z_0\\ \widetilde{C}_0}}^{z} + N_1\Gamma_1 + \cdots + N_m\Gamma_m.$$

这儿 $N_1, \cdots, N_m$ 是整数. 常数 Γ_h 叫做对应于 γ_h 的周期. 现在 $v(x, y)$ 是多值函数. 虽然如此，它的微商还是单值的，而且仍然适合 Cauchy-Riemann 方程.

§3. Cauchy-Riemann 方程

上节所得出的 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

也称为 Euler-D'Alembert 方程. 假定D是一域, $u(x, y)$, $v(x, y)$ 在D内是有一阶偏微商的函数. 假定方程 (1) 在D内成立.

把 (1) 换为极坐标

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

因此

$$-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\rho},$$

$$\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial v}{\partial\rho}.$$

即得出

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \rho\frac{\partial v}{\partial\rho}=-\frac{\partial u}{\partial\theta}. \tag{2}$$

Laplace 方程也变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0, \tag{3}$$

即

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

使用(2)与(3)时,特别注意 $\rho=0$ 时的特殊性.

调和函数是线性的,即如果 u, v 是调和函数,则对任何常数 α,β, $\alpha u+\beta v$, 也是调和函数.

例 1. 把 z^n 分为虚实部分

$$u=\rho^n\cos n\theta,\quad v=\rho^n\sin n\theta.$$

它们适合(2)式,即

$$\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}=n\rho^n\cos n\theta=\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \rho\frac{\partial v}{\partial\rho}=n\rho^n\sin n\theta=-\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

即它们是共轭调和函数. 如果作为变换来看,必须注意当 $\rho=0$ 时的非保角性.

例 2. 由线性性质把一个多项式分虚实部分,它们也成一共轭调和函数对.

例 3. 假定一级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad a_n=\alpha_n+\beta_n i$$

在 $|z|<R$ 内收敛,则它的实虚部分

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)\rho^n,$$

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\sin n\theta+\beta_n\cos n\theta)\rho^n$$

也成为一对共轭调和函数.

特别如

$$e^z=e^{\rho\cos\theta}\cdot e^{i\rho\sin\theta},$$

$$e^{\rho\cos\theta}\cos(\rho\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n\cos n\theta}{n!},$$

$$e^{\rho\cos\theta}\sin(\rho\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n\sin n\theta}{n!}$$

是一对共轭调和函数。

又如

$$\log z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z.$$

$u = \log|z|$ 是调和函数，因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

虽然 $v = \mathrm{Arg}\,z$ 是多值函数，但是它是 u 的共轭调和函数。

例 4. 函数(对正整数 n)

$$u = \rho^{-n}\cos n\theta, \quad v = -\rho^{-n}\sin n\theta$$

也是一对共轭函数(但 $\rho = 0$ 必须除外)。

例 5. 在环 $r < |z| < R$ 内，如果

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \alpha_n + \beta_n i$$

收敛，则它的实虚部分

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta)\rho^n,$$

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n \sin n\theta + \beta_n \cos n\theta)\rho^n$$

成一对共轭调和函数。

假定

$$x = x(x_1, y_1), \quad y = y(x_1, y_1)$$

是一对共轭函数，则 u, v 作为 x_1, y_1 的函数也是共轭的。

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_1} = -\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

即共轭的关系经过保角变换而不变，也可以说成为保角变换之积仍然是保角变换。再看 Laplace 方程经保角变换而变化的情况：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial y_1^2},$$

相加得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

因此调和函数 $u(x, y)$ 经保角变换后依然是调和函数。

以上所论都必须注意变数所处的区域.

条件 (1) 与 (2) 是以下形式的条件的特殊形式.

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n},\quad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}.$$

即在保角换象 $u+iv$ 所定义的区域内如果有一曲线 C，则在这曲线上 u 的切向微分等于 v 的法向微分，u 的法向微分等于负的 v 的切向微分. 要证明这点是容易的. 因为

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{dx}{ds}\right)=-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds}=-\frac{\partial v}{\partial s},$$

而

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{dx}{ds}\right)=+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{ds}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}=\frac{\partial u}{\partial s}.$$

注意. 切线方向取定后，法线方向是指依此方向正向转 $90°$ 的方向. 如果取 C 为平行于 x 轴的直线 $y=k$，则得 (1) 式. 如果取 C 为圆 $x^2+y^2=R^2$，$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial \rho}$，$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}$，即得 (2).

§4. 解 析 函 数

在区域 D 内考虑由适合于 Cauchy-Riemann 方程的二函数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 所定义的复函数

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y).$$

这函数有一特点，不管 h 循哪个方向趋于 0 时，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

是唯一的，不依趋向不同而变化.

命 $h=s+it$，则

$$u(x+s, y+t)-u(x, y)=\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+o(|h|),$$

$$v(x+s, y+t)-v(x, y)=\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t+o(|h|).$$

因此得

$$\begin{aligned}f(z+h)-f(z)&=\frac{\partial u}{\partial x}s+\frac{\partial u}{\partial y}t+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}s+\frac{\partial v}{\partial y}t\right)+o(|h|)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(s+it)+o(|h|).\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这是一个与 h 无关的函数.

定义. 如果在 D 内某点 z，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z)$$

唯一存在,则在此点 $f(z)$ 称为可导的. 如果在 z 的一个邻域中 $f(z)$ 均可导,则称 $f(z)$ 在 z 为解析的.

注意. 确切的说,极限存在是指给了 $\varepsilon>0$,我们可以找到 $\delta(>0)$,使 $|h|<\delta$ 时,常有

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\varepsilon.$$

我们说 $f(z)$ 在区域 D 内解析,是指如果在 D 内每点 $f(z)$ 都是解析的. D 内两个解析函数的和,差,积仍然是解析函数,如果除函数在 D 内不等于 0,则商函数也是解析的.

也易见:如果 $g(z)$ 是 z 的解析函数(在 D 域的),而 $f(w)$ 在 $g(z)$ 的取值区域内是 w 的解析函数,其函数值在 Δ 域内,则 $f(g(z))$ 也是解析函数. 当 u, v 在 z_0 处可微,适合 Cauchy-Riemann 方程,则 $u+iv$ 在 z_0 解析;反过来,如果一函数在 z 处解析,则其虚实部分一定适合 Cauchy-Riemann 条件,而且是一对共轭的调和函数. 证明极易,只须对实数 s, t,有

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(z+s)-f(z)}{s}=\lim_{t\to 0}\frac{f(z+it)-f(z)}{it},$$

因而推出

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

证毕.

因此,如果 $f(z)$ 是一解析函数,则

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial f(z)}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f(z)}{\partial y}.$$

因此

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(z).$$

引进符号

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

及

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1}$$

则

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial f(z)}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}f(z)=\frac{1}{2}(f'(z)-f'(z))=0.$$

即如果 $f(z)$ 是解析函数,则

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar z}=0, \tag{2}$$

并且反过来也对.

这个结果可以看成为：命 $\zeta = x + iy$，$\eta = x - iy$，因此，$f(z)$ 是 ζ 与 η 的函数，而解析函数者乃与 η 无关的一函数也。

习题. 试证 Laplace 方程可以写成为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

例 1. 由于 z 是解析函数，所以 z^n 是解析函数，因而 z 的多项式 $p(z)$ 是解析函数。在一区域 D 中，如果多项式 $q(z) \neq 0$，则 $\frac{p(z)}{q(z)}$ 也是解析函数。

例 2. 如果在 $z = z_0$，$f(z)$ 有一幂级数表示

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

它在圆 $|z - z_0| < R$ 内收敛，则它在此圆内是解析函数。

因此，在整个平面上

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$\sin z$，$\cos z$ 都是解析函数。

又由于

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1,$$

所以在单位圆内 $\log(1 + z)$ 是一解析函数。

例 3. 如果

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 在\ R_1 < |z - z_0| < R_2$$

中收敛，则 $f(z)$ 在此区域中也是一个解析函数。

定义. 如果函数 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 0 点附近解析，则 $f(z)$ 定义为在 ∞ 解析。

例如. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ 在全平面除去 0 点包括 ∞ 点，处处解析。

例如. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$，在单位圆外解析。

§5. 幂 函 数

命 n 是一自然数，则

$$w = z^n \tag{1}$$

是全平面上解析的函数。

表为极坐标的形式

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\theta},$$

则

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi. \tag{2}$$

对应于一个 z 有一个 w，但对应于一个 w 却有 n 个 z，其值为

$$\rho^{\frac{1}{n}}, \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

因此 (1) 并不表示 z 平面与 w 平面的一一映照. 但如果考虑 z 平面上的扇形 (k 是固定的整数)

$$k\frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n},$$

则 (1) 把这个扇形变到去掉正向半轴的 w 平面. 扇形中一切从原点出发的射线，变为从 $w=0$ 出发的射线. 以 $z=0$ 为圆心的弧变为以 $w=0$ 为圆心的弧.

对应于直线 $u=u_0$, $v=v_0$ 的曲线是

$$u_0 = r^n \cos n\varphi, \quad v_0 = r^n \sin n\varphi.$$

如图 20, 第一方程所代表的曲线用虚线表示，第二方程所表的曲线用实线表示.

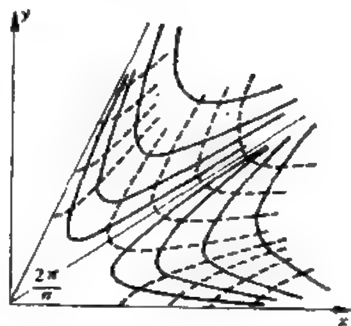


图 20

幂函数的反函数

$$w = z^{\frac{1}{n}}$$

是一个 n 值的函数. 在 z 平面上，从 $z=z_0$ 出发引一不过 0 的连续曲线 C 达到 z_1, 在 w 平面上先取一个固定的 w_0 (是 n 个数值之一), 当 z 沿 C 变时，w 连续变化画出连接 w_0 和 w_1 的曲线 D. 这 w_1 是唯一决定的. 很明显，由于 w_0 的选择有 n 个，因而在 w 平面上可以画出 n 条曲线 $D_1, \cdots, D_n$. 而 $D_1, \cdots, D_n$ 是由其中之一绕原点旋转 $\frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, \cdots, (n-1)\frac{2\pi}{n}$ 角而得出来的.

如果 D 是一不包有 $z=0$ 的区域，则 $z^{\frac{1}{n}}$ 可以分出 n 个连续单值函数来. 每个函数取 $z^{\frac{1}{n}}$ 的 n 个值中的一个值. 这 n 个函数称为多值函数 $z^{\frac{1}{n}}$ 的分支. 每点上它们的值彼此相差一个因子 $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. 对每个分支来说，映照是一对一的，并且

$$(z^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

即 $z^{\frac{1}{n}}$ 的每一个分支是解析函数.

如果 C 是一条包有原点的曲线，当 z_0 绕原点一圈时，则 w_0 变为

$$w_0 e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

因此包有 0 的区域的 n 个分支不能分开，经过绕一圈后，可以从一分支过渡到另一分支.

§ 6. Жуковский 函数

函数

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{1}$$

是单值的．当 $z=0$ 时，$w=\infty$．微商

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right) \tag{2}$$

在 $z=\pm 1$ 时变为0，因此可以预料在这两点，变形将有特殊性质．

命 $z=\rho e^{i\theta}$，$w=u+iv$，则

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta,\quad v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta.$$

消去 θ，则得

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}=1. \tag{3}$$

对固定的 ρ，它在 w 平面上表一椭圆．即对应于两个圆 $|z|=\rho$，$|z|=\frac{1}{\rho}$，在 w 平面上有一个椭圆 (3)．当 $\rho\to 1$ 时，椭圆的长轴之半趋于1，而短轴趋于0；当 $\rho\to 0$ 时（或 $\rho\to\infty$ 时），两轴都趋向∞．因此可见单位圆的内部与外部都对应于整个 w 平面，除去沿实轴从 -1 到1的一段线．而单位圆 $|z|=1$ 本身就对应于这一线段，但经过两次．

解得

$$z_1, z_2=w\pm\sqrt{w^2-1}$$

是二值的函数．如果绕 $w=1$ 一周，就会把函数值 $w+\sqrt{w^2-1}$ 变为 $w-\sqrt{w^2-1}$．为了解决这个问题，我们引进一个概念——Riemann 面．把两个 w-平面都从 -1 到 $+1$ 割开迭在一起，平面 I 表示 $z=w+\sqrt{w^2-1}$，平面 II 表示 $z=w-\sqrt{w^2-1}$．把平面 I 的上口与平面 II 的下口粘上，也把平面 I 的下口与平面 II 的上口粘上（注意：这是理想的，实际是粘不起来的）．这样的理想的面称为 Riemann 面．它是表达多值函数的一个好工具．在这样的面上，函数

$$z=w+\sqrt{w^2-1}$$

就变为单值的了．当绕 $|w|=1$ 一周时，w 的数值转到平面 II，再转一周时，又上来回到原处．

§7. 对 数 函 数

命

$$w=\log z.$$

当 z 在角域 $\alpha<\arg z<\beta$ 中变化时，则在 w 平面上得一无穷带形 $\alpha<v<\beta$．

命 $z=\rho e^{i\theta}$，则

$$w=\log\rho+i\theta.$$

故

$$u=\log\rho,\quad v=\theta.$$

当 ρ 从0变为∞时，$\log\rho$ 从 $-\infty$ 变为∞．故得所云．

一般讲来

$$w = \log\rho + i(\theta + 2k\pi),\quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots.$$

所以我们不仅有一个带形，而应当有无穷个带形.

另一方面，长条 $\alpha < v < \beta$ 对应于 z 平面上的一个角. 如果 $\beta - \alpha > 2\pi$，则平面上被覆盖了不止一次. 怎样来处理这样的多值函数呢？我们也是做一 Riemann 面. 这次 Riemann 面是由无穷片平面迭合起来的，都从 0 到 $-\infty$ 沿实轴切开. 把一平面的上切口与另平面的下切口粘上，于是 w 平面上的一个宽度为 2π 的带形对应于一叶 Riemann 面. 这样 Riemann 面上的一点只对应于 w 平面上的一点了.

习题. $w = \mathrm{tg}^2 \frac{1}{2} z$ 把 z 平面上 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 之间的带形变为单位圆的内部，但除去由 $w = -1$ 到 $w = 0$ 的一段实轴.

§8. 三 角 函 数

在复数范围内三角函数的研究可以完全依靠于指数函数的研究. 因为有 Euler 公式

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),\quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),\tag{1}$$

所以映象 $w = \sin z$ 看成为以下四个映象

$$iz = z_1,\quad e^{z_1} = z_2,\quad z_3 = -iz_2\left(= \frac{e^{iz}}{i}\right)\tag{2}$$

及

$$w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right)(= \sin z)\tag{3}$$

的乘积. 首先我们来求使它成为单叶映照的条件. 命 D 为 z 平面上的域，经 (2) 而变为 D_1, D_2, D_3. 在 (2) 的三个映照中，第一第三都是单叶，第二映照是单叶的必需且充分条件是 D_1 中不包有适合于

$$z_1' - z_1'' = 2k\pi i,\quad k \text{ 整数 } (\neq 0)\tag{4}$$

的 z_1', z_1''. 由 §6 已知要映照 (3) 是单叶的必要且充分条件是 D_3 中不包有适合于

$$z_3' z_3'' = 1\tag{5}$$

的 z_3', z_3''. 换为 z 平面，得 $w = \sin z$ 在区域 D 内是单叶的必要且充分条件是 D 内不包有适合于

$$z' - z'' = 2k\pi,\quad k \text{ 整数 } (\neq 0)$$

而且 $e^{i(z'+z'')} = -1$，即

$$z' + z'' = (2l + 1)\pi,\quad l \text{ 整数}$$

的 z', z''.

例如. 半带形 $-\pi < x < \pi$, $y > 0$ 就适合此条件. 其逐步变化情况如附图. 此带变为 w 平面带有两条切口，沿 u 轴从 -1 到 $+1$，沿 v 轴下部从 0 到 ∞；而 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$ 变为上半平面.

正弦函数的反函数是

$$w = \arcsin z = \frac{\pi}{2} - i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})\left(= \frac{\pi}{2} - \arccos z\right).$$

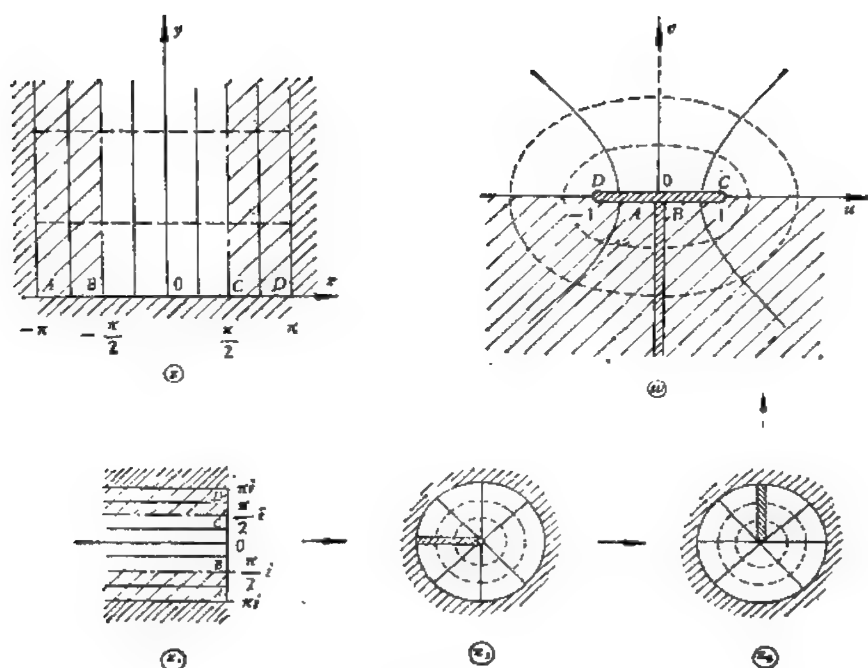


图 21

也可用 Riemann 面表示如下：把刚才所说过的映照一个一个地反转来，(3) 将说明是一个双页的 Riemann 面(见 § 6)．而 (2) 中第二映照是一个无穷页的 Riemann 面(见 § 7)．因而，它是无穷个面迭在一起，分别列号．划一切口沿实轴由 -1 到 1，把奇号平面与偶号平面如 § 6 法联上，再把平面沿 y 轴下部由 0 到 ∞ 的切口，把偶号片一片一片地如 § 7 法粘上，把奇号片也如此地粘上．

沿 $z=1$ 一周是从奇(或偶)号平面转入偶(或奇)号平面，函数值则由

$$\frac{\pi}{2}-i\ln(z\pm\sqrt{z^2-1})$$

变为 $\frac{\pi}{2}-i\ln(z\mp\sqrt{z^2-1})$．如果绕一含有 $z=1$，$z=-1$ 的大圆一周，则相当于由 $2n-1$ 号平面转入 $2n+1$ 号平面，或由 $2n$ 号平面入 $2n+2$ 号平面．

同样可以讨论余弦函数．

关于正切余切

$$\operatorname{arc\,tg} z=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg} z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

也是多值函数．

关于双曲函数及其反函数有

$$w=\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad z=\operatorname{sh}^{-1}w=\ln(w+\sqrt{w^2+1});$$

$$w=\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad z=\operatorname{ch}^{-1}w=\ln(w+\sqrt{w^2-1});$$

$$w = \operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad z = \operatorname{th}^{-1} w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+w}{1-w};$$

$$w = \operatorname{cth} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}, \quad z = \operatorname{cth}^{-1} w = \frac{1}{2} \ln \frac{w+1}{w-1};$$

它们都是多值函数. ln 可能是对数的任何分支. 如果取出单值分支, 则每一分支都是解析函数.

§ 9. 一般的幂函数

函数 z^a 可以定义为

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

命 $z = \rho e^{i\varphi}$, $a = \alpha + i\beta$, 则

$$z^a = e^{\alpha \ln \rho - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i(\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln \rho)}.$$

当 $\beta \neq 0$ 时, z^a 有无限多个值, 它们在半径为 ρ_k 的圆周 $|w| = \rho_k$ 上. 这里

$$\rho_k = |z^a| = e^{\alpha \ln \rho - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

ρ_k 是一等比贯, 其公比为 $e^{-2\pi\beta}$. 而 z^a 的幅角等于

$$\theta_k = \alpha\varphi + \beta \ln \rho + 2k\pi\alpha,$$

是一个公差为 $2\pi\alpha$ 的等差贯.

当 $\beta = 0$ 时, 即 a 是实数, 则 z^a 的值在圆周

$$|w| = e^{a \ln \rho} = \rho^a$$

上. 如果 $\alpha = \frac{p}{q}$ 是一既约分数, 则对于每个 z, z^a 正好可以取 q 个不同值, 也就是

$$z^{\frac{p}{q}} = (z^p)^{\frac{1}{q}}.$$

θ_k 可以看为 $\frac{2\pi k}{q}$.

如果 a 是无理数, z^a 有无限多个数值. 不仅如此, 我们可以证明 $e^{2k\pi ai}$ 成一点集, 都在单位圆上, 而且是一处处稠密的集合. 要证明此点只须证明以下的定理, 即

如果 a 非有理数, 则给任一 $\varepsilon > 0$, 我们有二整数 h 与 q 使

$$|ah - q| < \varepsilon.$$

这定理在第一卷中已经证明过了(第一卷第一分册 § 13, 定理 4).

§ 10. 保角变换的基本定理

有了一个解析函数 $f(z)$, 我们就可由之而得出一个保角变换来. 任何一个区域 D, 只要 $f(z)$ 在 D 内是单叶的, 我们就可以把 D 用 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 保角地映照到一个区域 D^* 上去. 保角变换理论的基本问题是:

给了两个区域 D 与 D^*, 存在不存在一个保角变换把其一变为另一? 如果存在, 求出把 D 变为 D^* 的函数 $f(z)$ 来.

显然并不是任何 D 都可以变为任何 D^* 的. 例如, D 是多连通而 D^* 是单连通. 要证

明此点，只要考虑D内一条闭曲线——包括有D的外点或边界点的闭曲线C. 如果有一保角变换把D变为D^*，则它把C变为C^*. 在D^*内C^*能连续地缩成一点 $w_0(\in D^*)$，由于变换是连续的，因此C也将始终保持在D内而连续缩成为D内的某一点. 这显然是不可能的，因为C的内部有不属于D的点.

关于单连通域有以下的基本定理.

定理 1 (Riemann). 任何一个单连通域D，其边界多于一点，z_0是其一内点. 并且在此点有一方向矢量. 我们有保角变换把D一一的变为单位圆的内部，把z_0变为0点. 方向矢量变为实轴的正方向. 而且这样的变换仅有一个.

这定理的证明分为两部分 (i) 存在性，(ii) 唯一性. 关于唯一性，它实质上与以下的问题等价. 一个保角变换把单位圆变为其自己，而且把原点变为原点，把正轴方向变为正轴方向，则是一全等变换 $w = z$. 其理由是很显然的. 因为如果 $w = f(z)$ 与 $w = f_1(z)$ 都是适合定理 1 的保角变换，则 $w_1 = f(f_1^{-1}(w))$ 把单位圆变为单位圆，原点变为原点，正轴方向变为正轴方向. 因此，把原问题就化为刚才所提出的问题了.

不难看出定理 1 实际上与以下的较一般的定理是等价的.

定理 2. 任意两个单连通域D与D^*(它们的边界都是由多于一点的集合所构成的)，其中各取一任意点z_0, w_0, 给与一实数α_0, 一定有一个保角变换(单叶)

$$w = f(z)$$

把D变为D^*，使

$$w_0 = f(z_0), \quad \alpha_0 = \arg f'(z_0),$$

而且这样的保角变换只有一个.

如果特别取D^*为单位圆，$z_0 = 0$，$\alpha_0 = 0$，则得定理1. 反之，如果定理1已经证明，令 $w = f(z)$，$w = f^*(z)$ 是把D, D^*变为单圆的变换，则 $w = f^{*-1}(f(z))$ 把D变为D^*，因此不难推出定理 2 来.

定理 1 我们暂不证明，但是它是非常重要的. 因为它把一般的单连通域的问题，一变而为单位圆的问题了. 这是下一章中我们先把注意力集中到研究单位圆的道理. 这告诉我们如果单位圆研究清楚了，更一般的定理也就在望了.

再重复一句，整个的复平面(椭圆空间)是没有边界点的单连通域. 欧氏平面(抛物空间)是有一个边界点的单连通域. 而单位圆(双曲空间)是一个边界点多于一个的单连通域. 因此三种空间上的复变数函数论的研究有它的基本重要性.

第四章 调 和 函 数

§1. 中 值 定 理

定理 1. 如果 $u(z)$ 是一个在闭圆 $|z|\leqslant\rho$ 上连续的,在圆内是调和的函数,则

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta. \tag{1}$$

证. 由于闭圆 $|z|\leqslant\rho$ 是单连通域,因此 $u(z)$ 有一个单值的共轭函数 $v(z)$. 若 $\rho_1<\rho$, 由

$$\rho_1\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho_1e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho_1\frac{\partial}{\partial\rho_1}ud\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}v(z)d\theta=\frac{1}{2\pi}v(\rho_1e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi}=0.$$

即 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho_1e^{i\theta})d\theta$ 是一常数,命 $\rho_1\to0$ 及 $\rho_1\to\rho$ 即得所求.

定理 1 有以下的重要直接推论

定理 2. 如果 $f(z)$ 在一个闭圆 $|z|\leqslant\rho$ 上是连续的,在圆内是解析的,则

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})d\theta.$$

(由于 $f(z)=u(z)+iv(z)$, 而 $u(z)$, $v(z)$ 都是调和函数,因此 $f(z)$ 也是调和函数(复值). 读者也可分别考虑 $u(z)$, $v(z)$, 然后总加得之.)

定理 2 中,用 $z=\rho e^{i\theta}$, $dz=i\rho e^{i\theta}d\theta=izd\theta$ 可以推得

定理 3. 仍如定理 2 的假定,

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z}dz.$$

又 $zf(z)$ 也是解析的,因此得

定理 4. 仍如定理 2 的假定,

$$\int_{|z|=\rho}f(z)dz=0.$$

我们现在把以原点为中心的圆换为任意的圆,则得

定理 5(中值定理). 如果 $u(z)$ 是一个在以 z_0 为中心, 以 ρ 为半径的闭圆上连续,并且在圆内是调和的函数,则圆心的函数值等于圆周上的函数值的平均值;也就是

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

定理 6. 如果 $f(z)$ 是一个在以 z_0 为中心, 以 ρ 为半径的闭圆上连续, 并在圆内解析的函数,则

$$\int_C f(z)dz=0.$$

这儿 C 表示圆周上的积分.

§2. Poisson 公式

变形

$$w = e^{i\psi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \tag{1}$$

把单位圆变为单位圆,把 $z=a$ 变为 $w=0$, 而且

$$dw = e^{i\psi}\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}dz. \tag{2}$$

命 $w=e^{i\theta}$, $z=e^{i\tau}$, 则

$$d\theta = \frac{1-a\bar{a}}{|1-\bar{a}z|^2}d\tau. \tag{3}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-a\bar{a}}{|1-\bar{a}z|^2}u_1(z)d\tau.$$

这里 $u_1(z) = u\left(e^{i\psi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)$, 于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}u_1(z)d\tau = u_1(a).$$

命 $a=re^{i\theta}$ 及 $z=e^{i\psi}$, 则得

定理 1. 如果 $u(z)$ 是一个在圆 $|z|\leqslant 1$ 上连续, 并在圆内调和的函数, 则当 $0<r<1$ 时有

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}u(e^{i\psi})d\psi. \tag{4}$$

也就是对单位圆内任一 z, 我们有

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-i\psi}|^2}u(e^{i\psi})d\psi. \tag{5}$$

对一般圆来说,如果把单位圆改为以 R 为半径的圆 $|z|\leqslant R$, 则得 Poisson 公式

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\psi)+r^2}u(Re^{i\psi})d\psi. \tag{6}$$

函数

$$P(re^{i\theta}) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\psi)+r^2} \tag{7}$$

称为圆 $|z|\leqslant R$ 的 Poisson 核. 还是回到单位圆, Poisson 核有以下的一些性质:

(i) 圆内非负性. Poisson 核有绝对值形式的表达式

$$P(re^{i\theta}) = \frac{1-|z|^2}{|w-z|^2},\quad w=e^{i\psi},\quad z=re^{i\theta}. \tag{8}$$

当 $|z|<1$ 时这是正的.

(ii) 周上奇异性. 在圆上(即 $r=1$ 时), 当 $\psi\neq\theta$ 时 $P(re^{i\theta})=0$.

当 $\psi=\theta$ 时, 我们一般有

$$P(re^{i\theta}) = \frac{1+r}{1-r}.$$

当 $r \to 1$ 时，$P \to \infty$.

更精确些：命 ϕ_0 是一个给定的值,对于任一 $\varepsilon > 0$，我们有一 $r_0(<1)$ 及一 $\delta(>0)$ 存在,使 $r > r_0$ 及 $|\phi_0 - \theta| < \delta$ 时,对一切适合于 $|\phi - \phi_0| > 2\delta$ 的 ϕ

$$0 \leqslant P(re^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{|1 - re^{i(\phi-\theta)}|^2} < \varepsilon.$$

要证此点,可看由 $|\theta - \phi| > \delta$ 得

$$\left|\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)}\right| \leqslant \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta}.$$

当 r 充分接近于 1 时,此值小于 ε.

(iii) 均值等于 1. 即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{i\theta})d\theta = 1. \tag{9}$$

这个结果是由 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1$ 经变形 (3) 变来的.

综合 (ii) 与 (iii), $P(re^{i\theta})$ 是一函数,在周界上除一处外,处处为 0, 在该处变为无穷,其平均值作为 $r \to 1$ 时的极限是等于 1, 这与"δ 函数"有相似处.

(iv) $P(re^{i\theta})$ 是调和函数. Poisson 核还有一实部表示法

$$P(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{w+z}{w-z} + \frac{\bar{w}+\bar{z}}{\bar{w}-\bar{z}}\right) = \mathbf{R}\,\frac{w+z}{w-z}. \tag{10}$$

由于 $\frac{w+z}{w-z}$ 在圆内是一解析函数,因此 $P(re^{i\theta})$ 是一调和函数.

(v) $P(re^{i\theta})$ 的共轭函数是

$$Q(re^{i\theta}) = I\,\frac{w+z}{w-z} = \frac{2r\sin(\theta-\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} + C. \tag{11}$$

因此 u 的共轭函数等于

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\phi})\frac{2r\sin(\theta-\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi + C.$$

由此推出, Schwarz 积分

$$f(z) = u(z) + iv(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\phi})\frac{e^{i\phi}+z}{e^{i\phi}-z}d\phi + iC. \tag{12}$$

同样, $v(z)$ 也是调和函数,它的共轭函数是 $-u(z)$, 因此

$$v(z) - iu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(e^{i\phi})\frac{e^{i\phi}+z}{e^{i\phi}-z}d\phi + iD. \tag{13}$$

以 i 乘 (13) 而加入 (12), 则得

$$2f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})\frac{e^{i\phi}+z}{e^{i\phi}-z}d\phi - D + iC. \tag{14}$$

命 $z = 0$, 由 § 1 定理 2 可得

$$f(0) = -D + iC = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})d\phi.$$

代入(14)得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})\,\frac{e^{i\phi}d\phi}{e^{i\phi}-z}.$$

即

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}. \tag{15}$$

这就是 Cauchy 公式.

(vi) 若 $\varphi(\zeta)$ 是在 $|\zeta|=1$ 上的连续函数,我们称

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

为 Cauchy 型积分. 显然,在单位圆内外表示解析函数,取

$$z=re^{i\theta},\ 0<r<1,\ z^*=\frac{1}{\bar z}=\frac{1}{r}e^{i\theta}.$$

于是

$$F(z)-F(z^*)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\varphi(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z^*}\right)d\zeta.$$

若 $\zeta=e^{i\phi}$, 则

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z^*}\right)d\zeta=\frac{1}{2\pi}P(re^{i\theta})d\phi.$$

于是

$$F(z)-F(z^*)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(re^{i\theta})\varphi(\zeta)d\phi.$$

于是当 $r\to1$ 时,我们有

$$\lim_{r\to1}(F(z)-F(z^*))=\varphi(e^{i\theta}).$$

也就是 Cauchy 型积分从内外趋于边界时之差,就是原来在边界上给定的函数值. 这个公式称为 Сохоцкий 公式.

(vii) Poisson 核是变换的对数法向微商.

$$w_1=\frac{w-z}{1-\bar z w},\quad w=\rho e^{i\phi}$$

是把 z 变为 0 的变形. 我们研究

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\left(\frac{w-z}{1-\bar z w}\right)=\frac{e^{i\phi}}{w-z}+\frac{e^{i\phi}\bar z}{1-\bar z w}=\frac{(1-|z|^2)e^{i\phi}}{(w-z)(1-\bar z w)}.$$

当 $\rho=1$ 时

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\left(\frac{w-z}{1-\bar z w}\right)_{\rho=1}=\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}=P(re^{i\theta}).$$

我们可以不必引进 ρ 来,而直接定义为: 函数

$$\ln\left(\frac{w-z}{1-\bar z w}\right),\quad w=e^{i\phi}$$

在圆周上法向微商就是 $-P(re^{i\theta})$. 或记之为

$$P(re^{i\theta})=-\frac{\partial}{\partial n}\ln\left|\frac{w-z}{1-\bar z w}\right|=\frac{\partial}{\partial n}\ln\left|\frac{1-\bar z w}{w-z}\right|.$$

函数 $\ln\left|\frac{1-\bar{z}w}{w-z}\right|$ 称为 Green 函数．这函数的特点是作为 w 的函数，在圆内部处处调和，而仅当 $w=z$ 时不然．在圆周 $|w|=1$ 上，此函数处处为 0．

(viii) 调和测度．命

$$\mathbf{W}(z, \psi_1, \psi_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi_2}^{\psi_1}\frac{1-r^2}{|1-re^{i(\psi-\theta)}|^2}\,d\psi.$$

不难证明，它可以用 $e^{i\psi_1}$, $e^{i\psi_2}$, z, $\bar{z}^{-1}$ 四点的交比表达出来(参考§5)．

§3. 奇 异 积 分

(这节的内容已在第一卷介绍过了，但为了读者方便添上此节．)

定理 1. 假定 $Q(z, \zeta)$ 是一实函数，其中

$$z=re^{i\varphi},\ \zeta=e^{i\psi},\ 0\leqslant r<1,\ 0\leqslant\varphi,\ \psi<2\pi.$$

假定 $Q(z,\zeta)$ 有以下一些性质:

(i) 非负连续函数．

(ii) 对任一 z 常有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q(z,\zeta)d\psi=1. \tag{1}$$

(iii) 当 $z\to\zeta_0=e^{i\psi_0}$ 而 $\zeta\neq\zeta_0$ 时，$Q(z,\zeta)$ 一致趋于 0．(即任一 $\varepsilon>0$，我们有 $\rho<1$ 及 $\delta>0$ 使 $r>1-\rho$ 及 $|\varphi-\psi_0|<\delta$，这时，对一切使 $|\psi-\psi_0|>2\delta$ 的 z, ζ 来说，常有 $0\leqslant Q(z,\zeta)<\varepsilon$．)

结论：如果对任一仅有第一类间断点的逐段连续的实函数 $u(\zeta)$，及 $u(\zeta)$ 在 ζ_0 处连续，则

$$\lim_{z\to\zeta_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)Q(z,\zeta)d\psi=u(\zeta_0). \tag{2}$$

证．由性质 (ii)，结论可以改为证明：当 $z\to\zeta_0$ 时，

$$\Delta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(\zeta)-u(\zeta_0))Q(z,\zeta)d\psi\to 0.$$

给一 $\varepsilon>0$，由连续性，可以选 $\delta>0$，使

$$|\psi-\psi_0|<2\delta$$

时，

$$|u(\zeta)-u(\zeta_0)|<\varepsilon.$$

把积分拆成为两部分

$$\Delta=\frac{1}{2\pi}\int_{|\psi-\psi_0|<2\delta}+\frac{1}{2\pi}\int_{|\psi-\psi_0|>2\delta}=\Delta_1+\Delta_2.$$

首先

$$|\Delta_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|\psi-\psi_0|<2\delta}Q(z,\zeta)d\psi\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q(z,\zeta)d\psi=\varepsilon.$$

其次，假定 $|\varphi-\psi_0|<\delta$，则由 $|\psi-\psi_0|>2\delta$ 可知 $|\varphi-\psi|>\delta$．由条件 (iii)，有一正数 $\rho<1$，使所有这样的 ψ 及当 $r>1-\rho$ 时，常有不等式

$$Q(z, \zeta) < \varepsilon.$$

即

$$|\Delta_2| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\psi-\psi_0|>2\delta} |u(\zeta) - u(\zeta_0)| Q(z, \zeta) d\psi < \frac{\varepsilon}{2\pi} 2M(2\pi - 2\delta) \leqslant 2\varepsilon M.$$

这儿 M 是 $|u(\zeta)|$ 在圆周上的最大值.

合起来就证明了本定理.

§4. Dirichlet 问 题

问题：在单位圆上给了一个函数 $u(\zeta)$. 除掉有限个点 $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ 之外，这函数是处处连续的. 在这些例外点，$u(\zeta)$ 有第一类间断点. 求出单位圆内的有界调和函数 $u(\zeta)$，在非例外各点，都与所给的 $u(\zeta)$ 相等.

这是有名的 Dirichlet 问题的特例（一般问题是任意域的边界代替单位圆）. 解法极易. 因为由 $u(\zeta)$ 可以作 Poisson 积分

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{i\psi}) u(\zeta) d\psi.$$

由上节的定理可知这就是问题的解答了.

如果我们假定了保角变换基本定理，我们这儿所解决的问题实际上是一般单连通域的 Dirichlet 问题.

关于例外点的趋限情况，我们先用以下的简单例子来说明. 在单位圆内函数

$$f(z) = \arg(1 - z)$$

是调和的. 并且假定 $z = 0$ 时，$f(z) = 0$. 我们现在看从圆内趋于 1 的情况. 命

$$z = 1 - \rho e^{i\theta}, \quad |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \rho > 0,$$

则

$$f(z) = \theta$$

在圆周上除 $z = 1$ 外 $f(z)$ 处处连续. 当 $z = 1$ 时，即当 $\rho \to 0$ 时，$f(z)$ 能趋近于 $-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$ 之间的任何一数. 有一个第一类间断点，其跃距为 $-\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$.

现在我们可以作出一个圆内调和，周界上连续，但在例外点 $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ 有跃距为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的第一类间断点的函数

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\pi} \arg(z - \zeta_k).$$

如果 $u(z)$ 是任一有以上性质的调和函数，则

$$u(z) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\pi} \arg(z - \zeta_k)$$

是一个边界上连续的函数了. 因此在间断点，$u(z)$ 可以取左右极限之间的任一数值.

§5. 上半平面的 Dirichlet 问题

在实轴上给了一个有有限个间断点的有界函数 $u(t)$. 要求出一个上半平面调和的函

数 $u(z)$，在边界的连续点上 $u(z)=u(t)$。

作一变形，它把单位圆 $|w|<1$ 变为上半平面 $I(\zeta)>0$

$$w=\frac{\zeta-z}{\zeta-\bar{z}}. \tag{1}$$

命 $w=e^{i\tau}$，则

$$e^{i\tau}=\frac{t-z}{t-\bar{z}}.$$

因而

$$e^{i\tau}d\tau=\frac{2y}{(t-\bar{z})^2}dt,$$

$$d\tau=\frac{2ydt}{(t-z)(t-\bar{z})}=\frac{2ydt}{(t-x)^2+y^2}. \tag{2}$$

命 $U(w)=u(\zeta)$，中值公式

$$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(e^{i\tau})d\tau$$

经 (1) 而变为

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}. \tag{3}$$

这就是上半平面的 Poisson 积分公式，正是我们所要的解.

由于

$$\frac{y}{(t-x)^2+y^2}=\mathbf{R}\frac{1}{i(t-z)},$$

因此，Schwarz 积分变为

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)dt}{t-z}.$$

这称为 Hilbert 积分．注意这一积分的收敛，仅仅假定了 $u(t)$ 有界是不够的．还要假定当 $|t|\to\infty$ 时，函数的某种性质，例如 $u(t)$ 趋于 0 的速度不慢于 $\frac{1}{|t^\alpha|}$，$(\alpha>0)$.

例 1．假定当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时 $u(t)=1$，而其它处等于 0，所对应的调和函数

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{\beta-x}{y}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{\alpha-x}{y}\right).$$

它的几何意义是向量 $z-\alpha$ 与 $z-\beta$ 与 x 轴所成的交角 φ_α，φ_β 之差除以 π．也就是 $\angle\alpha z\beta=\omega$ 除以 π．用交比表出之

$$(\alpha,\beta,z,\bar{z})=\frac{z-\alpha}{\beta-z}\Big/\frac{\bar{z}-\alpha}{\beta-\bar{z}}=e^{-2i\omega}.$$

同时 $u(z)$ 是函数

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{\pi i}\ln\frac{\beta-z}{\alpha-z}$$

的实部.

例 2．推广上例．假定 $u(t)$ 在

$$(-\infty,a_1),\ (a_1,a_2),\cdots,\ (a_n,\infty)$$

上分别取常数值 $u_0, u_1, \cdots, u_n$，则

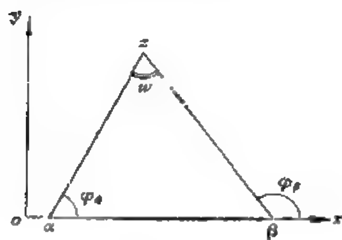


图 22

$$u(z)=\frac{\varphi_1 u_0}{\pi}+\frac{u_1}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)+\cdots+\frac{u_n}{\pi}(\pi-\varphi_n)$$
$$=\frac{\varphi_1}{\pi}(u_0-u_1)+\frac{\varphi_2}{\pi}(u_1-u_2)+\cdots$$
$$+\frac{\varphi_n}{\pi}(u_{n-1}-u_n)+u_n.$$

习题．用

$$w=\operatorname{th}\frac{\pi z}{4h}$$

把圆 $|W|<1$ 变为带形区域 $-h<Iz<h$．试证：公式

$$f(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(e^{i\tau})\frac{e^{i\tau}+w}{e^{i\tau}-w}d\tau+iC$$

变为 $F(z)=f(w)$，$U(z)=u(w)$．

$$F(z)=\frac{1}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_+(t)+U_-(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{4h}(t-z)}dt-\frac{i}{4h}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2h}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_+(t)-U_-(t)}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2h}\operatorname{ch}\frac{\pi(t-z)}{2h}}dt+iC.$$

这儿 $U_\pm(t)$ 表示 $u(\zeta)$ 在点 $\zeta=t\pm ih$ 处之值．(这在 1896 年 Д. А. Граве 的《制图学》中出现过．)

§6. 调和函数的展开式

仍然讨论单位圆．由于 Poisson 核有展开式

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{w+z}{w-z}+\frac{\bar w+\bar z}{\bar w-\bar z}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}(1+\bar w z(1-\bar w z)^{-1}+w\bar z(1-w\bar z)^{-1})$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(\bar w z)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(w\bar z)^n\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(\theta-\phi)\right).$$

这里 $z=re^{i\theta}$，$w=e^{i\phi}$．这级数当 $0\leqslant r\leqslant r_0<1$ 时是一致收敛的．因此

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}u(e^{i\phi})d\phi$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\phi})\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(\cos n\theta\cos n\phi+\sin n\theta\sin n\phi)\right)d\phi$$
$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n.$$

此处

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\phi})d\phi,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\phi})\cos n\phi d\phi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\phi})\sin n\phi d\phi.$$

因此得出：如果 $u(e^{i\theta})$ 有 Fourier 展开式

$$u(e^{i\theta})\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\tag{1}$$

则以 $u(e^{i\theta})$ 为边界值的调和函数等于

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n.\tag{2}$$

但需注意，虽然假定了 $u(e^{i\theta})$ 是连续函数，却并不保证 (1) 的收敛性．但 (2) 的收敛是保证了的．另一方面，如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant 1$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant 1$，则 (2) 收敛．但 (1) 可能不收敛．不但不收敛，有时还不知有何求和法可知其为某一函数．

再看单位圆内的解析函数 $f(z)$．若 $|z|<1$，$\zeta=e^{i\theta}$，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}(\bar{\zeta}z)^n d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.\tag{3}$$

此处

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{-ni\theta}d\theta.$$

也就是任一单位圆内解析的函数有幂级数 (3) 来表达．即如果 $f(e^{i\theta})$ 有 Fourier 级数

$$f(e^{i\theta})\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\theta},$$

则有一单位圆内的解析函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

由此可见，解析函数的微商是存在的，而且仍然是解析函数．

§7. Neumann 问 题

在一些应用中，我们需要考虑所谓第二边界值问题，也称为 Neumann 问题．我们仍然只考虑单位圆的情况．在周界上给了

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=\varphi(\theta),\tag{1}$$

求适合此条件的调和函数．

假定 $\varphi(\theta)$ 有 Fourier 级数

$$\varphi(\theta)\sim\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta).\tag{2}$$

假定

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)r^n.$$

代入 (1) 中

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta).$$

比较后可知 c_0 必须为 0，而且 $a_n = \frac{c_n}{n}$，$b_n = \frac{d_n}{n}$. 这一比较得出：

(i) $\varphi(\theta)$ 必须适合条件

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta = 0$$

方能有解；

(ii) 解的形式是

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta)r^n. \tag{3}$$

关于 (i)，确应如此，因为由

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta\Big|_{r=1} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial v}{\partial\theta}d\theta = 0,$$

可知此条件必不可少. 有了这一条件，解答 (3) 可以写成为

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\left(\int_0^{2\pi}\varphi(\phi)(\cos n\phi\cos n\theta + \sin n\phi\cos n\theta)d\phi\right)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\phi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\phi-\theta)}{n}r^n d\phi.$$

此处 a_0 为任意常数. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\tau}}{n}r^n = -\log(1-e^{i\tau}r),$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\tau}{n}r^n = -\frac{1}{2}\log(1-e^{i\tau}r)(1-e^{-i\tau}r)$$

$$= -\frac{1}{2}\log(1-2r\cos\tau + r^2).$$

因此

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\phi)\log(1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2)d\phi. \tag{4}$$

读者试自己找出在什么条件下，这积分成立，并且 $\lim\limits_{r\to1}\frac{\partial u}{\partial r} = \varphi(\theta)$.

条件 (1) 也可以看成为

$$r\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial v}{\partial\theta}\Big|_{r=1} = \varphi(\theta).$$

即可假定 $v\Big|_{r=1} = \int_0^{\theta}\varphi(\tau)d\tau = \phi(\theta)$，化为求 $v(re^{i\theta})$ 的 Dirichlet 问题来处理。

§8. 最大值最小值原理

定理 1. 一个不为常数的调和函数，不可能在其定义域的内点处达到其最大值(或最小值).

证．只需证明最大值的情况就够了,因为 $u(z)$ 的最大值便是 $-u(z)$ 的最小值.

假定 z_0 是内点,而且 $u(z_0)$ 取最大值．当 r 充分小时,有中值公式

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

这定理是以下定理的推论.

定理 2. 一个连续函数的平均值一定在函数的最大值与最小值之间,如果它等于最大或最小值,则此函数是一常数.

证．假定 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 间的连续函数,其平均值为

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

如果 m 是 $f(x)$ 的最大值,而 $f(x)$ 非常数，则一定有一点 x_0, $f(x_0)<m$．即存在一区间 $|x-x_0|\leqslant\delta$，其中 $f(x)<m$．如此则

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant\frac{1}{b-a}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)dx$$
$$+\frac{m}{b-a}\left(\int_a^{x_0-\delta}+\int_{x_0+\delta}^b\right)<\frac{m}{b-a}\int_a^b dx=m.$$

而这是不可能的.

由此定理推得：如果 $u(z_0)$ 是最大值，则 $u(z_0+re^{i\theta})=u(z_0)$．即在一个小圆的周界上是常数．由 Poisson 公式可知，其中无处非常数．即在这小圆内取常数值．我们现在证明在区域内任一点皆取常数值.如果在 $u(z_1)\neq u(z_0)$ 作一条由 z_0 到 z_1 的曲线．在此曲线上一定有一点 z_2 首先使其任意小邻域内有 z，使 $u(z)\neq u(z_0)$．在 z_2 作一小圆其中必有取值 $u(z_0)$ 的点．在此小圆内一定有一点取最大值．因而在这小圆内也是常数．与假定相矛盾.

定理 3(最大模原理)．一个非常数的函数在 D 内是解析的,在 $\bar{D}$ 上是连续的,则它的绝对值的最大值不可能在内点取.

证．已知

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta.$$

即得

$$|f(z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta.$$

与定理 2 的证法相同即得出定理.

注意．由于上式之间是不等号"$\leqslant$",所以我们仅能得出最大模不能在区域内取,而不能证明最小模不在区域内取.

§9. 调和函数贯

定理 1. 给一个在 D 内调和，$\bar{D}$ 上连续的函数贯

$$u_0(z),\ u_1(z),\ \cdots,\ u_n(z),\ \cdots.$$

如果 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ 在 D 的边界上一致收敛，则在 $\bar{D}$ 上这级数也一致收敛．而且它的和是一个 D 内的调和函数．

证．由假定可知，给了任一 $\varepsilon>0$，有 N 存在，使 $n>N$ 时，对边界上的一切点 ζ，

$$|u_{n+1}(\zeta)+\cdots+u_{n+p}(\zeta)|<\varepsilon.$$

根据最大最小值原理，对 $\bar{D}$ 内的一切 z，

$$|u_{n+1}(z)+\cdots+u_{n+p}(z)|<\varepsilon.$$

因此 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ 在 $\bar{D}$ 上是一致收敛的．

现在还需要证明的是这级数的和是一个调和函数．命 z_0 是 D 内的任一点．以 z_0 为中心作一圆，令此圆全在 D 中．在此圆中 $u_k(z)$ 是调和的．命 $U_k(z)=u_k(z+z_0)$，则 $U_k(z)$ 在以 0 为中心的圆内是调和的．Poisson 公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} U_k(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}U_k(Re^{i\phi})d\phi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2}\sum_{k=0}^{\infty}U_k(Re^{i\phi})d\phi.$$

级数 $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(Re^{i\phi})$ 是一个连续函数，因此右边表示一个调和函数．即 D 内任一点都是调和的，而且在 $\bar{D}$ 上是连续的．

§10. Schwarz 引理

定理 1. 假定单位圆内解析函数

$$w=f(z)$$

把单位圆映照到单位圆内，而且把原点变为原点，则把半径为 $r(<1)$ 的圆也映照到半径为 r 的圆内．这结论也可以改述为：

如果当 $|z|\leqslant 1$ 时 $|f(z)|\leqslant 1$ 及 $f(0)=0$，则 $|f(re^{i\theta})|\leqslant r$（即 $|w|\leqslant|z|$）．（由于最大模原理，可以将假定改弱为"如果当 $|z|=1$ 时 $|f(z)|\leqslant 1$"．）

还可以补充一点，当而且仅当 $f(z)=e^{i\theta}z$ 时取等号．

证．在 $|z|\leqslant 1$，$f(z)$ 有一级数展开式．由 $f(0)=0$，所以 $\frac{f(z)}{z}$ 也有一级数展开式．因而在单位圆内 $\frac{f(z)}{z}$ 是一个解析函数．由假定

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant 1,$$

由最大模原理

$$\left|\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\right| \leqslant 1,$$

即得定理．如取等号，则 $\frac{f(z)}{z}$ 是一绝对值等于 1 的常数．

经过简单的换变数可以把定理 1 推广为

定理 2. 假定 $f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant R$ 上是解析的，而且

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \leqslant M, \ f(0) = 0,$$

则当 $0 \leqslant r \leqslant R$ 时，有

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant \frac{Mr}{R}.$$

还是回到单位圆的情况．如果用非欧距离的符号，则定理 1 的结论 $|w| \leqslant |z|$ 可以改写为

$$D(0, w) \leqslant D(0, z). \tag{1}$$

由于非欧距离的不变性，及任一点都可以变为 0，因此立刻推出

定理 3 (Pick). **假定** $f(z)$ 是单位圆内的解析函数，而在 $|z| \leqslant 1$ 内 $|f(z)| \leqslant 1$. 命 z_1, z_2 为单位圆内的任意二点，则

$$D(f(z_1), f(z_2)) \leqslant D(z_1, z_2). \tag{2}$$

而且，当且仅当 $w = f(z)$ 是一非欧运动时，上式取等号．

证．有一非欧运动把 (z_1, z_2) 变为 $(0, z^*)$. 又有一非欧运动把 $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ 变为 $(0, w^*)$. 这样 $w = f(z)$ 变为 $w^* = f_1(z^*)$ 也是一个变形，把单位圆 $|z^*| < 1$ 变为 $|w^*| < 1$，且 $f_1(0) = 0$. 因此 $|w^*| \leqslant |z^*|$. 即 $D(0, w^*) \leqslant D(0, z^*)$. 因而

$$D(w_1, w_2) = D(0, w^*) \leqslant D(0, z^*) = D(z_1, z_2).$$

取等号的情况也不难推出．

更广泛一些：一条由 a 至 b 的曲线 Γ (在单位圆内)的非欧长度等于

$$L(\Gamma) = \int_a^b \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

如果把曲线分为 n 份，每份用短程线的长度来代替，当 $n \to \infty$，这样总长度就趋近于 $L(\Gamma)$. 因此，由定理 3 立刻可以推出

定理 4 (Pick). 假定 $f(z)$ 仍然适合于定理 3 的假定．假定 $w = f(z)$ 把单位圆内的曲线 Γ_z 变为曲线 Γ_w，则

$$L(\Gamma_w) \leqslant L(\Gamma_z). \tag{3}$$

当且仅当 $w = f(z)$ 是非欧运动时，上式取等号．

把 (2) 写得更清楚些：

$$\frac{1}{2}\log\frac{|1 - \bar{w}_1 w_2| + |w_2 - w_1|}{|1 - \bar{w}_1 w_2| - |w_2 - w_1|} \leqslant \frac{1}{2}\log\frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}.$$

这不等式与不等式

$$\left|\frac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2}\right| \leqslant \left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| \tag{4}$$

等价．当 $z_2 \to z_1$ 时，得

$$\lim_{z_2 \to z_1}\left|\frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}\right|\left|\frac{1}{1 - |w_1|^2}\right| \leqslant \frac{1}{1 - |z_1|^2}.$$

换符号得

定理 5. 仍如定理 3 的假定，则当 $|z| < 1$ 时，

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{5}$$

这定理的特例：当 $f(0) = 0$ 时，$|f'(0)| \leqslant 1$ 已由定理 1 直接推出．

附记．如果圆内有一点使 (4) 式取等号，则 (4) 就取等号．$w = f(z)$ 就是非欧运动．(读者试自己证明之．)

又由于

$$\int_{z_1}^{z_2} f'(z)dz = f(z_2) - f(z_1),\quad \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2},$$

立刻推出

定理 6. 仍如定理 3 的假定，当 $|z_1| < r < 1$，$|z_2| < r < 1$ 时，

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \leqslant \frac{1}{1 - r^2}.$$

习题．仍如定理 3 的假定，证明，当 $|z| < 1$ 时，

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |f(0)||z|}.$$

§11. Liouville 定理

作为 Schwarz 引理的第一个应用：

定理 1. 如果 $F(z)$ 是一个全平面上无处不解析的函数，而且常有 $|F(z)| < M$，则 $F(z)$ 是一常数．

证．对任一 $R > 0$ 作函数

$$f(u) = \frac{F(z) - F(0)}{2M},\quad z = Ru.$$

由 Schwarz 引理，当 $|u| < 1$ 时，

$$|f(u)| \leqslant |u|.$$

即对任一 $R > 0$，当 $|z| < R$ 时，

$$|F(z) - F(0)| \leqslant \frac{2M}{R}|z|.$$

命 $R \to \infty$，则得 $F(z) = F(0)$，即得定理．

更广泛些

定理 2. 如果 $F(z)$ 是一个全平面上无处不解析的函数，而且当 $z \to \infty$ 时，

$$F(z) = O(|z|^k),$$

则 $F(z)$ 是一个次数不高于 k 的多项式.

证. 由于解析性, $F(z)$ 可以在原点展开成为

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots.$$

命 $a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k = P(z)$. 考虑函数

$$f(z) = \frac{F(z) - P(z)}{z^k},$$

由定理 1 即得定理

定理 3 (代数基本定理). 任何一个多项式一定有一个零点, 也就是任何一个代数方程式至少有一个根.

证. 如果 $f(z)$ 是一个多项式而没有零点,即 $f(z) = 0$ 无解,考虑函数

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}$$

是一个无处不解析的函数. 因而得出矛盾.

§12. 保角变换的唯一性

定理 1 (双曲几何的基本定理). 把单位圆一对一地变为其自己的保角变换一定是非欧运动.

由于在非欧运动群下, 单位圆是可递的. 因此如能证明: "把单位圆一对一地变为其自己而且使原点不变的保角变换一定是 $w = e^{i\theta}z$" 即足. 由假定: 当 $|z| \leqslant 1$ 时 $|f(z)| \leqslant 1$, 而且 $f(0) = 0$. 因此

$$|w| = |f(z)| \leqslant |z|.$$

由于是一对一的保角变换,因此 $w = f(z)$, 也可以表成为 $z = g(w)$. 即得 $|z| \leqslant |w|$. 因此 $|w| = |z|$, 所以 $w = e^{i\theta}z$.

由此推得

定理 2. 把单位圆一对一地变为其自己的, 而且 "一点带一方向" 变为 "一点带一方向"的保角变换是唯一的.

定理 3. 命 D 是一任一单连通域. 假定有一个保角变换

$$w = f(z)$$

对应地把 D 变为单位圆 $|w| < 1$, 把 D 内一点 z_0 及一方向变为单位圆内的原点及 x 轴正向,则这样的变形是唯一的.

因此,证明了 Riemann 基本定理的唯一性部分.

§13. 映 进 映 照

定义. D 是一个区域,如果保角变换

$$w = f(z)$$

把 D 映照到 D 或其一部分,则称为映进映照.

以上所讲过的定理可以改讲成为:

一个 Лобачевский 空间的映进映照，一定把非欧长度愈变愈短，当且仅当非欧运动时长度才能不变。

如果D是由单位圆 $|w|<1$ 经过保角变换

$$w=w(z)$$

变出来的区域，则在D空间的度量有

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}=\frac{|w'(z)||dz|}{1-|w(z)|^2}.$$

命Γ是D内的一条曲线。这曲线的长度等于

$$L(\Gamma)=\int_\Gamma \frac{|w'(z)||dz|}{1-|w(z)|^2}.$$

则由定理 5 推出D的任何一个映进映照一定不会把 $L(\Gamma)$ 变大。

§14. 单连通域的 Dirichlet 问题

假定 $w=w(z)$ 是一个一一对应的保角变换，它把一个域D变为单位圆 $|w|<1$，把 z_0 变为 $w=0$。并且假定它的周界C是由一个有限条有连续切线的曲线所合成的。并且当 z 沿C变化时，w画单位圆周。而且对D的周界长度参数 s 来说，这变形是有连续微商的。

我们现来考察一下，调和函数的中值公式

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)d\theta,\quad \zeta=e^{i\theta}. \tag{1}$$

经过变形 $w=w(z)$ 变为什么？由于

$$dw=w'(z)dz,\quad |dw|=|w'(z)||dz|,$$

可知

$$d\theta=|w'(z)|ds.$$

命 $u(w)=U(z)$，$u(0)=U(z_0)$，得

$$U(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C U(z)|w'(z)|ds. \tag{2}$$

我们现在来变化 $|w'(z)|$。

引理 1. 在曲线 $|w(z)|=1$ 上

$$-\frac{\partial}{\partial n}\log|w(z)|=|w'(z)|. \tag{3}$$

证． 先由 Cauchy-Riemann 条件的广义形式可以推出

$$\frac{\partial}{\partial n}w(z)=i\frac{\partial}{\partial s}w(z), \tag{4}$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial n}\log|w(z)|=\mathbf{R}\left(\frac{\partial}{\partial n}\log w(z)\right)=\mathbf{R}\left(i\frac{w'(z)}{w(z)}\frac{dz}{ds}\right). \tag{5}$$

另一方面，由

$$w(z)\overline{w(z)}=1, \tag{6}$$

可以推得

$$w'(z)\overline{w(z)}\frac{dz}{ds}+w(z)\overline{w'(z)}\frac{d\bar{z}}{ds}=0.$$

即得

$$\frac{w'(z)}{w(z)}\frac{dz}{ds}=-\frac{\overline{w'(z)}}{\overline{w(z)}}\frac{d\bar{z}}{ds}. \tag{7}$$

用 $\frac{a}{c}=-\frac{b}{d}$ 得 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\sqrt{\frac{ab}{cd}}$, 得出

$$\frac{w'(z)}{w(z)}\frac{dz}{ds}=i\frac{|w'(z)|}{|w(s)|}\left|\frac{dz}{ds}\right|=i|w'(z)|. \tag{8}$$

因此得出

$$-\frac{\partial}{\partial n}\log|w(z)|=|w'(z)|.$$

代入 (2) 式得公式

$$U(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C U(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|w(\zeta)|}ds. \tag{9}$$

因此得到

定理 1. 假定D有本节开始时所指出的性质. 在周界C上给与一个仅有有限个第一类不连续点的函数$U(\zeta)$, 则 (9) 所定义的函数在D内解析, 在周界上当$U(\zeta)$连续时取值$u(\zeta)$, 当z_0沿各种路线趋向一个不连续点时, 可以如同 § 4 中那样处理.

由于$w(z)$把z_0变为 0, 因此, 我们把这函数写成为

$$w=f(z, z_0),$$

并命

$$g(z, z_0)=\ln\frac{1}{|f(z, z_0)|}.$$

定义. 函数$g(z, z_0)$称为区域D的 Green 函数.

由 Poisson 核的性质不难推得

定理 2. 当 $z_0\in D$ 时, 这函数在C上处处为 0, 在D内除 $z=z_0$ 外处处调和. 当$z\to z_0$时, $g(z, z_0)\to\infty$.

§ 15. 单连通域的 Cauchy 公式

定理 1. 仍然在上节的假定下, 如果$f(z)$是一个在D内解析并且在$\overline{D}$上连续的函数, 则

$$\int_C f(z)dz=0.$$

证. 命 $z=\tau(w)$ 是 $w=w(z)$ 的逆变换, 则

$$\int_C f(z)dz=\int_{|w|=1}f(\tau(w))\tau'(w)dw.$$

由于解析函数的复合函数仍然是解析函数, 解析函数的微商仍然是解析函数, 因此,

$f(\tau(w))\tau'(u)$ 是 w 的解析函数。因而得出本定理。

定理 2. 仍如定理 1 的假定，$z_0 \in D$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0).$$

证. 命 $f(\tau(w)) = g(w)$，则得

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} \frac{g(w)\tau'(w)}{\tau(w)-\tau(w_0)}dw, \quad |w_0| < \rho.$$

因为 $\tau = \tau(w)$ 是一一对应的保角变换，所以 $\tau'(w_0) \neq 0$。命

$$\frac{1}{\tau(w)-\tau(w_0)} - \frac{1}{\tau'(w_0)(w-w_0)} = K(w),$$

则

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} \frac{g(w)\tau'(w)}{(w-w_0)\tau'(w_0)}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} g(w)\tau'(w)K(w)dw.$$

右边的第一项等于

$$\frac{g(w_0)\tau'(w_0)}{\tau'(w_0)} = g(w_0).$$

现在只须证明第二项等于 0 即得. 也就是如果能证明 $K(w)$ 是解析函数，即可由定理 1 推出.

由于

$$\tau(w) = \tau(w_0) + (w-w_0)\tau'(w_0) + O(|w-w_0|^2),$$

可以推得当 $w \to w_0$ 时 $K(w)$ 有界，在 $w \neq w_0$ 的各点 $K(w)$ 显然是解析的，因此得出本定理.

第五章　点集论与拓扑学中的若干预备知识

§1. 收　　敛

讲到收敛就想到"距离"的概念．我们已经遇到过多种"距离"，其最显著的有三种：(i) 普通的距离，即两复数 z_1, z_2 之间的 Euclid 距离 $|z_1 - z_2|$；(ii) 椭圆几何所出现的球面距离，或弦距离，即两点(包括∞在内) z_1, z_2 的弦距离

$$\frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}};$$

(iii) 双曲几何中的非欧距离或伪弦距离，即如果 $|z_1| < 1$，$|z_2| < 1$，则 z_1, z_2 二点的伪弦距离

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_2 z_1|}.$$

这些距离统一以一个符号 $d(z_1, z_2)$ 表之．它们都有以下的一些性质：

(i) $d(z_1, z_2) \geqslant 0$，而仅当 $z_1 = z_2$ 时取等号；

(ii) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$；

(iii) $d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$．

不等式 (iii) 在第一种情况中，当三点在一直线上，且 z_3 在 z_1, z_2 之间时取等号，在椭圆几何及双曲几何中当且仅当 $z_3 = z_1$ 或 z_2 时取等号．

一个贯 $z_1, z_2, \cdots$，如果有以下的性质就称为收敛于 a：

$$\lim_{n\to\infty} d(a, z_n) = 0.$$

特别值得注意的是在椭圆几何中有一点是∞的情况

$$d(\infty, z_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_n|^2}},$$

在这种情况下，贯 $z_n \to \infty$ 的意义是 $\dfrac{1}{|z_n|} \to 0$．在现在的双曲几何距离表达式中，我们不要忘记 $|z_1| < 1$，$|z_2| < 1$．如果取上半平面作为依据，则伪弦距离是

$$d(z_1, z_2) = \left|\frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - z_2}\right|, \quad \vartheta z_1 > 0, \quad \vartheta z_2 > 0.$$

注意，除椭圆几何弦距离把无穷远点概括了进去外，我们并没有得出什么新东西来！在椭圆几何中，如果 $|z_1| < R$，$|z_2| < R$，则

$$\frac{|z_1 - z_2|}{1 + R^2} \leqslant \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}} \leqslant |z_1 - z_2|.$$

因此，如果 z_n 依弦距离收敛于 a，则在普通意义下也是收敛于 a 的．并且反之亦真．又如果 $|z_1| < \rho$，$|z_2| < \rho$，$\rho < 1$，则伪弦距离给出

$$\frac{|z_1 - z_2|}{1 - \rho^2} \geqslant \frac{|z - z_2|}{1 - |z_1\bar{z}_2|} \geqslant \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right| \geqslant \frac{|z_1 - z_2|}{1 + |z_1\bar{z}_2|} \geqslant \frac{|z_1 - z_2|}{2}.$$

即如果一贯依仿弦距离收敛，则一定是普通收敛．并且反之亦真．以上所说的，是所谓"等价拓扑"的例子．

由此可知，用弦距离作为收敛标准最有普遍性，今后用 $d(a,b)$ 表弦距离．不难证明以下的结果．由

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} w_n = b$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = a + b,\quad \lim_{n\to\infty} z_n w_n = ab.$$

但 $a+b$ 及 ab 必须是有意义的（例如：不允许 $0\cdot\infty$，$\infty+\infty$ 等）．（因为前面已知 $a\neq\infty$，$b\neq\infty$ 时的情况，因此读者仅需自证 (i) $a=\infty$，$b\neq\infty$ 时，"和"式成立；(ii) $a=\infty$，$b\neq 0$ 时，"积"式成立．）

§2. 紧致点集

已知：在任何一个有界无穷点集中可以找到一个趋限的贯（Weierstrass 定理）．如果每个这样的极限都包含在点集之中，则有这样性质的点集称为紧致集合．我们在复数以外添上∞及运用弦距离的目的就是使所有的复数所成的集合成为紧致的集合．也就是在以弦距离为依据的情况下，把复平面上所有的点扩充成一紧致集合．即任一无穷点集，一定有一个收敛贯．

说得更细致些，命M是一个复数点集，其中有∞或无有∞．如果M是一无穷集合，则可能有两种情况出现：(i) 对任一自然数 n，M 中有在圆 $|z|=n$ 之外的点，(ii) 存在 n 使M的点都在 $|z|\leqslant n$ 之中．前者M包有一趋于∞的贯，后者由 Weierstrass 定理可知其中有一收敛贯．

由此引出以下的推论．命 $\{z_n\}$ 表一无穷贯，其中一定有一收敛的子贯 $\{z_n'\}$ 收敛于一数 a．如果原来的贯并不收敛，则存在一 $\varepsilon_0>0$ 及无穷多个指标 h_n 使

$$d(z_{h_n}, a) > \varepsilon_0,\quad n = 1, 2, \cdots.$$

在无穷集合 $\{z_{h_n}\}$ 中，又可以找到 $z_n''\to b$．此 $b\neq a$．

因此得出定理：**一个复数无穷贯收敛的必要且充分条件是它的所有的无穷子贯都趋于同一极限．**

由此定理甚易推出 Cauchy 判别条件，在某些应用中，这一形式更为方便．

§3. Cantor-Hilbert 对角线法

在不少问题中我们必须从若干个甚至无穷个贯同时取出收敛贯来．即

$$\left.\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n},\ \cdots \\ a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2n},\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1},\ a_{m2},\ \cdots,\ a_{mn},\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{1}$$

是无穷个贯．我们的要求是在其中选取无穷个列，排成与(1)相仿的表，其中每一行都成

为收敛贯.

先在第一行中选取收敛贯

$$a_{1j_{11}},\ a_{1j_{12}},\ \cdots,\ a_{1j_{1n}},\ \cdots.$$

其极限是 a_1。第一个坐标 j_{11} 将以 k_1 表之。考虑

$$a_{2j_{11}},\ \cdots,\ a_{2j_{1n}},\ \cdots.$$

在其中选一收敛贯

$$a_{2j_{22}},\ a_{2j_{23}},\ \cdots,\ a_{2j_{2n}},\ \cdots.$$

其极限是 a_2。再以 k_2 代 j_{22}。

继续进行,对每一 $i=1, 2, \cdots$,

$$a_{ij_{ii}},\ a_{ij_{i,i+1}},\ \cdots \tag{2}$$

的极限是 a_i。每一次以 k_i 代 j_{ii}。

现在考虑

$$\begin{array}{l} a_{1k_1},\ a_{1k_2},\ \cdots,\ a_{1k_n},\ \cdots \\ a_{2k_1},\ a_{2k_2},\ \cdots,\ a_{2k_n},\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ik_1},\ a_{ik_2},\ \cdots,\ a_{ik_n},\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

这是从(1)中取第 k_1 列,第 k_2 列,…而得的. 其中第 i 行所代表的贯与(2)的一子贯仅有有限项不同,所以它的极限是 a_i。

这一选择法称 Cantor 的对角线法。

§4. 点集的类别

命 A 表一批复数所成的集合. 如果 A 中有不同于 z_0 的点 z_n,它们成一以 z_0 为极限的贯,则 z_0 称为 A 的极限点或聚点. 如果有一正数 ε,使适合于

$$d(z, z_0) < \varepsilon$$

的所有的 z 都在 A 中,则 z_0 称为内点(注意 z_0 可以是∞).

不属于集合 A 的点所成的集合 $C(A)$ 称为集合 A 的补集合.补集合的内点称为 A 的外点. 内点和外点以外的点称为 A 的边界点(注意∞不作为例外). 所有属于 A 的边界点成一集合,称为 A 的边界. 属于 $C(A)$ 的称为 $C(A)$ 的边界.

A 中非聚点之点称为 A 的弧立点.

仅有内点的集合称为开集. 包有所有聚点的集合称为闭集. 无一点非聚点的集合称为密集集合. 闭又密集的集合称为完全集合.

开集的补集是闭集,而且反之亦然. 既开又闭的集合只有扩大复平面本身而无其他. 因为它既包有所有的聚点,又是仅由内点组成的.

命 H_A 表集合 A 所有的聚点所成的集合. $A+H_A$ 称为 A 的闭包,以 $\overline{A}$ 表之. $\overline{A}$ 是最小的包有 A 的闭集. $C(\overline{C(A)})$,即 A 集的补集 $C(A)$ 的闭包 $\overline{C(A)}$ 的补集是 A 所包有的最大的开集. 这称为 A 的开核.

易证有限个或可数个开集的综合是一开集. 一个包有一个的可数个非空的闭集

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$$

的交是一非空的闭集. 证明如下. 在每一集 A_i 中选一点 z_i, 从中选一收敛贯

$$z_{n_1}, z_{n_2}, \cdots, \quad n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

趋于 ω. 任给一自然数 m, 我们可以取得 i 充分大, 使 $n_i > m$, 这时贯

$$z_{n_i}, \ z_{n_{i+1}}, \ \cdots$$

都在 A_m 中(因为 A_ν 是一个包一个的). 由于 A_m 是闭的, 所以 ω 在 A_m 中. 这对 $m = 1, 2, 3, \cdots$ 都对, 故 ω 必然在所有的 A_ν 之交 D 内, 故 D 是非空的. 由于 D 的聚点仍在 D 中, 所以 D 是闭集合.

§5. 映照或变形

对应于 z 平面上一个点集 A_z 中的一点, 在 w 平面上有一点. 这种关系称为单值映照. 把 z 平面上的点集 A_z 变为 w 平面上的点集 A_w. 写下来就是一个单值函数关系

$$w = F(z), \quad 或 \quad u = \varphi(x, y), \ v = \psi(x, y).$$

z 称为 w 的原象, w 称为映象. 这函数的定义区域就是 A_z, 取值区域就是 A_w. 虽然对一个原象 z 我们有一个确定的映象 w, 但是我们并没有排斥对一个固定的映象 w 可以有不止一个原象 z 与之对应, 可能有很多个甚至于无穷多个. 最极端的情况是: A_z 的所有的点都对应于 w 平面上的一点 w_0. 这样的函数是常数 $F(z) = w_0$.

命 z_0 是 A_z 的聚点, 可能不属于 A_z. A_z 中有一贯 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0. 由等式

$$w_n = F(z_n), \quad n = 1, 2, \cdots$$

得出一个映象贯 $\{w_n\}$. 但可能 $\{w_n\}$ 并不收敛. 我们现在假定对 A_z 中任意收敛于 z_0 的贯 $\{z_n\}$, 其映象 $\{w_n\}$ 均为收敛贯的情况. 我们说, 所有的这样的贯 $\{w_n\}$ 一定收敛于唯一的数 w_0. 其理由是如果 $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$ 收敛于 z_0, 而其对应的 $\{w_n'\}$, $\{w_n''\}$ 却收敛于 w_0', w_0''. 作贯

$$z_1', z_1'', z_2', z_2'', \cdots.$$

它也是一个收敛于 z_0 的贯. 但其映象

$$w_1', w_1'', w_2', w_2'', \cdots$$

既以 w_0' 为聚点, 又以 w_0'' 为聚点. 因此唯一可能是 $w_0' = w_0''$.

假定 z_0 也在 A_z 中, 我们一定有

$$w_0 = F(z_0).$$

因为贯 $z_1 = z_0, \ z_2 = z_0, \cdots$ 就给出这个要求. 在此情况下我们说函数 $F(z)$ 在 z_0 点连续. 甚至于当 z_0 不在 A_z 中, 如果对任一 A_z 的贯 $\{z_n\} \to z_0$, $\{F(z_n)\}$ 有唯一的极限, 则我们也可以定义 $F(z_0)$ 为 $\lim\limits_{n\to\infty} F(z_n)$. 在扩充了的定义范围之后, $F(z)$ 在 z_0 是连续的.

注意如果取弦距离, 以上的连续定义并不排斥 z_0, w_0 是 ∞ 的情况.

§6. 一致连续

假定 A_z 中某一闭集合 B 的每一点 ζ 都是 A_z 的聚点. 并设 $F(z)$ 在所有的 $\zeta(\in B)$ 处

都连续. 给与 δ, 研究适合于

$$z \in A_z,\ \zeta \in B,\ d(z, \zeta) < \delta \tag{1}$$

的所有的复数对 z, ζ. 并定出这些复数对所给出的

$$\varepsilon(\delta) = \sup d(F(z), F(\zeta)). \tag{2}$$

首先, 当 δ 变小的时候, 适合于 (1) 的 z, ζ 少了, 因而 $\varepsilon(\delta)$ 变小了. 即 $\varepsilon(\delta)$ 随 δ 减小而单调变小, 因此

$$\lim_{\delta\to 0}(\delta) = \varepsilon_0 \tag{3}$$

是存在的. 现在定出 ε_0. 我们选取一个贯 δ_n 适合于

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0. \tag{4}$$

并对每一 δ_n, 有一对点 z_n, ζ_n 使

$$z_n \in A_z,\ \zeta_n \in B,\ d(z_n, \zeta_n) < \delta_n, \tag{5}$$

而

$$d(F(z_n), F(\zeta_n)) \geqslant \frac{\varepsilon(\delta_n)}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

我们不妨假定 ζ_n 收敛于 ζ_0 (不然取一子贯). 由于 B 是闭集, 因此 $\zeta_0 \in B$, 它是一连续点. 由 (4), (5),

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta_0.$$

今得出

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} F(\zeta_n) = F(\zeta_0).$$

即

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \leqslant \lim_{n\to\infty} d(F(z_n),\quad F(\zeta_n)) = 0.$$

这证明了

$$\varepsilon_0 = \lim_{\delta\to 0} \varepsilon(\delta) = 0.$$

也就是给了一个任意小的 $\varepsilon > 0$, 我们可以找到 δ, 使适合于

$$d(z, \zeta) < \delta$$

的 $z(\in A_z)$, $\zeta(\in B)$ 常使

$$d(F(z), F(\zeta)) < \varepsilon.$$

这种 ε 只依赖于 δ 而跟 (z, ζ) 无关的性质称为 $F(z)$ 在 B 上的一致连续性.

如果 A_z 本身就是一闭集合, 而 $F(z)$ 在其上连续, 则得以下的定理: 在一闭集合上定义而且连续的函数一定是一致连续的函数.

命 A 是复平面上的一个点集, ζ 是其边界点, 则有 A 的一点列 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 趋于 ζ, 并且

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \alpha$$

存在. 这 α 称为在边界点 ζ 函数 $F(z)$ 的边值. 命 W 表所有的边值的集合, 则 W 是一闭集合.

其证明是不难的. 因为如果 α_0 是 W 的聚点, 即 $\{\alpha_n\}$ 是一组边界值, 而 $d(\alpha_n, \alpha_0) < \frac{1}{n}$,

则至少有一点 z_n 使 $d(F(z_n), \alpha_n) < \frac{1}{n}$. 即 $d(F(z_n), \alpha_0) < \frac{2}{n}$. 故$\alpha_0$ 是一边界值

§7. 拓 扑 映 照

一个函数

$$w = F(z) \tag{1}$$

定义一个映照，把 A_z 映照到 A_w 上. 如果再加上限制，由

$$F(z_1) = F(z_2), \quad z_1 \in A_z, \quad z_2 \in A_z,$$

可推出 $z_1 = z_2$，即对应于一个 $w(\in A_w)$ 我们也只有一个 $z \in A_z$. 这样的映照称为单叶的，也就是一一对应的. 既然如此，则由 w 到 z 也是一个函数关系

$$z = G(w), \tag{2}$$

它把 A_w 映照到 A_z 上来，称为 (1) 的逆映照. 如果 F 与 G 都是连续的，则 (1) 称为拓扑映照. 所以拓扑映照是一一对应的双方连续的映照.

如果 $z = H(s)$ 是一拓扑映照把 A_s 变为 A_z，则

$$w = G(H(s))$$

也是一个把 A_s 变为 A_w 的拓扑映照.

拓扑学就是研究拓扑映照下的几何性质的. 在拓扑学上圆的可以说成是方的. 因为我们有拓扑映象把圆变方. 例如由圆心对每一幅角作一射线交圆周的距离是 $\rho(\theta)$，交"方周"的距离是 $\tau(\theta)$，则变形

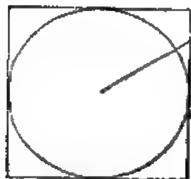


图 23

$$\theta_1 = \theta, \quad \rho_1 = \frac{\tau(\theta)}{\rho(\theta)}\rho$$

就把 (θ, ρ) 平面上的圆变为 (θ_1, ρ_1) 平面上的方了. 它也可以把平整的说成歪扭的，如在哈哈镜中看相片，它也可以把大的说成是小的，把正的说成是反的，如左右手. 但是它不能把一片说成两片，把不联的说成联的，把立体的说成为平面的，例如把球说成是圆.

以往所讲的 Möbius 变换都是把 Neumann 球变为自己的拓扑变换.

注意，拓扑依赖于极限. 这样定义极限有一种拓扑. 但换了极限的定义，可能拓扑也将有所不同. 以上所定义极限是用"距离"，有了某一距离就有某一拓扑. 但有时两种不同定义极限的方法可能导致出同一拓扑. 例如，两个距离 $d(w, z)$, $d_1(w, z)$ 适合于以下的关系：有正数 ρ 及 ρ_1 存在，使

$$\rho_1 d_1(w, z) < d(w, z) < \rho d_1(w_1 z_1).$$

这样由 $d(w, z)$ 定义出的拓扑与由 $d_1(w, z)$ 定义出的拓扑都是相同的. 例如，单位圆内诸点所成的集合依普通距离、弦距离、伪弦距离所定义出的拓扑都是等价的. 也就是在一种意义下 $z_n \to z_0$，在另一种意义下也是如此.

§8. 曲　　线

闭线段 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 的连续映象称为复平面 (或球面) 上的一连续弧段(或曲线). 因

此一连续曲线可以表为

$$z = x + iy,\ x = f(t),\ y = g(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1}$$

这儿 f, g 是 t 的连续函数. 这儿"连续"的意义也可以在"弦距离"的意义下理解，即给一 $\varepsilon > 0$，有 δ 存在，使 $d(s, t) < \delta$ 时，$d(z(s), z(t)) < \varepsilon$. 如果 $f(0) = f(1)$，$g(0) = g(1)$，则连续弧称为是闭的.

这样定义的曲线似乎很能符合我们的几何直观. 但是 Peano 举出例子，说明可以找出适合这条件的曲线，它可以填满一个正方形. 因此，虽然几何直观是而且也将永远是数学的一个重要的思想来源，但有了直观还需精密地分析和论证，这样才能置之于坚实的基础上.

Jordan 首先指出无重点的曲线的重要性.

定义. 由 (1) 定义的曲线如果还适合以下的条件，则称为 Jordan 弧段. 由

$$f(t) = f(t'),\ g(t) = g(t'),\ 0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant 1 \tag{2}$$

一定得出 $t = t'$. 不与自己相交的曲线是 Jordan 弧. Jordan 弧段也称简单曲线.

如果由 (2) 推出 $t = 0$，$t' = 1$，则所定义的点集称为 Jordan 闭曲线. 多边形是 Jordan 闭曲线. Jordan 闭曲线也称简单闭曲线.

因此，Jordan 弧段可以理解为单位线段的拓扑映象. 而 Jordan 闭曲线可以理解为单位圆圆周的拓扑映象.

利用 Heine-Borel 定理可以证明:

命 C 是域 S 中的一个 Jordan 弧. 给与任一 $\varepsilon > 0$，一定有一折线与 Jordan 弧的弦距离 $< \varepsilon$. (即对折线上的任一点，C 上有一点与它的弦距离 $< \varepsilon$. 而且对 C 上任一点，折线上也有如此的点.) 即任一 Jordan 弧可以用折线来无限逼近它，任一 Jordan 闭曲线可以用多边形来无限逼近它.

§9. 连 通 性

最简单的拓扑性质之一是连通性.

一点集 S 上的二点 a 与 b 称为在 S 内连通的，如果有一条曲线 C 完全在 S 内，使 a, b 都在 C 上.

如果集合 S 中所有的点都和 S 的某固定点在 S 内连通，则集合 S 称为连通集合.

也可用 Jordan 曲线来定义连通. 令 C:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

是连通集 S 中连结 a, b 两点的曲线.

如果它不是 Jordan 曲线，则有

$$0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1,$$

使

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2),$$
$$\psi(t_1) = \psi(t_2).$$

因此只需把弧段 $t_1 < t \leqslant t_2$ 所对应的曲线部分抹掉即可.

连通的开集称为域.

连通的闭集称为连续统.

一维的域的最简单的例子是开线段 $0 < t < 1$. 连续统最简单的例子是闭线段 $0 \leqslant t \leqslant 1$. 但在复变数中讨论的域一般都是指二维的.

圆的内部 $|z-a| < r$ 是域, 外部 $|z-a| > r$ 也是域. 同样如果用弦距离, $d(z, a) < \varepsilon \leqslant 1$, 也可在 Nemmanm 球上定义一域.

如果 S 是一域,则连通性可用折线来定义.方法如下:设 C 是 S 中连结 a,b 的曲线,其上的点都是 S 的内点. 在每一点可以作一完全属于 S 的开圆,这些开圆把曲线完全盖上. 由于曲线是一个闭集合,因此有有限个圆 $C_1, \cdots, C_n$ 盖上此曲线. 在这些圆内取连续的折线段,即得所证.(例如可设相邻的圆各含有对方的圆心,则取连结各圆心的折线段即可.)

包含一点的连通开集称为该点的邻域.

我们将不证: 任一拓扑变换一定把原象点的邻域变为映象点的邻域. 这一性质在复变函数论的具体问题中大都是可以直接验证的.

如果 S 是一域, z_0 非其内点,但却是 S 的内点的聚点,则 z_0 称为 S 的边界点. S 的全体边界点的集合称为 S 的边界.

Jordan 闭曲线的最重要的性质是

定理 (Jordan). 一条 Jordan 闭曲线把平面分为两个域,而以 Jordan 曲线为其公共边界.

这定理是直观的,但证明是烦难的. 我们将不加证明. 但在下节将证明几个特例.

下面这条定理也是用得到的.

定理. 命 P 是 Jordan 闭曲线上的点. Q 非曲线上的点. QP 与 x 轴的交角用 $\alpha(P)$ 表之. 如果 Q 是内点,则当 P 沿这曲线走一圈时, $\alpha(P)$ 或增或减 2π (如果增加 2π, 则 P 的走向是反时针方向的). 如果 Q 是外点,则 $\alpha(P)$ 并不增减. 与 Jordan 定理一样,这条定理的证明是并不容易的,本书也将不加证明.

§ 10. Jordan 定理的特例

1) 凸域. 具有以下性质的开集称为凸域: 如果 A, B 是凸域的两点,则联结 A, B 的直线段全部在此域中.

在第一卷中已经证明过,凸域的边界是连续的. 凸域加上其边界点得一连续统,它也是有凸性质的.

凸域是域,此为显然. 凸域的外点所成的集也是开集. 再证其连通性. 今 O 是凸域一内点, P 是一外点,过 OP 作一半直线. 这半直线分为两段. 自 O 到边界为一段,包 O 在内. 另一段自边界经过 P 趋于无穷. 在趋于无穷的一段上, P 与 ∞ 之间必无该凸域的内点及边界点,否则如果有一个这样的点 R, 则 OR 上的点(包括 P 在内)必定是内点或边界点. 这是不可能的. 因此任何一个外点一定与 ∞ 是连通的,即得外点所成的集合是一域.

2) 三角形. 三角形是凸域. 因此整个平面被三角形分为两个域,而三边为其公共边界. 并易见,若一线段只交三角形的一边,一定有一个端点落在三角形中,另一个落在三

角形外．由凸性，如果两端都在内，这线段一定与三角形无交点．如果两点 P，Q 都在外，且 P，Q 的联线过三角形的一内点 R，则线段 $\overline{PR}$ 与 $\overline{RQ}$ 将各交三角形之边于一点，而且这两点不在同一边上．

3）多边形．一个简单封闭多边形分平面为两个域，以这多边形的边为其公共边界．（“简单”指无重点的意思．）

在多边形 P 的边数上行归纳法．三边形已知其正确．今假定此断言对边少于 n 的多边形为真，因而证明它对 n 边形 P 也真．

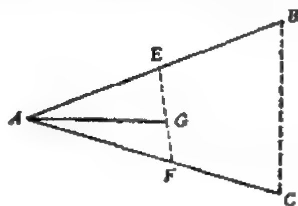


图 24

不交多边形的边的两顶点的连线称为对角线．今证明存在有以下性质的对角线，它将 P 分为两个多边形，以此对角线为一公共边，而且两个新多边形的边数都少于 n．

命 $\overline{AB}$ 与 $\overline{AC}$ 是二邻边．作 $\overline{BC}$．如果三角形内及 $\overline{BC}$ 上无 P 的其它顶点，则 $\overline{BC}$ 就是所求的对角线．不然命 G 是三角形 ABC 内及 $\overline{BC}$ 上离 $\overline{BC}$ 最远的顶点，如同时有 n 个，则任择其一联线 $\overline{AG}$，这就是适合于要求的对角线．由于证法相同我们只就后一种情况进行讨论．

把多边形的顶点顺序排列起来，从 A 出发到 G 之后有两途可循，并且都可以回到 A 点．如此得二多边形 P_1，P_2．它们的边数各为 r 与 $s(r>2, s>2)$．AG 是公共边，因此 $(r-1)+(s-1)=n$．故得 $r<n$，$s<n$．

由归纳法假设这两个多边形都有“内”，“外”（外指包有 ∞）．我们首先证只有两种可能，一种是 P_1 在 P_2 之内（或 P_2 在 P_1 之内），另一种是两域各外．

如断言非真，则 P_1 及 P_2 有公共内点，且 P_1 的内点不完全包括 P_2 的内点，P_2 的内点也不完全包括 P_1 的内点，这就是说，在 P_1 之内有 P_2 的内点及外点，在 P_1 之外也有 P_2 的内点及外点．因此，在 P_1 之内、外都有 P_2 的边界点．设 x，y 是 P_2 的边界点，其中 x 是 P_1 的内点，y 是 P_1 的外点．P_2 之边界的一部分 π 构成联结 x 及 y 的 Jordan 曲线．它一定和 P_1 的边界相交．前面已证 P_1，P_2 只以 $\overline{AG}$ 为公共边界．因此 π 必交 P_1 于 $\overline{AG}$，而不交 P_1 的任何其它边界点．但这样一来，P_2 的边界在 $\overline{AG}$ 上至少有一点成为三分叉，与简单多边形之边界的 Jordan 闭曲线性质相矛盾．故得证．

在第一种情况下，P_2 的内点除去 P_1 的内点及 P_1 的边界在 P_2 内的部分定义为原来多边形 P 的内点；P_2 的外点，P_1 的内点及线段 $\overline{AG}$（除去 A，G 两点）定义为 P 的外点．在第二种情况下，P_1 的内点，P_2 的内点，加上 $\overline{AG}$（除去 A，G 两点）定义为 P 的内点；P_1，P_2 的公共外点定义为 P 的外点．我们只证第一种情况，读者试自证第二种情况．

先证 P 的内点及外点都是开集．如果以 I 表前者，II 表后者，Z 表紧致复平面所成点集，则 $\mathrm{I}=Z-(P_2$ 的外点及边界点 $+P_1$ 的内点及边界点)．括号内是两个闭集之和，仍为闭集，故 I 是紧致复平面上某一闭集之补集，应为开集．$\mathrm{II}=Z-(P_2$ 的内点及边界点 $\cap P_1$ 的内点及边界点)．括号内是两个闭集之交，仍为闭集，故是紧致复平面上某一闭集之补集，应为开集．

现证 P 的内点及外点都是连通的．它的外点连通是显然的，因为 $\overline{AG}$ 是 P_1，P_2 的公共边界，P_2 的外点及 P_1 的内点都可有曲线与 $\overline{AG}$ 相联．它内点的连通性可证之如下：令 x，

y 为 P 的两个内点，则必为 P_1 的外点. 有一条曲线 π 完全在 P_1 之外，π 的两端为 x, y. 如果 π 不交 P 的边界，则定理已证. 如果 π 交 P 的边界，则一定是交 P_2 的边界. 无妨假定它至少有两个交点. 设 x_1 是第一个交点，y_1 是最后一个交点. 以 $d(E, S)$ 表 P_1 及 P_2 的任一顶点 E 到任一非邻边 S 的距离，而令 $\rho = \min d(E, S)$ 为其极小值. 在 P_2 的内部沿 P_2 的边界作距离为 $\eta = \frac{\rho}{k}$ 的平行线段（k 充分大），它们也构成一简单封闭多边形 P_3. 由于 x, y 都是 P_2 的内点，无妨假设它们离边界的距离大于 η（否则可把 η 取得更小），因此 π 在交 P_2 的边界之前，必先交 P_3 的边界于 x_2, y_2. 取 k 充分大，可使 x_2 充分接近 x_1，y_2 充分接近 y_1. 由于 P_2 及 P_1 只有一条公共边 $\overline{AG}$，故 x_2 沿 P_3 的边界到 y_2 有两条路可走. 其中有一条不需经过 $\overline{AG}$ 的"旁边"，亦即不需穿过 P_1，从 x 经 x_2 及 y_2 到 y 完全在 P_2 之内，且不交 P_1 及其边界，故亦完全在 P 之内. 定理证明.

§11. 连 通 数

本节将根据定理进行一些直观的讨论，而不加以严格的证明.

Jordan 定理还有以下的推广：命 G 表一域，γ 是 G 内的 Jordan 闭曲线. γ 把平面分为两部分 D', D''. D' 与 G 的交命之为 G'，D'' 与 G 的交命之为 G''. γ 分 G 为两部分 G' 与 G''，他们是域，而且以 γ 为公共边界.

命 $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$ 是两条不相交 Jordan 的闭曲线. 已知 $\gamma^{(1)}$ 分平面为两部分 $G^{(1)}$ 及 $G^{(1)'}$. $\gamma^{(2)}$ 一定在此二域之一内. 因而又分为二. 因此两个不相交的 Jordan 闭曲线分平面为三部分，都是域. 用归纳法不难证明，n 个互不相交的 Jordan 闭曲线分平面为 $n+1$ 个域.



图 25

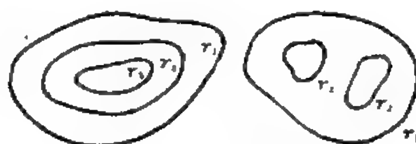


图 26

但值得注意，当 $n \geqslant 3$ 时，有多种拓扑不等价的位置. 例如图 26.

在函数论的研究中"完全隔离"的位置十分重要. 所谓 n 个完全隔离的 Jordan 闭曲线乃指任取其一，其他的 $n-1$ 个都在此一的同一边. 图 26 之二是完全隔离，图 26 之一则否. 这一定义也可以叙述为：这 n 条闭曲线 $\gamma^{(\nu)}(\nu = 1, 2 \cdots n)$ 分平面为 $n+1$ 份. 其一以这 n 个 $\gamma^{(\nu)}$ 为边界，其他的都是以一个 $\gamma^{(\nu)}$ 为边界.

现在考虑一域 G 内有三个完全隔离的 Jordan 闭曲线 $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$ 的情况. 在 G 内可以找到一条曲线联上 $\gamma^{(2)}$ 与 $\gamma^{(3)}$，而不交 $\gamma^{(1)}$. 三 Jordan 闭曲线完全隔离的条件（必要且充分）是在 G 中能联其任二不交他一.

在函数论中主要仅考虑有有限个连续统为边界的域. 由一个连续统为边界的域称为单连通，由两个无公共点的连续统为边界的域称为双连通. 一般地讲，由 n 个无公共点的连续统为边界的域称为 n 连通（如图 27）.

n 称为连通数，是一个拓扑不变量.

如果域的周界是一 Jordan 闭曲线，则是一单连通域. 例如，开圆 $|z| < 1$ 是单连通域，上半平面数 $\vartheta_z > 0$ 亦然. 但单位圆沿半径切开仍然是单连通，其周界则非 Jordan 闭曲线了！多种切法(如图 28) 可使边界极为复杂，但是它还是单连通域.

但我们将来会知道任二单连通域（多于一个边界点的）可以拓扑地把其一变为另一(甚至于，可以保角地如此做). 因此，以上的复杂的边界情况，反而不是本质现象. 也就是说，它不是一个域(内部)的拓扑映照的不变性质.



图 27

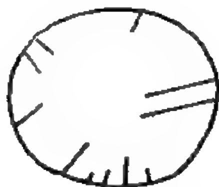


图 28

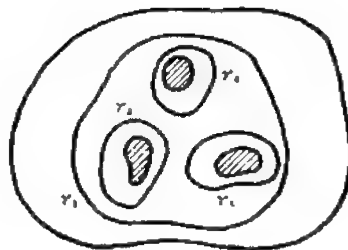


图 29

如果 G 是一单连通域，γ 是完全在其中的 Jordan 闭曲线，则 γ 分平面为两"边"，有一"边"的点全在 G 中. 如果不然，G 的边界的点将一部分在 γ 内，一部分在外，而不是一个连续统了. 反之如果不是单连通，其边界由若干个连续统组成，可以证明(例如利用保角变换)有一 Jordan 曲线 γ 全在 G 内并把 G 的边界点分在两边. 这事实引出单连通的另一定义：如果 G 内任一 Jordan 曲线的一"边"全在 G 内，则 G 定义为单连通.

多连通域 G 的连通数 n 也可以定义为 G 内所能做的完全隔离的 Jordan 闭曲线的最多条数. 这些 Jordan 曲线具有以下的性质：有一域只以这 n 条曲线为边界.

n 的意义还可以用以下的定义来说明. 命 G 表一域. 一条连一内点一边界点的 Jordan 弧（弧上其他的点全是 G 的内点）称为 G 的一切口. 由边界点到边界点的 Jordan 弧(弧上其他的点全是 G 的内点)称为横跨切口. 一单连通域被横跨切口分为两个单连通域.

如果 G 上能做 N 条横跨切口而仍是连通的，但任何 $N+1$ 条横跨切口把 G 分为不连通的部分，则连通数 $n = N+1$.

第六章 解析函数

§1. 解析函数的定义

命D是一个域．$f(z)$ 是在D上定义的单值连续函数． 如果它满足下列三种(相互等价的)条件之一，则称为解析的．

(I) (Cauchy-Goursat)．

命 z_0 是D的内点，常有一数 l，使给了任一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，

$$\left|l-\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|<\varepsilon, \tag{1}$$

则 $f(z)$ 称为在 $z=z_0$ 可导．这就是第三章 §4 的定义．如果D的任一内点都有此性质，则 $f(z)$ 称为在D内解析，这个 l 就定义为 $f(z)$ 在 z_0 的微商，用 $f'(z_0)$ 表之．

(II) (Riemann)．

如果把 $f(z)$ 写成为

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

若 z_0 有一邻域，其中 u，v 是有一阶连续偏微商的实函数，而且适合 Cauchy-Reimann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

则 $f(z)$ 在 z_0 是解析的．

(III) (Weierstrass)．

如果 z_0 有一邻域存在，在其中 $f(z)$ 可以展开为收敛的幂级数，则 $f(z)$ 在 z_0 总是解析的．这时有 $\delta>0$，使

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

在 $|z-z_0|<\delta$ 中是收敛的．

由第三章 §4 已经知道，定义 (II) 与 (III) 可以推出 (I)，因此现在的问题在于由 (I) 推出 (II)，(III) 来．今后说“解析”二字是定义 (I) 的意义．

附记 1：函数

$$f(z)=\sqrt{|xy|}$$

在 x 轴与 y 轴上都等于 0．所以在 $z=0$ 时，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

即适合 Cauchy-Riemann 方程，但在 $z=0$ 时，$f(z)$ 并没有微商，因为

$$\frac{f(z)}{z}=\frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}.$$

命 $x=\alpha r$, $y=\beta r$, 则当 $r\to 0$ 时,

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{x+yi}\to\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+i\beta}$$

并不是同一的,故原函数并不解析.

这说明了,在一点 Cauchy-Riemann 方程成立并不能得出解析性,因为这仅仅代表两个方向的微商而已. 也就是

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

沿着两个互相垂直的方向趋于同一极限并不足以说明 $f(z)$ 的解析性. 甚至当它沿所有直线方向都趋于同一极限也不一定解析. 例如:

$$\begin{cases} f(z)=\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & 当\ z\neq 0, \\ f(z)=0, & 当\ z=0. \end{cases}$$

不难证明,当 z 沿任一直线趋于 0, 常有

$$\lim\frac{f(z)-f(0)}{z}=0.$$

但沿 $x=y^2$, 则

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此 $f(z)$ 在 $z=0$ 时不解析.

附记 2. 在 (I) 的定义中,如果假定了 $f'(z)$ 是连续函数,则立即可以推得 (II).

附记 3. 在第一个定义中,原先 Cauchy 假定的 $f'(z)$ 的连续性被 Goursat 证明是不必要的,人们当然希望定义 II 亦有相应的改进. 果然, Looman-Menchoff 证明了如下的更为一般的定理(但本书不予证明).

令 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 是域 D 中最多除了一个可数集合外,处处有一阶偏导数的实函数,且在 D 中最多除了一个测度为 0 的集合外,处处皆有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

则 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是 D 中的解析函数.

§ 2. 一些几何概念

若 $x(t)$, $y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 表示一条 Jordan 曲线, 为了沿简单曲线 C 求积分的需要,我们不得不添上曲线可度长的条件. 我们假定 $x(t)$, $y(t)$ 都有连续微商, 且 $f(z)$ 是 C 上的连续函数,则

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(x(t)+iy(t))(x'(t)+iy'(t))dt \\ &= \int_a^b (ux'-vy')dt+i\int_a^b (uy'+vx')dt.\end{aligned}$$

在第一卷已证明过

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant ML.$$

这儿M是 $f(z)$ 在C上的最大值,而L是C的长度.

一条可度长的简单封闭曲线称为围道. 为了方便起见,我们常从考虑以下形式的闭围道C入手. 假定有一区间(a, b),当 $a < x' < b$ 时, $x = x'$ 交C于二点(不多不少),命定为 $y_1(x')$ 与 $y_2(x')$, $y_1(x) < y_2(x)$. 当 $x < a$, 及 $x > b$ 时, $x = x'$ 与C无交点. 同样有一区间 (α, β), 当 $\alpha < y' < \beta$ 时, $y = y'$ 交C于二点 $x_1(y')$ 与 $x_2(y')$($x_1(y') < x_2(y')$), 而当 $y' < \alpha$ 及 $y' > \beta$ 时, $y = y'$ 与C无交点. 围道C的内点是适合于 $a < x < b$ 及 $y_1(x) < y < y_2(x)$ 的点. 不在C内和C上的点称为C的外点. 以后所讲的简单闭围道就是指这样的围道.

如果C与 C' 是两个这样的简单闭围道,而有一段或多段的公共弧,并且各在其一之外. 除了公共弧,得一区域 C''. C'' 的内部是由C及 C' 的内部点及公共边界上的点所组成(凡属于C及 C' 的公共外点的聚点不计在内. 参看图 30, 例如 α, β).

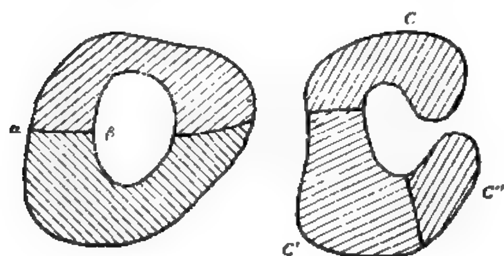


图 30

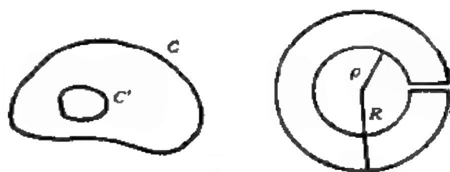


图 31

又如果 C' 的所有内点也是C的内点, 则由C的内点同时又是 C' 的外点的点所成的集合得一新区域. 例如: $\rho \leqslant |z| \leqslant R$, $y \geqslant 0$ 所围的区域, 又把此区域对实轴作对称, 并擦去从 $-R$ 到 $-\rho$ 一段实轴. 因而得出一区域,其中从 $z = \rho$ 到 $z = R$ 走方向相反的两次.

§ 3. Cauchy 定 理

定理 1 (Cauchy). 命C表一围道. 假定 $f(z)$ 是一个在C上及在C所包含的二维域D上解析的单值的函数(定义 I), 则

$$\int_C f(z)dz = 0, \tag{1}$$

这儿的积分是沿C进行的.

如果用"定义 II", 这定理是容易证明的. 因为

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx.$$

由 Cauchy-Riemann 方程可知 $udx - vdy$ 与 $udy + vdx$ 都是确切微分. 可得定理. 或用 Green 公式和 Cauchy-Riemann 方程可得定理.

特别地,函数 $az+b$ 有连续微商,由 § 1 附记 2 可知它的实、虚部适合 Cauchy-Riemann

方程.因此

$$\int_C (az+b)dz=0.$$

Goursat 的贡献就是减弱了假定，也就是不再要求 $f'(z)$ 的连续性.

他先从定义 (I) 推出 $f(z)$ 的一致可微性，也就是：

给了 $\varepsilon>0$，我们可以找到 $\delta>0$ (δ 与 z 无关)，使 $|z'-z|<\delta$ 时

$$|f(z')-f(z)-(z'-z)f'(z)|<\varepsilon|z'-z|. \tag{2}$$

这儿 z' 与 z 都在 C 或 C 所围绕的区域 D 上.

以 $\overline{D}$ 表 C 与 D 的点所成的集合.

要证明此点，我们用"不断分割法". 先作一网络，由平行于 x, y 轴，距离为 l 的直线所构成，它把平面分成许多方块. 我们取其中与 D 有公共内点的那些方块. 其中有的完全在区域 D 内的，记之为 $C_1, \cdots, C_M$. 有些与 C 有交点的，这些方块在 $\overline{D}$ 内的部分记之为 $D_1, \cdots, D_N$，如此则

$$\overline{D}=\sum_{i=1}^{M} C_i+\sum_{j=1}^{N} D_j.$$

在这样分割之后，把 $C_1, \cdots, C_M, D_1, \cdots, D_N$ 分为二类. 一类是对其中所有的 z 与 z'，当 $|z-z'|<\delta_1$ 时 ($\delta_1>0$ 固定)都有 (2) 式成立. 余者一类是(2)式不能成立的.

把第二类的区域平分为四份. 取 $\delta_2=\dfrac{\delta_1}{2}$，如果仍然有 (2) 式不能成立的部分，即其中存在两点 z, z', $|z-z'|<\delta_2$，使 (2) 式不成立，则再四分，继续施行. 如此可能性有二：其一是经过有限次分割后 (2) 式成立了，结论已经获证；不然，有一串一个套一个的小方格

$$R_1, R_2, R_3, \cdots, R_n, \cdots$$

及一趋于 0 的正数串 $\delta_n=\dfrac{\delta_1}{2^{n-1}}$，使 (2) 不成立.

这些方格趋于一点 z_0'. 由假设知：存在 $\delta_0>0$，使 $|z-z_0'|<\delta_0$ 时恒有 (2) 式成立. 但当 n 充分大时，可使 R_n 完全包含于 $|z-z_0'|<\delta_0$ 内及 $\delta_n<\delta_0$，这是与假设相矛盾的，因此得出 $f(z)$ 的一致可微性.

附注. 以上实际上是附带证明了 Heine-Borel 定理，熟悉该定理的读者可直接应用之(参阅第一卷一分册第四章 § 17.).

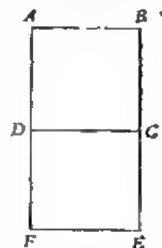


图 32

现来证明定理 1. 利用前面所作的细格，沿每个 $C_1, \cdots, C_M$ 及 $D_1, \cdots, D_N$ 的边界积分. 记相应的边界为 $\partial C_1, \cdots, \partial C_M$ 及 $\partial D_1, \cdots, \partial D_N$，则

$$\int_C f(z)dz=\sum_{m=1}^{M}\int_{\partial C_m} f(z)dz+\sum_{n=1}^{N}\int_{\partial D_n} f(z)dz.$$

其中每一积分都是正向的. 例如，二正方形 $ABCD$ 与 $DCEF$ 有一公共边 CD. 在第一正方形中积分由 D 到 C，在第二正方形中积分由 C 到 D，因此沿 CD 的积分对消了. 因此，在以上的积分中实际只有 C 的部分，其他添加的线段的积分都消去了. 由 (2) 可知

$$\int_{\partial C_m} f(z)dz = \int_{\partial C_m} [f(z_0') + (z - z_0')f'(z_0')]dz + \int_{\partial C_m} \phi(z)dz,$$

其中 $|\phi(z)| \leqslant \varepsilon |z - z_0'|$. z_0' 是 C_m 中一定点．函数

$$f(z_0') + (z - z_0')f'(z_0')$$

是 z 的线性函数，故有连续微商．因此，由本节开始已经证明了

$$\int_{\partial C_m} [f(z_0') + (z - z_0')f'(z_0')]dz = 0,$$

$$\int_{\partial D_k} [f(z_0') + (z - z_0')f'(z_0')]dz = 0.$$

又在 C_m 中 $|z - z_0'| \leqslant \sqrt{2}\, l_m$ (l_m 是小四边形 C_m 的边长)，

$$\left|\int_{\partial C_m} \phi(z)dz\right| \leqslant \varepsilon\sqrt{2}\, l_m \cdot 4l_m,$$

即

$$\left|\int_{\partial C_m} f(z)dz\right| \leqslant \varepsilon\sqrt{2}\, l_m \cdot 4l_m.$$

又 D_n 的周界长度不超过 $4l_k + S_n$．这儿 S_n 是 D_n 与 C 的公共部分，所以

$$\left|\int_{\partial D_n} \phi(z)dz\right| < \varepsilon\sqrt{2}\, l_n(4l_n + S_n).$$

对一切的 m, n 求和

$$\left|\int_C f(z)dz\right| < 4\sqrt{2}\,\varepsilon\left(\sum_m l_m^2 + \sum_n l_n^2\right) + \varepsilon\sqrt{2}\, l \sum_n S_n, \tag{3}$$

这儿

$$\left(\sum_m l_m^2 + \sum_n l_n^2\right) \leqslant (b - a)(\beta - \alpha).$$

而 $\sum\limits_n S_n = C$ 的长度．

因此 (3) 的右边小于 ε 的常数倍，而左边与 ε 无关，因得定理．

附记 1．凡是可以切开成为若干个简单闭围道所范围的区域的区域，Cauchy 定理也是正确的，沿切开处积分来回抵消．故得定理．

附记 2．在 C 上关于 $f(z)$ 的条件可以减弱．即只需要 $f(z)$ 在 D 内部解析，在 $\overline{D} = D + C$ 上连续，因为如果 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上连续，则

$$\int_C f(z)dz = \lim \int_{C'} f(z)dz.$$

这儿 C' 是 C 内的围道，而且 $C' \to C$，我们不在此具体说明了．

思考性问题：用单位圆为想象出发点，是否需要 $f(z)$ 在 C 上连续？

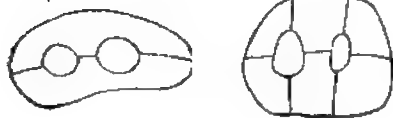


图 33



图 34

定理 2. 在定理 1 的假定下,沿任何 D 内曲线由 z_0 到 z, 函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

是单值的,解析的.

证. 首先, 如果 D 内有两条曲线由 z_0 到 z, 此二曲线合成一闭围道, 因而得出 $F(z)$ 是单值的. 其次

$$F(z+\delta z)-F(z)=\int_{z}^{z+\delta z} f(w)dw.$$

因此

$$\frac{F(z+\delta z)-F(z)}{\delta z}-f(z)=\frac{1}{\delta z}\int_{z}^{z+\delta z}(f(w)-f(z))dw.$$

由连续性,对任一 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$ 存在,使 $|w-z|<\delta$ 时有

$$|f(w)-f(z)|<\varepsilon.$$

如此则当 $|\delta z|<\delta$ 时

$$\left|\frac{F(z+\delta z)-F(z)}{\delta z}-f(z)\right|<\varepsilon.$$

即得 $F(z)$ 是解析的,而且其微商等于 $f(z)$.

$F(z)$ 称为 $f(z)$ 的不定积分.

不难证明: 如果 $G'(z)=f(z)$, 则 F 与 G 相差一常数,也不难证明

$$\int_{z_0}^{z} f(w)dw=G(z)-G(z_0).$$

§ 4. 解析函数的微商

命 $f(z)$ 在一简单闭围道 C 上及其 D 内解析. 命 z 是 C 内的一定点,考虑函数

$$\frac{f(w)}{w-z}$$

舍除 $w=z$ 这一点外,这函数是解析的. 在 $w=z$ 附近取一小圆. 其半径为 ρ, 并取 ρ 充分小,使 $|z-w|=\rho$ 含在 D 内,且

$$|f(w)-f(z)|<\varepsilon,$$

用 r 表此圆之圆周,则

$$\left(\int_C-\int_r\right)\frac{f(w)}{w-z}dw=0,$$

即

$$\int_C\frac{f(w)}{w-z}dw=\int_r\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

而

$$\int_r\frac{f(w)}{w-z}dw=f(z)\int_r\frac{dw}{w-z}+\int_r\frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw.$$

我们用极坐标

$$w=z+\rho e^{i\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

直接算出

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta}d\theta}{\rho e^{i\theta}} = 2\pi i,$$

及

$$\left|\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho = 2\pi\varepsilon,$$

因此

$$\left|\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw - 2\pi i f(z)\right| < 2\pi\varepsilon.$$

左方与 ε 无关，因此得公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw = f(z). \tag{1}$$

这是有名的 Cauchy 积分公式，即由 $f(z)$ 在周界上的值来推出 $f(z)$ 在周界内的函数值。

实质上，只须假定 $f(z)$ 由内趋于 C 时连续也就够了。

再由

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)}dw. \tag{2}$$

(z 在 D 内，取 h 充分小使 $z+h$ 也在 D 内)，由

$$\int_C \frac{f(w)dw}{(w-z)(w-z-h)} - \int_C \frac{f(w)dw}{(w-z)^2} = h\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)}dw. \tag{3}$$

在 C 上 $|f(w)| \leqslant M$. 由 z 到 C 的最短距离是 δ，命 L 表 C 的长度，则得当 $|h| < \delta$ 时

$$\left|\int_C \frac{f(w)dw}{(w-z)^2(w-z-h)}\right| \leqslant \frac{ML}{\delta^2(\delta-|h|)},$$

当 $|h| \to 0$ 时，右边有界，因此，由 (2) 及 (3) 得

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw.$$

这是 $f'(z)$ 的 Cauchy 公式。

再用同样的方法，从

$$\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{2w-2z-h}{(w-z)^2(w-z-h)^2}f(w)dw$$

而推得

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3}dw.$$

即 $f''(z)$ 是存在的. 因而解析函数的特点是假定了"可微性"而可推出高阶可微性. 因此从定义 (I) 可以推出定义 (II) 来.

继续进行，$f(z)$ 有各阶微商，得

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

习题 1. 假定在以 a 为中心以 r 为半径的圆周上及圆内 $f(z)$ 是解析的，则

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!M}{r^n}.$$

这儿 M 是 $|f(z)|$ 在圆周上的最大值.

习题 2. 假定 $f(z)$ 是解析函数,证明当 $f(z)\neq 0$ 时

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\log|f(z)|=0,$$

而且除 $f(z)=0$ 或 $f'(z)=0$ 的 z 点外,常有

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}|f(z)|>0.$$

§5. Taylor 级数

上节已经证明任何一个解析函数都有各阶微商,现在进一步证明:

假定 $f(z)$ 在一简单闭曲线 C 上及其内部解析,命 a 又是一内点及 δ 是 a 到 C 上最短距离,则当 $|z-a|<\delta$ 时,有收敛级数

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\cdots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots.$$

还是从 Cauchy 积分公式出发,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-z}dw,$$

这儿 Γ 是以 a 为中心,以 $\rho(<\delta)$ 为半径的圆,这公式当 $|z-a|<\rho$ 时成立.

由于在 Γ 上

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}+\cdots$$

是一个一致收敛的级数,所以可以乘以 $\dfrac{f(w)}{2\pi i}$ 而沿迴线 Γ 逐项求积分,如此得出:

$$\begin{aligned}f(z)=&\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-a}dw+\frac{z-a}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+\cdots\\&+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw+\cdots,\end{aligned}$$

由于 ρ 可任意接近于 δ,这就是所需要的公式了.

这说明从定义 (I) 也可以推出定义 (III) 来. 因而定义 (I),(II),(III) 是相互等价的.

与实变数的 Taylor 展式有一个极重要的不同点,就是在研究实变数函数的 Taylor 展式时,总是展得 n 项,然后看其余项是否随 n 趋于 0. 在复变数函数研究时,其余项趋近于 0 可由解析性自然推得,级数的收敛圆半径的决定依赖于解析性. 例如 ρ 是最大的正数,使在 $|z-a|<\rho$ 内 $f(z)$ 解析,则 $f(z)$ 在 $z=a$ 处的 Taylor 展式的收敛半径是 ρ,例如:函数

$$\frac{1}{1+z^2}\,(=1-z^2+z^4-z^6+\cdots)$$

在 $z=\pm i$ 处不解析. 因此,在原点展式的收敛半径等于 1. 但作为实函数来说,我们看不出为什么收敛范围应当是 $-1<x<1$ 的道理.

附记. 以上的一切讨论都不需要假定 $f(z)$ 在 C 上是解析的，而仅需要 $f(z)$ 在 C 上是连续的.

更深刻些，如果 $f(z)$ 在 C 上是可积函数 $\varphi(w)$，则照样可以定义 Cauchy 型积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(w)}{w-z}dw.$$

这在 C 内是一个解析函数，并且有 Taylor 展式.

习题 (Morera) (Cauchy 积分定理之逆定理).

命 D 是一域，在其中 $f(z)$ 是 z 的连续函数，并且过 D 内的任一闭围道

$$\int f(z)dz$$

恒等于 0，则 $f(z)$ 在 D 内解析.

提示: 考虑

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)dw,$$

由

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_z^{z+h}(f(w)-f(z))dw,$$

推得 $F(z)$ 解析，因之，$f(z)$ 解析.

§6. Weierstrass 重级数定理

定理 1. 命 C 为一简单闭曲线，D 是 C 的内点所构成的域，$\{f_n(z)\}$ 是一个函数贯，在 $\bar{D}=D+C$ 上解析，并且假定在 C 上

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{1}$$

一致收敛，则级数 (1) 在 $\bar{D}$ 上一致收敛，而且其和是 D 内的解析函数.

在 C 上，命

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

则 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)}{z-w}dz$ 是 D 内的一个解析函数，仍以 $\Phi(w)$ 表之. 命 a 为 D 内的任一点

$$\Phi(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)}{z-a}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\sum_n f_n(z)\right]\frac{dz}{z-a}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(z)}{z-a}dz\right]=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a),$$

(由于在 C 上 $\frac{1}{z-a}$ 是有界函数，所以在 C 上 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{z-a}$ 也是一致收敛的. 因此可以逐项积分.) 可见在整个 D 内

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(w)=\Phi(w). \tag{2}$$

现证 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{D}$ 一致收敛．由假设知当 n 充分大时，对任一正整数 m，在 C 上有

$$\left|\sum_{n}^{n+m} f_k(z)\right| < \varepsilon. \tag{3}$$

由极大模原理知在整个 $\overline{D}$ 上，(3) 亦成立，定理全部证完．

定理 2. 命

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots,\ f_n(z),\ \cdots$$

是域 D 内的解析函数贯，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

在 D 内的任一闭区域 D' 上一致收敛，则

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

在 D 内是解析的，且可逐项求各级微商．

命 C 是 D 内的任一简单闭曲线，我们先证明

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \tag{4}$$

由

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(w)}{w-z}\,dw,$$

可知

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(w)}{w-z}\,dw.$$

由级数的一致收敛性，乘以 $\dfrac{1}{w-z}$ 及逐项积分可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw,$$

即得 (4) 式．

从 (4) 式不难推出 $f(z)$ 有微商 $f'(z)$，而且

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

因此 $f(z)$ 是解析的．

又由一致收敛性可知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(w)\frac{dw}{(w-z)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,dw = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z),$$

因此级数可以逐项微分，又经微分后的级数仍然在 D 内的任一闭区域上一致收敛，原因

是：如果 D' 是这样的一个闭域，则可以假定曲线 C 包含 D' 在其内部，命 δ 等于 D' 与 C 的最短距离，则对 D' 中任一点 z

$$\left|\sum_{n=N}^{N'} f_n'(z)\right| = \left|\sum_{n=N}^{N'} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}dw\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_N^{N'} f_n(w)\frac{dw}{(w-z)^2}\right| \leqslant \frac{\varepsilon l}{2\pi\delta^2}.$$

这儿 l 是曲线 C 的长度，ε 是函数

$$\left|\sum_N^{N'} f_n(w)\right|$$

在 C 上的最大值，这与 z 无关，而且当 $N, N' \to \infty$ 时趋于 0，故得结论.

再从 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ 出发，证明

$$f''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(z)$$

的一致收敛性，续行，得一般的结果.

附记 1. 与实变数不同之点是：对实变数函数的级数逐项求微分的条件中还要加上微分所得的级数一致收敛.

附记 2. 定理 1 的结论不能改为"在 C 上及 C 内解析"，例子是

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

在 $|z| \leqslant 1$ 上一致收敛，但在 $z=1$ 并非解析，其原因是

$$f'(z) = -\log(1-z)/z.$$

又

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

在 $|z| < 1$ 上并不一致收敛.

附记 3. 定理 1 中如果 C 不是封闭的，我们并不能推出逐项求微商的可能性(参考习题 2).

附记 4. 换成贯的形式：如果 $f_n(z)$ 是一在 C 上及 D 内的解析函数贯，并且在 C 上一致收敛，则 $f_n(z)$ 在 C 内一致收敛于一个解析函数 $f(z)$，而且 $f_n^{(\nu)}(z)$ 一致收敛于 $f^{(\nu)}(z)$.

习题 1. 在 $R(s) > 1$ 时，级数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

收敛，而且

$$\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\log^k n.$$

习题 2. 定出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nz}{n^2}$$

表一解析函数的区域．这函数在实线段上一致收敛，但其微商在 $x=(2m+1)\pi$ 的附近不一致收敛，而二阶微商不收敛。

习题 3. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n^2}$$

在实轴上一致收敛，但在 z 平面上没有一个域在其中这级数一致收敛。

习题 4. 用 Morera 定理推出定理 2 来．

提示：由

$$\int_C f(w)dw=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(w)dw=0$$

推出 $f(z)$ 的解析性来．

习题 5. 仍然有定理 1 或 2 的假定，并设 z_0 是一内点，把 $f_n(z)$ 在 z_0 展开为幂级数

$$f_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}(z-z_0)^m,$$

则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}\right)(z-z_0)^m.$$

（这是重级数定理命名之由来．）

§7. 由积分定义解析函数

定理 1. 命 $f(z,w)$ 表复变数 z,w 的连续函数，其活动范围是 z 在一域 D 之上，w 在一有界光滑曲线 C 上，对 C 的每一点 w，$f(z,w)$ 是 z 在 D 内的解析函数，则

$$F(z)=\int_C f(z,w)dw,$$

在 D 内定义一解析函数，而且

$$F'(z)=\int_C\frac{\partial f}{\partial z}dw,$$

高阶微商也有相仿的结果。

证．假定 C 是由

$$w=u+iv,\ u=u(t),\ v=v(t),\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1$$

所确定的，$u'(t)$，$v'(t)$ 是连续的．

在 D 内作一围道 Γ，$z=x+yi$，$x=x(s)$，$y=y(s)$，$s_0\leqslant s\leqslant s_1$，$x(s_0)=x(s_1)$，$y(s_0)=y(s_1)$，$x(s)$，$y'(s)$ 连续，则对 Γ 内任一点 ζ，常有

$$f(\zeta,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(z,w)}{z-\zeta}dz,$$

因此

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C dw\int_\Gamma\frac{f(z,w)}{z-\zeta}dz.$$

交换积分号(这是可能的,因为它可以表成实形式

$$\int_{t_0}^{t} dt \int_{s_0}^{s} [\varphi(s,t) + i\psi(s,t)] dt,$$

而 φ, ψ 是连续函数,故可交换积分号),得

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-\zeta}\int_{\Gamma} f(z,w)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)}{z-\zeta}dz.$$

即 $F(z)$ 适合于 Cauchy 积分公式. 由此可证 $F(z)$ 是解析的,而且可以在积分号下求微分.

例 1. 如果 $f(t)$ 在 (a, b) 中是一个连续函数,则在全平面上

$$F(z) = \int_a^b \cos zt f(t)\, dt, \quad G(z) = \int_a^b \sin zt f(t)\, dt$$

是 z 的解析函数.

函数

$$\int_a^b \frac{f(t)}{z-t}\, dt$$

是解析函数,但除去 z 是 (a, b) 间的实数的情况.

习题 1. 试用 Morera 定理证定理 1.

定理 2. 如果曲线 C 趋向无穷,但积分

$$\int_C f(z,w)dw, \quad 及 \quad \int_C \frac{\partial^\nu f(z,w)}{\partial z^\nu}dw, \quad \nu = 1, 2, \cdots$$

一致收敛,则以上的结果仍然正确.

证. 命 C_n 是 C 在圆 $|z| \leqslant n$ 内的部分,则

$$F_n(z) = \int_{C_n} f(z,w)dw,$$

则对任一 n, $F_n(z)$ 是解析函数,又当 $n\to\infty$, $F_n(z)$ 一致趋于 $F(z)$, 所以 $F(z)$ 也是解析的.最后

$$F'(z) = \lim_{m\to\infty} F_n'(z) = \lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{\partial f}{\partial z}dw = \int_C \frac{\partial f}{\partial z}dw.$$

同法可以处理 D 为无界域的情况,但必须保证收敛的一致性.

例 1. 函数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-w} w^{z-1} dw$$

当 $Rz > 0$ 时表一解析函数.

例 2. 在哪些范围内

$$\int_0^\infty e^{-zw^2}dw, \quad \int_0^\infty \frac{\sin w}{w^z}dw, \quad \int_0^\infty \frac{\cos w}{w^z}dw$$

表解析函数?

§ 8. Laurent 级 数

定理 1. 令 $f(z)$ 是在一个环形区域上单值的解析函数.这个环的边界是以 a 为中心、

以 R 及 $R'(R'<R)$ 为半径的圆 C 及 C' 所组成的，则 $f(z)$ 可以展开为 $z-a$ 的正，负方次的级数，这级数在环形区域内收敛。

证．令 z 表环内的一点，作积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

这积分先正向绕 C 一周，再沿一半径到内圆 C'，绕 C' 反向一周，而沿半径回到原出发点，由于函数是单值的，经过半径两次的积分消去，因此得：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

现在两积分都是正向的了。

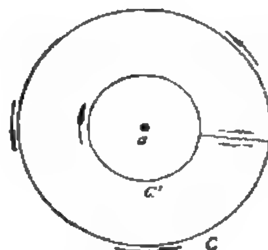


图 35

易见

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{w-z}dw=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

而

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw.$$

另一方面，当 $w\in C'$，则有一致收敛的展开式

$$\frac{1}{z-w}=\frac{1}{z-a}+\frac{w-a}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\cdots,$$

故

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}f(w)dw+\cdots$$

$$+\frac{1}{(z-a)^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)dw+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n},$$

此处

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)dw.$$

因此得到 Laurent 展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

此处

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw,\quad n=0,\pm1,\pm2\cdots,$$

这儿积分是沿环内任一绕圆心的围道进行的。

显而易见，$z-a$ 正幂各项所成的级数，当 $|z-a|<R$ 时收敛；而负幂各项所成的级数，当 $|z-a|>R'$ 时收敛。

与 Fourier 级数联合起来看，问题更为清楚（不妨假定 $a=0$）：

在单位圆周上有 Fourier 级数

$$\varphi(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_ne^{ni\theta}.$$

一般有,令

$$R = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}},$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

在圆 $|z| < R$ 内收敛,而

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} |a_{-n}|^{-\frac{1}{n}},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$$

在圆 $|z| > R'$ 外收敛. 如果 $R' < R$, 则在 $R' < |z| < R$ 中有解析函数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

例 1.

$$e^{\frac{1}{2}c\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(c\sin\theta - n\theta)} d\theta.$$

例 2. 当 $C > 0$ 时

$$e^{z+\frac{C^2}{2z^2}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

这儿

$$a_n = \frac{e^{-\frac{1}{2}C}}{2\pi c^n}\int_0^{2\pi} e^{C(\cos\theta+\cos^2\theta)+i(c\sin\theta(1-\cos\theta)-n\theta)} d\theta.$$

§9. 零 点, 极 点

定义 1. 如果 $f(z)$ 在 $z = a$ 解析,而展开式为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

如果 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$, 而 $a_m \neq 0$, 则 $z = a$ 称为 $f(z)$ 的一个 m 重零点; 1 重零点称为单零点.

定理 1. 零点是孤立的. 也就是,如果 a 是一解析函数 $f(z)(\neq 0)$ 的零点,而且在 a 的一邻域内 $f(z)$ 解析, 则有一 $\rho_1 > 0$ 存在, 在圆 $|z-a| < \rho_1$ 中不再有 $f(z)$ 的零点.

证. 不妨假定 $a = 0$, 假定

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R.$$

如果全部系数 $a_n = 0$，则 $f(z) \equiv 0$. 今假定 $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$，而 $a_k \neq 0$，则

$$f(z) = z^k(a_k + a_{k+1}z + \cdots), \quad (|z| < R).$$

令 $0 < \rho < R$，则级数当 $z = \rho$ 时收敛，因此 $a_n\rho^n$ 有界，即有K使 $|a_n|\rho^n < K$，因此

$$|f(z)| \geqslant |z|^k\left(|a_k| - \frac{K|z|}{\rho^{k+1}} - \frac{K|z|^2}{\rho^{k+2}} - \cdots\right)$$

$$= |z|^k\left(|a_k| - \frac{K|z|}{\rho^k(\rho - |z|)}\right).$$

当

$$0 < |z| < \rho_1 = \frac{|a_k|\rho^{k+1}}{K + |a_k|\rho^k}$$

时，$|f(z)| > 0$，故得所证.

由此推得:

(i) 如果 $f(z)$ 在D内的一小块域内或一个连续曲线段上为 0，则 $f(z) \equiv 0$.

(ii) 如果 $f(z)$ 在域D内解析，如果 $z_1, z_2, \cdots, z_n \cdots$ 是一点集以 z_0 为其极限点，而 z_0 是D的内点，如果 $f(z_i) = 0$，$i = 1, 2, \cdots$，则 $f(z) \equiv 0$.

(iii) 如果 $f(z)$，$g(z)$ 都在D内解析，而且

$$f(z_i) = g(z_i), \quad i = 1, 2, \cdots,$$

而 $z_i \to z_0$ 是D的内点，则 $f(z) \equiv g(z)$.

令 a 是 $f(z)$ 的 k 重零点，如此

$$f(z) = (z - a)^k g(z),$$

而且有 ρ，在 $|z - a| < \rho$ 中 $g(z)$ 无零值，因此 $\frac{1}{g(z)}$ 在 $|z - a| < \rho$ 内是解析的，因此

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - a)^k}[b_0 + b_1(z - a) + \cdots], \quad b_0 \neq 0.$$

定义. 如果 $h(z)$ 在 $z = a$ 的一个邻域解析，但 $z = a$ 除外，而且:

$$\lim_{z \to a}(z - a)^k h(z) = C \neq 0,$$

则 $z = a$ 称为 $h(z)$ 的 k 重极点. 1 重极点称为单极点. 因此，如果 $f(z)$ 以 a 为 k 重零点，则 $\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为其 k 重极点，反之亦真.

例 1. 函数 $\sin z$ 在 $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 处有一阶零点，而无其他零点.

由

$$|\sin(x + iy)| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} = 0,$$

可知必须

$$\sinh y = \sin x = 0, \text{ 即 } y = 0 \text{ 及 } x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots,$$

又

$$\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

所以在 $z = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \cdots$ 处有一阶零点，而无其他零点.

例 2. ctg z 与 csc z 在 $z=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 处有一阶极点，tg z 与 sec z 在 $z=\pm\frac{\pi}{2}$，$\pm\frac{3}{2}\pi, \cdots$ 处有一阶极点，而无其他极点.

习题 1. 求

$$\frac{1}{\sin z \pm \sin a}, \quad \frac{1}{\cos z \pm \cos a}$$

的极点.

习题 2. $\cos z^2$ 有一个二重极点及无穷个单极点.

习题 3. 如果 $f(z)$, $g(z)$ 都是 D 内的解析函数，而 $f(z)g(z) \equiv 0$，则 $f(z) \equiv 0$ 或 $g(z) \equiv 0$.

§10. 孤立奇点

假定 $f(z)$ 在一点 a 的邻域内解析，但 $z=a$ 除外，这样的点称为 $f(z)$ 的孤立奇点.

假定 $f(z)$ 是单值的，则由 §7 有 Laurent 展开式:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}, \quad 0<|z-a|<R.$$

有三种可能性:

(i) 所有的 b_n 都等于 0，如果我们定义 $f(a)=a_0$，则 $f(z)$ 在 $z=a$ 处解析.

(ii) 如果只有有限项 b_n 不等于 0，令 $b_m \neq 0$, $b_{m+1}=\cdots=b_n=\cdots=0$，则 $(z-a)^m f(z)$ 在该点邻域内解析，即 a 是 $f(z)$ 的一个 m 重极点. 而

$$\sum_{n=1}^{m} b_n(z-a)^{-n}$$

称为 $f(z)$ 在此极点 $z=a$ 的主要部分，显然有

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty, \quad \lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=b_m.$$

(iii) 有无穷个 $b_n \neq 0$，这样的 a 点称为 $f(z)$ 的本质奇点，而

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}$$

称为 $f(z)$ 在本质奇点 a 的主要部分. 关于本质奇点有以下的著名定理.

定理 1 (Weierstrass). 设 a 为 $f(z)$ 的本质奇点，给与任二正数 ρ, ε 及任一复数 C，在圆 $|z-a|<\rho$ 中有一 z 使

$$|f(z)-C|<\varepsilon.$$

换言之，给了任一复数 C，我们可以找到一个贯: $z_1, \cdots, z_n, \cdots$ 以 a 为极限，而且

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=C.$$

定理中并不排斥 $C=\infty$ 的情况，但结论改变为: 在圆 $|z-a|<\rho$ 有 z 使

$$|f(z)|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

证. 1) 我们先证明 $C=\infty$ 的情况，如果结论不正确，则有 $\rho>0$，及一正数 M，使得在 $|z-a|<\rho$ 时

$$|f(z)|\leqslant M.$$

以 a 为心在 $|z-a|<\rho$ 内作一圆 C'.

$$|b_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}(w-a)^{n-1}f(w)dw\right|\leqslant MR'^n.$$

这儿 R' 为 C' 的半径，R' 可以取为任意小的正数，因此对任一正整数 n，常有 $b_n=0$，这是与假定相违背的。

2) 考虑任一 C，如果在任一圆 $|z-a|=\rho$ 内，$f(z)-C$ 有零点，那就不必证明了，不然取 ρ 使 $f(z)-C$ 在 $|z-a|<\rho$ 中无零点，则在 $|z-a|<\rho$ 内除 $z=a$ 外，函数

$$\phi(z)=\frac{1}{f(z)-C}$$

是解析的，因此 $z=a$ 也是 $\phi(z)$ 的本质奇点. 因为，如果在 $z=a$，$\phi(z)$ 解析或为极点，则

$$f(z)=\frac{1}{\phi(z)}+C$$

最多可能有极点，而 $z=a$ 不能是 $f(z)$ 的本质奇点.

由 1) 可知在 $|z-a|<\rho$ 中有 z 使

$$|\phi(z)|>\frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$|f(z)-C|<\varepsilon.$$

Weierstrass 定理明确地刻划出极点与本质奇点的差异. 由此定理引出了一系列的研究工作，我们将在本册第十三、十四章中谈及.

例 1. 函数

$$e^{\frac{1}{z}},\quad \sin\frac{1}{z},\quad \cos\frac{1}{z}$$

都在 $z=0$ 处有孤立本质奇点.

例 2. $\csc\frac{1}{z}$ 在 $z=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 处有极点，而 0 是 $\frac{1}{n\pi}$ 的极限，因此 0 为非孤立奇点，我们有时也称之为本质奇点.

例 3. 考虑 $w=e^{\frac{1}{z}}$，如果 $w\neq0$，则

$$\frac{1}{z}=\log w+2\pi mi,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

即有无穷个 z 使 $e^{\frac{1}{z}}=w$，另一方面

$$\lim_{z\to+0}e^{-\frac{1}{z}}=0.$$

§ 11. 无穷远点的解析性

$g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ 在 $w=0$ 处的性质,定义为 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的性质.

例如: 函数

$$f(z)=\frac{1}{z^2},\quad \frac{1}{z^2+az+b}$$

以无穷远点为其二重零点,而

$$z^3+az+b$$

以无穷远点为其三重极点,又如 e^z 以无穷远点为其本质奇点.

定理 1. 包括无穷远点在内处处解析的函数是一常数.

证. 作 Laurent 表达式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^{-n}.$$

由于 $z=0$ 处解析,所以 $b_n=0$; 又由于在 $z=\infty$ 处解析,所以 $a_n=0(n>0)$.

定理 2. 除极点以外无其他奇点的函数是有理函数,并且反之亦真.

首先,说明只有有限个极点,不然,这些极点一定有一个极限点,有限或无穷,对这样的极限点,函数既不能解析,又不能是极点,与假定相违背.

假定

$$a,\ b,\ \cdots,\ k$$

是 $f(z)$ 的 $\alpha,\beta,\cdots,\kappa$ 重极点,则

$$g(z)=f(z)(z-a)^{\alpha}\cdots(z-k)^{\kappa}$$

是一个处处解析的函数,但∞可能除外,在∞处可能有一极点,故

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,$$

$$g\left(\frac{1}{w}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{w^n}.$$

由于 $g\left(\frac{1}{w}\right)$ 在 $w=0$ 只能有一极点,因此 $g(z)$ 是一多项式,因而 $f(z)$ 是二多项式之商,即有理函数.

逆定理部分是显然不待证明的.

但可以说明得具体些,如果一个有理函数表成为

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

这儿 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 是无公因子的二多项式,在有限平面上 $f(z)$ 的零点个数等于 $P(z)$ 的次数 n (l 重零点作为 l 个零点计算),$f(z)$ 的极点数等于 $Q(z)$ 的次数 m; ∞ 点是 $f(z)$ 的 $n-m$ 重极点(如果 $n>m$),或是 $m-n$ 重的零点(如果 $m>n$).

对复平面上每一点 a 可定义一个整数 $l(a)$

$$l(a)=\begin{cases} n, & \text{如果 } f(z) \text{ 以 } a \text{ 为 } n \text{ 重零点,} \\ 0, & \text{如果 } f(z)\neq 0,\infty, \\ -n, & \text{如果 } f(z) \text{ 以 } a \text{ 为 } n \text{ 重极点.} \end{cases}$$

则有理函数有次之性质

$$\Sigma l(a)=0,$$

这和号中 a 过所有的复数,包括∞在内。

定理 3 (Liouville). 一函数在平面的有限部分处处解析,而且一致有界,则它是一常数.

证. 无穷远点只可能是一孤立奇点,但有界,所以函数在无穷远点也是解析的,应用定理 1,立得证明.

极易推广为

定理 4. 如果在所有的有限点,$f(z)$ 是解析的,而且

$$f(z)=O(|z|^k),\quad |z|\to\infty,$$

则 $f(z)$ 是一个多项式,其次数 $\leqslant k$.

§ 12. Cauchy 不等式

定理 1. 令

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad |z|<R,$$

及 $M(r)$ 表 $|f(z)|$ 在圆周 $|z|=r(r<R)$ 上的最大值,则

$$|a_n|r^n\leqslant M(r),\quad n=0,1,2\cdots.$$

证. 由

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

可以推出

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}.$$

定理 2. 令 $A(r)$ 是 $\boldsymbol{R}f(z)$ 在圆周 $|z|=r(r<R)$ 上的最大值,则

$$|a_n|r^n\leqslant\max(4A(r),0)-2\boldsymbol{R}f(0),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

证. 令 $z=re^{i\theta}$, $a_n=\alpha_n+i\beta_n$; 及

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=u(r,\theta)+iv(r,\theta),$$

则

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)r^n.$$

这幂级数是一致收敛的,乘以 $\cos n\theta$ 与 $\sin n\theta$ 而求积分得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)\cos n\theta d\theta=\alpha_nr^n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)\sin n\theta d\theta = -\beta_n r^n,\quad n>0,$$

及

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)d\theta = \alpha_0,$$

故

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n)r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta,\quad n>0.$$

即得:

$$|a_n|r^n \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\theta)|d\theta.$$

因此得

$$|a_n|r^n + 2\alpha_0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[|u(r,\theta)| + u(r,\theta)]d\theta.$$

若 $u<0$，则 $u+|u|=0$，故 $A(r)<0$ 时，上式右边为 0．若 $A(r)\geqslant 0$，则右边

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2A(r)d\theta = 4A(r).$$

即得定理.

对于 $Rf(z)$ 的下界及 $If(z)$ 的上、下界的情形有相仿的定理.

定理 3. 在有限平面上，$f(z)$ 无处不解析，而 $A(r)$ 有界，则 $f(z)$ 是常数，如果 $A(r)<Ar^k$，则 $f(z)$ 是一不超过 k 次的多项式.

证．由定理 2 推得对任一 $n\geqslant 1$，$|a_n|r^n$ 有界 $(r\to\infty)$，因此 $f(z)$ 是一常数,其次由 $|a_n|r^n = O(|z|^k)$ 可以推得当 $n>k$ 时 $|a_n|=0$，即得所求.

定理 4. 在有限平面上调和的函数,而且有界,则是一常数.

§13. 解析拓展

我们现在全局性地来考虑解析函数,假定 $f(z)$ 在 z_0 附近解析,则可以展开为 $z-z_0$ 的幂级数.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{1}$$

假定这个幂级数收敛半径为 ρ，其意义是 z_0 与 $f(z)$ 的奇点的最近距离．理由是：(i) 显然在 $|z-z_0|<\rho$ 中 $f(z)$ 是解析的．(ii) 如果在边界 $|z-z_0|=\rho$ 上没有奇点，则有 $\varepsilon>0$ 存在,在圆 $|z-z_0|\leqslant\rho+\varepsilon$ 上，$f(z)$ 是解析的，由 Cauchy-Taylor 展式可知 (1) 在 $|z-z_0|<\rho+\varepsilon$ 中收敛,这与收敛半径的定义相违背.

一般地说,假定 $f(z)$ 在有界曲线 Γ 上每一点都是解析的．这曲线由 z_0 到 z 每一点都有一个收敛半径,这些圆覆盖了整个曲线 Γ，由 Heine-Borel 定理,其中有有限个圆覆盖了整条曲线 Γ，假定他们的圆心依次是

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n = z,$$

所对应的圆是

$$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n.$$

我们现在证明，如果在任一 C_i 内知道了 $f(z)$ 的幂级数展开式，则我们可用以下的方法求出在 C_j 内的幂级数展开式．实质上，由于这些圆内的点组成连通开集，故只需考虑 C_i 与 C_{i+1} 为相邻且有公共部分的情形即可．

两圆交点的距离令之为 2δ，两圆心的距离令之为 η，把 η 分为 $l=\left[\dfrac{\eta}{\frac{1}{2}\delta}\right]+1$份．每份长度小于 $\dfrac{\delta}{2}$，从圆心 z_i 到圆心 z_{i+1} 的直线上列上这些分点：

$$z_i, z_i', z_i'', \cdots, z_i^{(l)}=z_{i+1},$$

在 $z_i^{(j)}$ 有一幂级数展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)}(z-z_i^{(j)})^n, \tag{2}$$

它的收敛半径 $\geqslant \delta$，因此可以从 (2) 式计算出 $f^{(n)}(z_i^{(j+1)})$，因而得出在 $z_i^{(j+1)}$ 的幂级数展开，这展式的收敛半径 $\geqslant \delta$，因而包有 $z_i^{(j+2)}$ 等等．这样的计算方法，可以由 z_i 到 z_{i+1}，也可以从 z_0 到 z．这样的手续称为解析拓展．

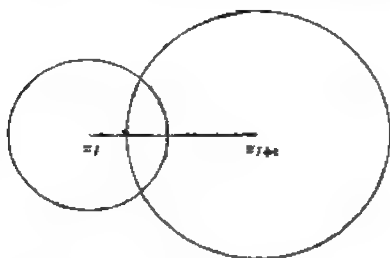


图 36

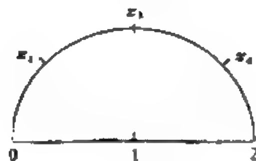


图 37

例如，级数

$$1+z+z^2+\cdots, \quad |z|<1$$

可以沿 $|z-1|=1$ 的上半圆弧解析拓展到 $z=2$，而得到 $z=2$的幂级数．具体办法：在 $|z|<1$ 内取 $z_2=1+e^{\frac{3\pi i}{4}}$ 算出 $z-z_2$的幂级数，且在 $|z-z_2|\leqslant 1$ 内收敛。再在此圆内取 $z_3=1+i$，算出 $z-z_3$ 的幂级数．再取 $z_4=1+e^{\frac{\pi i}{4}}$，而得 $z=2$ 的幂级数．

因此得出二级数

$$1+z+z^2+\cdots, \quad |z|<1,$$
$$-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-\cdots, \quad |z-2|<1.$$

并无一个公共的 z 的可以使两者都收敛，但他们可以用解析拓展法由其一得另一．实质上，他们在某一特定范围内都代表了函数

$$\frac{1}{1-z},$$

只需把它在 $z=2$ 处展为幂级数即知．

更一般地，我们有

定理． 设 D_1, D_2 为有公共部分D的两域，$f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 分别在 D_1, D_2 上单值解析，

且在 D 上相等. 则存在唯一的在 D_1+D_2 上的单值解析函数 $F(z)$，在 D_1 等于 $f_1(z)$；在 D_2 等于 $f_2(z)$.

证明可由解析函数只有孤立零点的定理推得.

§14. 多 值 函 数

用解析拓展法可能出现以下情况，由 z_0 到 z_1 循一条曲线得 $f_1(z_1)$，而循另一条曲线可能得 $f_2(z_1)$，$f_1(z_1)\neq f_2(z_1)$. 这样的函数称为多值函数. 我们把多值函数分成为若干分支，例如：$\sqrt{z}$ 在平面上沿负实轴由 0 到∞切开，在这样的区域中 $\sqrt{z}$ 可以区别为两个分支

$$\sqrt{r}\,e^{i\frac{1}{2}\theta},\quad -\sqrt{r}\,e^{i\frac{1}{2}\theta},\quad -\pi<\theta<\pi,$$

如果不切开，则绕 0 一周，就由前一分支变为后一分支了，具体可以用幂级数算出；沿单位圆各以 1，$e^{i\frac{\pi}{4}}$，$e^{i\frac{\pi}{2}}$，$e^{i\frac{3}{4}\pi}$，-1，$e^{i\frac{5}{4}\pi}$，$e^{i\frac{3}{2}\pi}$，$e^{i\frac{7}{4}\pi}$ 为中心逐步作幂级数，则 $e^{i\frac{7}{4}\pi}$ 为中心的圆包有 1，但这样的幂级数在 $z=1$ 已取另外一个分支的值了.

同样，$\log z$ 在如上法割开的区域有无穷多个分支

$$\log r+i(\theta+2n\pi),\quad -\pi<\theta<\pi,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots,$$

对应于一个整数 n，有一个分支. 我们还用 $\log z$ 表示未经切开平面上的函数. 当然，必须注意：这函数的意义是从何值出发，经过怎样的途径而得来的.

如果 α 是任一实数，而非有理的，则定义

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\log z}$$

也是一个有无穷分支的函数(在切开的平面上).

这样的奇点称为分支点(或歧点)，确切的定义是，如果循一充分小的圆绕 z_0 一周，$f(z)$ 的数值变了，则 z_0 称为函数 $f(z)$ 的歧点.

例 1. 函数 $z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}}$ 有两个歧点：$z=0$ 与 $z=1$. 它有六个分支：

$$e^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},\quad e^{i\frac{2\pi}{3}}z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},\quad e^{i\frac{4\pi}{3}}z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},$$

$$-z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},\quad -e^{i\frac{2\pi}{3}}z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}},\quad -e^{i\frac{4\pi}{3}}z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{3}}.$$

绕 $z=0$ 一转，上下互换，绕 $z=1$ 一转，同行轮换.

例 2. 函数

$$\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}$$

在 $|z|<1$ 中有一分支等于

$$\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdots\right),$$

在 $z=0$ 这函数是解析的，但其他各分支都以 0 为其极点.

如果所考虑的区域是单连通的，并且在其中每一点函数是解析的，则循任何一线由 z_0 到 z_1 解析拓展出来的函数是唯一的. 这点证明的大意是：任一路线可以连续演变为另一路线.

以往定义解析函数是指定在某一区域中，现在我们可以整体地来定义解析函数了，就

是从一某一区域的解析函数出发作它的解析拓展,及拓展的拓展等等. 这样,可能拓展到整个平面或除去若干点的全平面,也可能拓展成某一区域,而无法再拓展,后者称为存在区域,其边界称为函数的自然边界. 在多值函数的情况下,则得出多个分支.

因此,我们有极点、本质奇点、分支点,这些是孤立奇点,我们还可能有非孤立奇点.

例如

$$f(z)=1+z^2+z^4+\cdots+z^{2^n}+\cdots$$

以 $|z|=1$ 为其自然边界.

当 $z\to 1-0$ 时, $f(z)\to\infty$, 所以 $z=1$ 是奇点,由

$$f(z)=z^2+f(z^2)$$

可知,如果 α 是 $f(z)$ 的奇点,则 $\alpha^{\frac{1}{2}}$ 也一定是 $f(z)$ 的奇点,因此

$$z=1,\ -1,\ \pm i,\ \pm\sqrt{\pm i},\cdots$$

都是奇点,这些奇点在单位圆周上无处不稠密,因而此函数无法扩充到单位圆外去.

有时我们还用以下的

定义. 一个单值函数的解析拓展所用到一些圆的内点称为有则点或函数在该点有则,任何一个有则点的极限点,如果本身非有则,则称为奇点.

"有则"比"解析"要求得稍多些,例如函数

$$f(z)=\begin{cases}e^{\frac{1}{z}}, & \text{当 } |z|>0,\ |\arg z|\leqslant\frac{1}{4}\pi;\\ 0, & \text{其他各处.}\end{cases}$$

这函数在以前所讲过的定义下在 $z=0$ 解析,而且 $f'(0)=0$, 但考虑以 0、$1\pm\frac{1}{2}i$ 为顶点的三角形,这函数在这三角形的边上及其中无处不解析,但在 $z=0$ 处非有则. 但这样的区别并不重要,其理由是: 仅有若干造作的函数才有此区别(如上举之例).

§15. 奇点的位置

我们已经知道在幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{1}$$

的收敛圆上一定有一个奇点,而这幂级数的收敛半径又等于

$$R=\varliminf_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}}.$$

因此函数 $f(z)$ 有一个奇点 z_0, 它的绝对值等于 R.

圆上哪一点是奇点? 这是一个不易解答的问题. 具体些,假定 $R=1$, 是否 $z=1$ 是(1)的奇点? 在 $z=\frac{1}{2}$ 展开 $f(z)$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(z-\frac{1}{2}\right)^n.$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{-\frac{1}{n}} > \frac{1}{2},$$

则以 $\frac{1}{2}$ 为中心的收敛圆包有 1，即 $z=1$ 不是奇点．但如果

$$\lim_{n\to\infty} |b^n|^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

则解析拓展无法超越 $z=1$，而单位圆周上除 $z=1$ 外任一点与 $\frac{1}{2}$ 的距离都 $>\frac{1}{2}$，故 $z=1$ 是一奇点．因此得出一个判别条件：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

是 $z=1$ 为 $f(z)$ 的奇点的必要且充分条件．这个条件运用起来十分不简单．

我们考虑

$$F(w) = \frac{1}{1-w} f\left(\frac{w}{1-w}\right).$$

当 $\boldsymbol{R}w < \frac{1}{2}$ 时 $|w| < |1-w|$，因此 $F(w)$ 在 $\boldsymbol{R}w < \frac{1}{2}$ 时有则，在 $|w| < \frac{1}{2}$ 内展开成为：

$$F(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m w^m}{(1-w)^{m+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m+r)!}{m!\,r!} w^r$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} w^n \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} a_m.$$

令

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} a_m,$$

$z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点的必要且充分条件是 $F(w)$ 以 $w=\frac{1}{2}$ 为奇点，而且在 $|w|=\frac{1}{2}$ 上 $F(w)$ 仅有奇点 $w=\frac{1}{2}$，而其他的点都是有则的，所以充要条件也是

$$\lim_{n\to\infty} |b_n|^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

用这条判别式来判断奇点也不简单．

不难推得

定理 1. 如果 $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的收敛半径是 1，令

$$b_n(e^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} a_m e^{im\theta},$$

$z=e^{i\theta}$ 是奇点的必要充分条件是

$$\lim_{n\to\infty}|b_n(e^{i\theta})|^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

定理 2. 如果 $a_n\geqslant 0(n=0,1,2,\cdots)$，并且单位圆是收敛圆，则 $z=1$ 是奇点。

证．如果 $z=1$ 非奇点，则

$$\lim_{n\to\infty}|b_n(1)|^{-\frac{1}{n}}=r>\frac{1}{2}.$$

由于

$$|b_n(e^{i\theta})|\leqslant|b_n(1)|,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}|b_n(e^{i\theta})|^{-\frac{1}{n}}\geqslant\lim_{n\to\infty}|b_n(1)|^{-\frac{1}{n}}=r>\frac{1}{2},$$

即圆上处处解析，这与假定相违背．

定理 2 中的假定如果改为有充分大的 N，当 $n>N$ 时，常有 $a_n\geqslant 0$，定理照样成立．

附记．幂级数的收敛与发散并不能说明函数的有则与奇点。

例 1.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}=\log\frac{1}{1+z}$$

在 $z=1$有则，级数也收敛，在 $z=-1$ 是一奇点，级数也发散。

例 2.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z}$$

在点 $z=1$ 有则，而级数是发散的．

例 3.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}=\int_0^z\frac{1}{w}\log\frac{1}{1-w}\,dw$$

在奇点 $z=1$ 级数收敛。

第七章　留数及其应用于定积分的计算

§1. 留　　数

假定 $z=a$ 是 $f(z)$ 的一孤立奇点，而且有展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-a)^{-n}.$$

其中 b_1 有特殊重要性，称为函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 处的留数，由 Laurent 公式知

$$b_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(z)dz,$$

这儿 γ 是一个以 a 为中心的圆，其中不包有 $f(z)$ 的其他奇点.

如果 a 是一个单极点，则显然有

$$b_1=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

留数定理. 在一简单闭围道 C 上及其内，$f(z)$ 是一单值函数，除去有限个奇点 $z_1,\cdots,z_n$ 外，$f(z)$ 在 C 上及其内是解析的. 命 $f(z)$ 在 $z_1,\cdots,z_n$ 处的留数各为 R_1, $R_2,\cdots,R_n$，则

$$\int_C f(z)dz=2\pi i(R_1+R_2+\cdots+R_n).$$

证. 以 $z_1,\cdots,z_n$ 为圆心各作一小圆 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$，它们含在 C 内且互不重迭和相交，则 $f(z)$ 在 C 内及这些小圆外是解析的，因此

$$\int_C f(z)dz=\int_{\gamma_1}f(z)dz+\cdots+\int_{\gamma_n}f(z)dz=2\pi i(R_1+R_2+\cdots+R_n).$$

§2. 有理函数沿圆周的积分

算出

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{P(z)}{Q(z)}dz.$$

这儿 P 和 Q 都是 z 的多项式，且 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 无公因子，$Q(z)$ 在 $|z|=r$ 上无 0 点.

$$Q(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)^{m_i}.$$

用分项分数法把 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 写成为

$$R(z)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R_{i1}}{z-a_i}+\frac{R_{i2}}{(z-a_i)^2}+\cdots+\frac{R_{im}}{(z-a_i)^{m_i}}\right),$$

如果 $a_1, \cdots, a_m$ 在圆内，$a_{m+1}, \cdots, a_n$ 在圆外，则

$$I = \sum_{i=1}^{m} R_{i1}.$$

例 1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)} = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \frac{1}{z+2} = \frac{2}{3}.$$

又形如

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$$

的积分，其中 $R(x, y)$ 是有理函数，可以通过变换 $e^{i\theta}\to z$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(z+z^{-1}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(z-z^{-1}),$$

变为

$$\frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)dz,$$

而化为以上的形式.

例 2. 当 $0<p<1$ 时，积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{i(1-pz)(z-p)}.$$

$z=p$ 是单位圆内唯一的单极点，因此

$$\lim_{z\to p} \frac{z-p}{i(1-pz)(z-p)} = \frac{1}{i(1-p^2)},$$

因而得出

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+2p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

例 3. 当 $0<p<1$ 时

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1-2p\cos\theta+p^2} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz}\left(\frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{2}z^{-3}\right)^2 \frac{1}{(1-pz)(1-pz^{-1})} = 2\pi\sum R.$$

这儿 $\sum R$ 表单位圆内函数 $\dfrac{(z^6+1)^2}{4z^6(1-pz)(z-p)}$ 各奇点的留数之和. 在其中有两个极点 $z=0$, $z=p$. 后者是单极点，易知其留数等于 $\dfrac{(p^6+1)^2}{4p^6(1-p^2)}$. 在 $z=0$ 处，把该函数展为

$$-\frac{1}{4}\left(z^6+2+\frac{1}{z^6}\right)(1+pz+p^2z^2+\cdots)\left(1+\frac{z}{p}+\frac{z^2}{p^2}+\cdots\right)\frac{1}{p},$$

由此知留数为

$$\frac{1}{-4p}(p^{-5}+p^{-3}+p^{-1}+p+p^3+p^5).$$

故积分等于

$$2\pi\left[\frac{(p^6+1)^2}{4p^6(1-p^2)}-\frac{1-p^{12}}{4p^6(1-p^2)}\right]=\pi\frac{1+p^6}{1-p^2}.$$

§3. 由$-\infty$到$+\infty$的某种积分

现在计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Q(x)dx.$$

假定 $Q(z)$ 适合以下的条件：(i) 在上半平面与 x 轴上，除去有限个极点外，$Q(z)$ 解析，并且是单值的；(ii) 在 x 轴上无极点；(iii) 当 $z\to\infty$ 时，在 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 内，$zQ(z)$ 一致趋于 0；再假定 (iv)

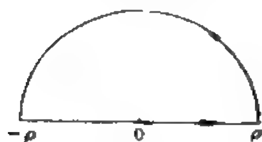


图 38

$$\int_0^{\infty}Q(x)dx,\ \int_{-\infty}^{0}Q(x)dx$$

收敛。

命 C 代表一围道由 $-\rho$ 沿 x 轴到 ρ，再沿以 0 为中心，ρ 为半径的上半平面上的圆弧 r 由 ρ 到 $-\rho$，当 ρ 足够大

$$\int_C Q(z)dz=2\pi i\sum R,$$

这儿 $\sum R$ 过函数 $Q(z)$ 在上半平面的奇点的留数之和，因此

$$\left|\int_{-\rho}^{\rho}Q(x)dx-2\pi i\sum R\right|=\left|\int_r Q(z)dz\right|,$$

由假定 (iii) 可取 ρ 使 $|z|=\rho$ 时

$$|zQ(z)|<\varepsilon,$$

如此则

$$\left|\int_r Q(z)dz\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\rho}\int_r|dz|=\varepsilon\pi.$$

故得

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}Q(z)dz=2\pi i\sum R.$$

由 (iv) 可知

$$\int_{-\infty}^{\infty}Q(x)dx=2\pi i\sum R.$$

注意如果 (iv) 不适合，而把积分理解为 $\lim\limits_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}$，也得上式。

例 1. 求证

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

由上公式

$$2\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi iR.$$

这个 R 是 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $x=i$ 处的留数，即

$$R = \lim_{z \to i} \frac{z - i}{1 + z^2} = \frac{1}{2i},$$

即得所求。

例 2. $(z^2 + 1)^{-3}$ 在上半平面有一极点 $z = i$，该处留数是 $-\frac{3}{16}i$，故

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3} = \frac{3}{8}\pi.$$

例 3. 如 $a > 0$，$b > 0$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(a + bx^2)^4} = \frac{\pi}{16a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{2}}}.$$

习题 1. 求 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$，$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}$，$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$ 之值。

习题 2. 求证 $\int_0^{\infty} \frac{\log^2 z}{1 + z^2} dz = \pi^3/8$.

习题 3. 求证 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \pi$，

并求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[(t - \alpha)^2 + \beta^2]^{n+1}}$，$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(At^2 + 2Bt + c)^{n+1}}$ 之值。

习题 4. 若 $0 < \operatorname{Re} a < 1$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$.

若 $0 < \operatorname{Re} a < 1$，$0 < \operatorname{Re} b < 1$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx = \pi(\operatorname{cth} a\pi - \operatorname{cth} b\pi).$$

§ 4. 某些包有正弦余弦的积分

如果 $Q(z)$ 仍然适合上节的条件 (i), (ii), (iii)，则对 $m > 0$，函数 $Q(z)e^{imz}$ 仍然适合这些条件，故

$$\int_0^{\infty} (Q(x)e^{imx} + Q(-x)e^{-imx})dx = 2\pi i \sum R'. \tag{1}$$

这儿 $\sum R'$ 是函数 $Q(z)e^{imz}$ 在上半平面留数之和，但在此情况下，我们可以减弱条件 (iii)，即这条件可以换为

(iii) 在 $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ 上，当 $|z| \to \infty$ 时，$Q(z)$ 一致趋于 0，由上节的证明可见，所需证明的是

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{\gamma} e^{imz} Q(z) dz = 0. \tag{2}$$

此处 γ 是上半平面的圆周 $z = \rho e^{i\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$，取 ρ 充分大使 $|Q(\rho e^{i\theta})| < \varepsilon$，如此则

$$\left| \int_{\gamma} e^{imz} Q(z) dz \right| = \left| \int_0^{\pi} e^{im(\rho\cos\theta + i\rho\sin\theta)} Q(\rho e^{i\theta}) i\rho e^{i\theta} d\theta \right|$$
$$< \int_0^{\pi} \varepsilon\rho e^{-m\rho\sin\theta} d\theta = 2\varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \rho e^{-m\rho\sin\theta} d\theta.$$

当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi$ 时，有 $\sin\theta\geqslant\frac{2\theta}{\pi}$，因此

$$\left|\int_{\Gamma} e^{imz}Q(z)dz\right| < 2\varepsilon\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho e^{-2m\rho\theta/\pi}d\theta=(2\varepsilon)\left(\frac{\pi}{2m}\right)[e^{-2m\rho/\pi}]_{\frac{\pi}{2}}^{0}<\frac{\varepsilon\pi}{m}.$$

即得 (2) 式，因此得出 (1) 式。

特别当 $Q(x)$ 是偶函数时，即 $Q(x)=Q(-x)$ 时，

$$\int_0^{\infty} Q(x)\cos mxdx=\pi i\sum R', \tag{3}$$

而当 $Q(x)$ 是奇函数时

$$\int_0^{\infty} Q(x)\sin mxdx=\pi\sum R'. \tag{4}$$

例 1. 当 $a>0$ 时

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{2a}e^{-a},$$

函数 $Q(z)e^{iz}=\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ 在 $z=ia$ 处的留数等于 $\frac{e^{-a}}{2ia}$，故由 (3) 得证。

例 2.

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

函数

$$Q(z)e^{iz}=\frac{e^{iz}}{z}$$

在上半平面无奇点，由公式 (4) 似乎应当得 0，但须注意在 x 轴上有奇点，故以上的结果不能乱用，作围道，由 $-\rho$ 到 $-\varepsilon$，在上半平面沿小圆 $|z|=\varepsilon$ 由 $-\varepsilon$ 到 ε，再由 ε 到 ρ，沿大圆 $|z|=\rho$ 由 ρ 到 $-\rho$，然后命 $\varepsilon\to 0$，求出结果，因此异于以上的一点是求

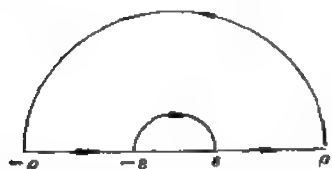


图 39

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon e^{i\theta}d\theta=-\pi i.$$

即得所求。

例 3. 当 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 时

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx=\pi(b-a).$$

这仍然有 $z=0$ 为其奇点。

例 4. 当 $\boldsymbol{R}z>0$，则

$$\int_0^{\infty}(e^{-t}-e^{-tz})\frac{dt}{t}=\log z.$$

由

$$\int_0^{\infty}(e^{-t}-e^{-tz})\frac{dt}{t}=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \rho\to\infty}}\left[\int_{\delta}^{\rho}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_{\delta}^{\rho}\frac{e^{-tz}}{t}dt\right]$$
$$=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \rho\to\infty}}\left[\int_{\delta}^{\rho}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_{\delta z}^{\rho z}\frac{e^{-u}}{u}du\right],$$

由于 e^{-t}/t 在以 $\delta, \delta z, \rho z, \rho$ 为顶点的四边形中是解析的，因此

$$\int_0^\infty (e^{-t}-e^{-tz})\frac{dt}{t}=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \rho\to\infty}}\left[\int_\delta^{\delta z}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_\rho^{\rho z}\frac{e^{-t}}{t}dt\right].$$

由于 $\boldsymbol{R}z>0$，所以

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_\rho^{\rho z}\frac{e^{-t}}{t}dt=0.$$

而

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^{\delta z}\frac{e^{-t}}{t}dt=\log z+\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^{\delta z}\log t e^{-t}dt$$

$$=\log z+\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^{\delta z}(t\log t-1)e^{-t}dt=\log z.$$

习题 1. 求 $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$，$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}dx$ 之值.

习题 2. 求证若 $c>0$，$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{a^z}{z^2}dz=\begin{cases}\log a & (a>1)\\ 0 & (0<a<1).\end{cases}$

习题 3. 求证 $\int_0^\pi \frac{x\sin x dx}{1+a^2-2a\cos x}=\frac{\pi}{a}\log(1+a)\quad(0<a<1)$,

$$\frac{\pi}{a}\log\frac{1+a}{a}\quad(a>1).$$

习题 4. 求证 $f(x)=\operatorname{sech}\left\{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$ 满足方程 $f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos xt dx$.

习题 5. 证明 若 $0<a<1$，$0<c<1$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{dt}{a^t\sin\pi t}=\frac{1}{\pi(1+a)}.$$

§5. 积分 $\int_0^\infty x^{a-1}Q(x)dx$

假定 $Q(z)$ 在实轴上解析，而且当 $x\to 0$ 及 $x\to\infty$ 时，$x^aQ(x)\to 0$.

作围道积分

$$\int_C(-z)^{a-1}Q(z)dz.$$

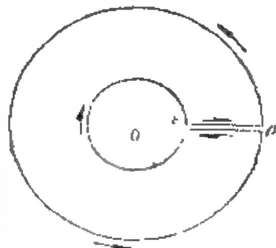


图 40

这儿围道如右图：先沿 x 轴由 ε 到 ρ，再由 ρ 绕原点沿圆一圈到 ρ，再由 ρ 到 ε，再绕原点沿圆一周到 ε.

现在必须注意由 ε 到 ρ 与由 ρ 到 ε 的积分不会消去，其原因是 $(-z)^{a-1}$ 不是单值函数，这函数的意义是

$$\exp[(a-1)\log(-z)],$$

把复平面沿 0 到 $+\infty$ 的正实轴剪开，取定如下分支：

$$\log(-z)=\log|z|+i\arg(-z),\quad -\pi\leqslant\arg(-z)\leqslant\pi.$$

在这样意义下，在 C 中 $(-z)^{a-1}$ 是单值的，假定 $Q(z)$ 在 C 中有有限个奇点，如此则

$$\int_C (-z)^{\alpha-1}Q(z)dz = 2\pi i \sum R.$$

此处 $\sum R$ 表示 $(-z)^{\alpha-1}Q(z)$ 在 C 中的所有留数之和。

在小圆上 $-z = \varepsilon e^{i\theta}$，积分变为

$$-\int_{\pi}^{-\pi} (-z)^{\alpha}Q(z)id\theta \to 0, \quad 当\ \varepsilon \to 0;$$

在大圆上，$-z = \rho e^{i\theta}$，积分

$$-\int_{-\pi}^{\pi} (-z)^{\alpha}Q(z)id\theta \to 0, \quad 当\ \rho \to \infty.$$

在从 ε 到 ρ 的线上 $-z = xe^{-\pi i}$，而在从 ρ 至 ε 的线上 $-z = xe^{\pi i}$，则 $(-z)^{\alpha-1}$ 各为

$$x^{\alpha-1}e^{\mp(\alpha-1)\pi i},$$

因此得出

$$\lim_{\substack{\rho\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{\rho} [x^{\alpha-1}e^{-(\alpha-1)\pi i}Q(x) - x^{\alpha-1}e^{(\alpha-1)\pi i}Q(x)]dx = 2\pi i \sum R.$$

即

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}Q(x)dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \sum R.$$

例 1. 当 $0 < \alpha < 1$ 时，

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

其理由是在 $z = -1$，

$$\frac{(-z)^{\alpha-1}}{1+z}$$

有一单极点，其留数等于 1.

例 2. 当 $0 < \alpha < 1$ 时

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}dx = \pi \operatorname{ctg} \alpha\pi.$$

这不能冒昧用以上的公式，原因是在积分道上有一奇点 $z = 1$，在 $z = 1$ 处作一半径为 r 的圆弧易得上式.

例 3. 如 $0 < z < 1$ 及 $-\pi < \alpha < \pi$，则

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}dt}{t + e^{i\alpha}} = \frac{\pi e^{i(z-1)\alpha}}{\sin \pi z}.$$

例 4. 如 $-1 < z < 3$，则

$$\int_0^{\infty} \frac{x^z}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi(1-z)}{4\cos \frac{1}{2}\pi z}.$$

例 5. 如 $-1 < p < 1$ 及 $-\pi < \lambda < \pi$，则

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-p}}{1 + 2x\cos\lambda + x^2}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda}.$$

§6. Γ 函 数

定义. 函数

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \tag{1}$$

称为 Γ 函数,当 $Rz>0$ 时,这是一个解析函数.

分部积分,则当 $Rz>1$

$$\Gamma(z)=[-t^{z-1}e^{-t}]_0^{\infty}+(z-1)\int_0^{\infty} t^{z-2}e^{-t}dt,$$

故有

$$\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1). \tag{2}$$

易见 $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}d=1$, 所以对任一自然数 n 常有

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

$Rz>0$, $Rw>0$ 时,

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w)&=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}at\int_0^{\infty} s^{w-1}e^{-s}ds=\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt\int_0^{\infty} t^{w}v^{w-1}e^{-tv}dv\\&=\int_0^{\infty} v^{w-1}dv\int_0^{\infty} t^{z+w-1}e^{-t(1+v)}dt^{*}=\int_0^{\infty} v^{w-1}dv\int_0^{\infty}\frac{u^{z+w-1}e^{-u}du}{(1+v)^{z+w}}\\&=\Gamma(z+w)\int_0^{\infty}\frac{v^{w-1}}{(1+v)^{z+w}}dv.\end{aligned}$$

命

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

(称为 *Beta* 函数),则得

$$B(z,w)=\int_0^{\infty}\frac{v^{w-1}}{(1+v)^{w+z}}dv\quad(Rz>0,\ Rw>0). \tag{3}$$

命 $v=\operatorname{tg}^2\theta$, 则

$$B(z,w)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2w-1}\theta\cos^{2z-1}\theta d\theta=\int_0^1\lambda^{z-1}(1-\lambda)^{w-1}d\lambda. \tag{4}$$

在 (3) 式中特别取 $w=1-z$, 则得

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^{\infty}\frac{v^{-z}}{1+v}dv,$$

由上节例 1 可知

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(1-z)\pi}=\frac{\pi}{\sin z\pi}.$$

特别取 $z=\frac{1}{2}$, 得 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi$, 再由 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$, 所以

---

* 积分号的互换由于一致收敛性.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \tag{5}$$

也就是

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\sqrt{\pi},$$

换变数得

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}, \tag{6}$$

由定义 (1) 可知

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}e^{-ax}dx=\frac{\Gamma(\rho)}{a^\rho}\quad(\rho>0,\ a>0).$$

如果我们能进行"代换 $x=it$" 则得

$$\int_0^\infty (it)^{\rho-1}e^{-ati}idt=\frac{\Gamma(\rho)}{a^\rho},$$

乘以

$$(-i)^\rho=e^{-\frac{1}{2}i\rho\pi},$$

再分虚实部分可得

$$\int_0^\infty t^{\rho-1}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,atdt=\frac{\Gamma(\rho)}{a^\rho}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,\frac{1}{2}\rho\pi. \tag{7}$$

这样的换变数法需要证明,我们考虑积分

$$\int_C z^{\rho-1}e^{-az}dz\quad(a>0,\ 0<\rho<1),$$

这儿 C 先沿实轴由 ε 到 ρ, 再沿 $|z|=\rho$ 经 90° 到 y 轴, 沿 y 轴由 $i\rho$ 到 $i\varepsilon$, 再沿小圆 $|z|=\varepsilon$ 由 $i\varepsilon$ 到 ε, 这积分等于 0, 不难证明, 沿 $|z|=\rho$ 的积分当 $\rho\to\infty$ 时趋于 0, 沿 $|z|=\varepsilon$ 的积分当 $\varepsilon\to 0$ 时趋于 0, 因此可以这样换变数.

在 (7) 式中,特别取 $\rho=\frac{1}{2}$, 则 $(a=1)$

$$\int_0^\infty \cos x^2dx=\int_0^\infty \sin x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

这是光学上出现的 Fresnel 积分.

习题 1. 求证 若 $b>a>-1$, 则

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos a\theta\cos b\theta d\theta=\frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a-1}\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+1\right)}.$$

习题 2. 求证 若 $a>0$, $-\frac{\pi}{2}<a\lambda<\frac{\pi}{2}$, 则

$$\int_0^\infty e^{-r^a\cos a\lambda}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,(r^a\sin a\lambda)dr=\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,\frac{\lambda}{a}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right).$$

习题 3. 若 α 不是偶数,则当 t 沿实数趋于∞,则

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\cos xt\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{t^{\alpha+1}}.$$

§7. Cauchy 主值

我们所定义的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$$

的一般意义是指极限

$$\lim_{\substack{\rho_1\to\infty\\ \rho_2\to\infty}} \int_{-\rho_2}^{\rho_1} f(t)\, dt$$

存在，如果这样的极限并不存在，但

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{\rho} f(t)\, dt$$

存在，则这积分称为有 Cauchy 主值，有时为了清楚起见，写成为

$$\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt.$$

当积分限为有界时，如果积分道路上有一点 ξ，$f(t)$ 在 ξ 没有定义，一般我们的积分是指

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0^+\\ \varepsilon_2\to 0^+}} \left(\int_a^{\xi-\varepsilon_1} + \int_{\xi+\varepsilon_2}^{b}\right),$$

但如果这样的极限不存在，而

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^{b}\right)$$

存在，这样的积分也称为在 ξ 取 Cauchy 主值的积分，也用

$$\Gamma \int_a^b f(t)\, dt$$

表之.

例 1. 如 $C > 0$，则

$$\frac{1}{2\pi i} \Gamma \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{a^z}{z}\, dz = \begin{cases} 1, & a > 1; \\ 0, & 0 < a < 1. \end{cases}$$

如 $a > 1$，即 $\log a > 0$，作围道由 $C - i\rho$ 到 $C + i\rho$，再沿以此为直径的左半圆由 $C + i\rho$ 到 $C - i\rho$，当 ρ 充分大时，它含有极点 $z = 0$，其留数 $= 1$. 不难证明，圆上的积分随半径增大而趋于 0.

如 $a < 1$，则向右作半圆，其中无奇点，因而积分等于 0.

例 2. 可以直接验证

$$\frac{1}{2\pi i} \Gamma \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - e^{i\theta}} = \frac{1}{2}.$$

例 3. 若 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| = 1$ 上满足 Lipschitz 条件，则

$$\frac{1}{2\pi i} \Gamma \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - e^{i\theta}}$$

存在

例 4. 若 $f(\zeta)$ 在 $|\zeta| = 1$ 上满足 Lipschitz 条件，则 Cauchy 型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

从 $|z|<1$ 中趋于 $|\zeta|=1$ 上一点 $e^{i\theta}$ 时，等于

$$\frac{1}{2\pi i}\Gamma\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-e^{i\theta}}+\frac{1}{2}f(e^{i\theta}),$$

从 $|z|>1$ 中趋于 $|\zeta|=1$ 上一点 $e^{i\theta}$ 时，等于

$$\frac{1}{2\pi i}\Gamma\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-e^{i\theta}}-\frac{1}{2}f(e^{i\theta}).$$

§8. 与动量问题有关的积分

问题. 如果 $f(x)$ 是连续函数，是否可以从

$$\int_0^\infty x^n f(x)dx=0,\quad n=0,1,2,\cdots$$

获得 $f(x)=0$。

回答是否定的；例子是

$$f(x)=e^{-x^{\frac{1}{4}}}\sin x^{\frac{1}{4}},$$

换变数 $x=t^4$，则得积分

$$4\int_0^\infty t^{4n+3}e^{-t}\sin t\,dt.$$

考虑积分

$$\int_C z^{4n+3}e^{(i-1)z}dz,$$

其围道沿实轴由 0 到 R，再沿 $|z|=R$ 由 R 到 iR 再沿虚轴回到原点，在圆周上

$$|e^{(i-1)z}|=e^{-R\cos\theta-R\sin\theta}\leqslant e^{-R},$$

故

$$\left|\int z^{4n+3}e^{(i-1)z}dz\right|\leqslant\frac{1}{2}\pi R^{4n+4}e^{-R}\to 0,$$

从而

$$\int_0^\infty x^{4n+3}e^{(i-1)x}dx-\int_0^\infty (iy)^{4n+3}e^{(i-1)iy}idy=0.$$

在后一积分换变数得

$$\int_0^\infty x^{4n+3}e^{-x}(e^{ix}-e^{-ix})dx=0.$$

即得所求.

§9. 极点与零点的个数

定理 1. 命 C 表一围道，除去 C 内有限个极点外，$f(z)$ 在 C 上及 C 内解析，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P.$$

这儿N是C内$f(z)$的零点个数（m重零点作m个零点计算），P是C内$f(z)$的极点数（m重的极点作m个极点计算）。

假定 $z=a$ 是一个m重零点，则

$$f(z)=(z-a)^m g(z),\ \ g(a)\neq 0.$$

因此

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)},$$

即 $f'(z)/f(z)$ 有一单极点，其留数是m，故$f(z)$的零点数恰好是 $f'(z)/f(z)$ 在这些点的留数之和N。

同法证明$f(z)$的极点数恰好是 $-\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在这些点的留数之和P，因此得定理。

同法可证

定理 2. 如果 $\phi(z)$ 在C上及C内是解析的，而且$f(z)$在C中有零点 $a_1,\cdots,a_m$（l重的零点写l次）；有极点 $b_1,\cdots,b_n$（l重的极点写l次），则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{\mu=1}^{m}\phi(a_\mu)-\sum_{\nu=1}^{n}\phi(b_\nu).$$

定理 3. 如果$f(z)$在C中是解析的，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N.$$

由于

$$\frac{d}{dz}\log f(z)=\frac{f'(z)}{f(z)},$$

这结果可以改述为

$$\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\Delta_c \log\{f(z)\}.$$

这儿Δ_c表示函数$\log f(z)$沿围道C的变化．开始时对数的值可以任意取，取定后，当z绕围道C一周时，变化就是Δ_c。又

$$\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg[f(z)],$$

这儿 $\log|f(z)|$ 是单值的，不变的，因此

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_c \arg f(z).$$

定理 4 (Rouché)．如果$f(z)$与$g(z)$都在围道C上及C内解析，而且沿C有

$$|g(z)|<|f(z)|,$$

则$f(z)$与$f(z)+g(z)$在C内有相同的零点数。

证．显而易见在C上$f(z)$与$f(z)+g(z)$都不等于0，令N及N'各为$f(z)$与$f(z)+g(z)$在C内的零点数，则

$$2\pi N=\Delta_c \arg f.$$

$$2\pi N'=\Delta_c \arg(f+g)=\Delta_c \arg f+\Delta_c \arg\left(1+\frac{g}{f}\right).$$

命

$$\varphi(z)=\frac{g(z)}{f(z)}.$$

待证

$$\frac{f(z)+g(z)}{f(z)}=1+\varphi(z)$$

的零点与极点个数相等．即待证

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{\varphi'}{1+\varphi}\,dz=0.$$

由于 $|\varphi|<1$，把上式展开成 φ 的幂级数，逐项积分，即得所证．

§10. 代数方程的根

定理 1（代数基本定理）．任一 n 次的多项式有 n 个根．

证．令

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots a_nz^n,\quad a_n\neq 0,$$

取

$$g(z)=-(a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}),$$

取一个以原点为中心，R 为半径的圆，当 R 充分大时

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1.$$

故由 Rouché 定理推得．

此定理也可由 Liouville 定理推出．如果 $f(z)$ 无根，则 $\frac{1}{f(z)}$ 解析，但当 $z\to\infty$ 时 $\frac{1}{f(z)}\to 0$，故它是一常数．因此 $f(z)=0$ 至少有一根，因而推出有 n 个根．

上节的结果可以用来研究方程式的复根．

例．方程式

$$z^4+z^3+4z^2+2z+3=0$$

的根分布在哪几个象限内？

首先证明这方程式无实根：由逐步凑方法

$$x^4+x^3+4x^2+2x+3=\left(x+\frac{1}{4}\right)^4+\frac{29}{8}x^2+\frac{31}{16}x+\left(3-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^4+\frac{29}{8}\left(x+\frac{31}{4\cdot 29}\right)^2+3-\frac{1}{4^4}-\frac{31^2}{8\cdot 4^2\cdot 29}>0$$

可证．

又此式无纯虚根，此乃显然，因为

$$y^4-iy^3-4y^2+2iy+3=0$$

无根．

围绕 $|z|=R$（R 充分大）过第一象限求

$$\Delta\arg(z^4+z^3+4z^2+2z+3).$$

沿实轴变化为 0，在圆弧 $z=Re^{i\theta}$ 上

$$\Delta \arg(z^4+\cdots)=\Delta \arg(R^4e^{4i\theta})+\Delta \arg[1+O(R^{-1})]=2\pi+O(R^{-1}).$$

及沿 y 轴

$$\arg(z^4+\cdots)=\operatorname{arctg}\frac{-y^3+2y}{y^4-4y^2+3},$$

当 $y=\sqrt{2}$ 时,分子为 0, 当 $y=\sqrt{3}$ 及 $y=1$ 时分母为 0; 当 y 从∞到 0 时有理函数 $(-y^3+2y)/(y^4-4y^2+3)$ 的变化如下:

$$y=\infty,\sqrt{3},\sqrt{2},1,0.$$

$$(-y^3+2y)/(y^4-4y^2+3)=0,-,\infty,+,0,-,\infty,+,0,$$

则沿 y 轴

$$\Delta \arg(z^4+\cdots)=-2\pi,$$

故第一象限上 $\arg(z^4+\cdots)$ 的变化等于 0.

即在第一象限内该方程式无根,由于共轭性在第四象限内也无根. 而在第二,第三两象限内各有二根.

习题. 求在各象限内,方程式

$$z^6+6z+10=0$$

的根数.

§11. 级 数 求 和

有时可用围道积分来求级数

$$\sum f(n)$$

之和.

假定 C 是一围道,包有点 $m, m+1, \cdots, n$, 而且 $f(z)$ 在 C 上及 C 内解析. 但可能有有限个单极点 $a_1, \cdots, a_k$ (与 $m, m+1, \cdots, n$ 不同),其留数各为 $r_1, \cdots, r_k$.

考虑

$$\int_C \pi\cdot f(z)\cdot \operatorname{ctg}\pi z dz.$$

函数 $\pi \operatorname{ctg}\pi z$ 在 C 内有单极点 $z=m, m+1, \cdots, n$, 而且留数都是 1, 故函数 $\pi f(z)\operatorname{ctg}\pi z$ 在这些点的留数各等于 $f(m), \cdots, f(n)$, 因此

$$\int_C \pi\cdot f(z)\cdot \operatorname{ctg}\pi z dz=2\pi i\{f(m)+f(m+1)+\cdots$$
$$+f(n)+r_1\pi \operatorname{ctg}\pi a_1+\cdots+r_k\pi \operatorname{ctg}\pi a_k\}.$$

例如: $f(z)$ 是有理函数, 整数非其极点, 而且当 $z\to\infty$ 时, $f(z)=O(|z|^{-1})$. 取 C 为顶点在 $\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pm1\pm i)$ 的正方形. 不难证明当 $n\to\infty$ 时沿围道 C 的积分趋于 0, 即得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=-n}^{n} f(m)=-\pi(r_1 \operatorname{ctg}\pi a_1+\cdots+r_k \operatorname{ctg}\pi a_k).$$

取

$$f(z)=\frac{1}{(a+z)^2},$$

它在 $z=-a$ 有一二重极点,由 Taylor 展式,

$$\operatorname{ctg}\pi z=\operatorname{ctg}(-\pi a)+\pi(z+a)\{-\csc^2(-\pi a)\}+\cdots,$$

故 $\operatorname{ctg}\pi z/(z+a)^2$ 在 $z=-a$ 处的留数等于 $-\pi\csc^2\pi a$. 因此

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^2}=\pi^2\csc^2\pi a.$$

§12. 常系数线性微分方程

令

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=P(z)$$

表一 n 次多项式. 考虑积分

$$u(t)=\int_C\frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}dz.$$

这儿 t 是实变数, $f(z)$ 是一次数不高于 n 的多项式, C 是一有界围道不经过 $P(z)$ 的零点.

在积分号下求微分得:

$$\frac{d^lu}{dt^l}=\int_C\frac{e^{tz}f(z)z^l}{P(z)}dz.$$

因此由 Cauchy 定理

$$\sum_{l=0}^{n}a_l\frac{d^lu}{dt^l}=\int_C e^{tz}f(z)dz=0.$$

即 $u(t)$ 是线性微分方程

$$\sum_{l=0}^{n}a_l\frac{d^lu}{dt^l}=0 \tag{1}$$

的解答.

由于 $f(z)$ 是任意的 $n-1$ 次多项式,其中有 n 个系数,因此可以盼望这个方法给出线性方程(1)的最一般的解.

取 C 包有 $P(z)$ 所有的零点,我们可以用求留数法得出解答来,例如 $P(z)$ 的根各不相等,它们是: $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 则

$$\int_C\frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\lim_{z\to\alpha_j}\frac{e^{tz}f(z)}{P(z)}(z-\alpha_j)=2\pi i\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{\alpha_jt}f(\alpha_j)}{P'(\alpha_j)}.$$

可以取 $f(z)$ 使 $2\pi i\dfrac{f(\alpha_j)}{P'(\alpha_j)}$ 是已给的任意常数 C_j, 因此得

$$u(t)=\sum_{j=1}^{n}C_je^{\alpha_jt}.$$

如果 $z=\alpha_s$ 是 $P(z)$ 的 r 重根,则对应的积分函数有一 r 重的极点. 此点的留数可以由

$$e^{tz}f(z) = e^{t\alpha_\nu}\cdot e^{t(z-\alpha_\nu)}f(z)$$
的 $z-a_\nu$ 的幂级数中 $(z-\alpha_\nu)^{r-1}$ 的系数来决定，即

$$e^{t\alpha_\nu}\left(\sum_{l=0}^{r-1}\frac{t^l}{l!}d_{r-1-l}\right).$$

这儿

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l(z-\alpha_\nu)^l.$$

因此推得

$$e^{t\alpha_\nu},\ te^{t\alpha_\nu},\ \cdots,\ t^{r-1}e^{t\alpha_\nu}$$

是解.

习题. 用此法考虑常系数的一阶线性微分方程组.

§ 13. Bürmann, Lagrange 公式

本节的目的在于按一给定的函数的幂展成的级数来表达他一函数. 为了简单起见，有些收敛性问题，我们将不加证明.

令

$$w = \varphi(z) \tag{1}$$

表一单叶变换，把 z 平面上一围道 γ 及其中之点一一对应地变为 w 平面上的一个围道 s 及其中之点. 假定 $\varphi(z)$ 及在 γ 上及 γ 内解析，假定 a 是 γ 的内点，而 $b=\varphi(a)$ 是 s 的内点，当 $z=\zeta$ 过围道 γ 时，$w=\eta$ 过 s.

由于 (1) 是单叶的，所以在 γ 内 $\varphi'(z)\neq 0$，现假定 $\varphi'(z)$ 在 γ 上亦不等于 0，并假设 $f(z)$ 是在 γ 上及 γ 内解析的函数，则 $f'(z)/\varphi'(z)$ 在 γ 上及 γ 内是解析函数，作为 w 的函数看在 s 上及 s 内也是 w 的解析函数. 因此由 Cauchy 积分公式

$$\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}\frac{d\eta}{\eta-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}d\zeta, \tag{2}$$

展开

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(\zeta)-b}\left(1-\frac{\varphi(z)-b}{\varphi(\zeta)-b}\right)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\varphi(z)-b)^m}{(\varphi(\zeta)-b)^{m+1}}.$$

(关于这级数的收敛性这儿不加讨论.)因此

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(\zeta)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\varphi(z)-b]^m}{[\varphi(\zeta)-b]^{m+1}}d\zeta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}[\varphi(z)-b]^m\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(\zeta)\frac{d\zeta}{[\varphi(\zeta)-b]^{m+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}[\varphi(z)-b]^m\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}\left[\frac{\zeta-a}{\varphi(\zeta)-b}\right]^{m+1}d\zeta.\end{aligned} \tag{3}$$

由于 $\varphi(z)$ 是单叶的，因此 $\varphi(\zeta)=b$ 除去 $\zeta=a$ 外无它根，即 $\dfrac{\zeta-a}{\varphi(\zeta)-b}$ 在 γ 中解析，

把

$$f'(z)[\psi(z)]^{m+1},\quad \left(\psi(z)=\frac{z-a}{\varphi(z)-b}\right)$$

展开成为 $z-a$ 的幂级数，其 $(z-a)^m$ 的系数等于

$$\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}[f'(z)(\psi(z))^{m+1}]_{z=a},$$

简书之为

$$\frac{1}{m!}\frac{d^m}{da^m}[f'(a)(\psi(a))^{m+1}].$$

由 (3) 得出

$$f'(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{d^m}{da^m}[f'(a)(\psi(a))^{m+1}][\varphi(z)-b]^m\varphi'(z).$$

由 a 到 z 求积分得 Bürmann 公式

$$f(z)=f(a)+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}\frac{d^m}{da^m}[f'(a)(\psi(a))^{m+1}][\varphi(z)-b]^{m+1}. \tag{4}$$

取特例

$$w=\frac{z-a}{\tau(z)},\quad b=0,$$

则

$$\psi(z)=\tau(z).$$

由 (4) 得 Lagrange 公式

$$f(z)=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\{f'(a)[\tau(a)]^n\}. \tag{5}$$

(能否由 (5) 推出 (4) 来?) 读者试自己证明: (5) 式成立的条件是 $\frac{z-a}{\tau(z)}$ 在一包有 a 点附近解析，且在 a 点的导数不为 0，则任一在 a 点附近的解析的函数 $f(z)$ 可以在 a 的充分小邻域内表为 (5) 式.

例 1. 方程式

$$z-a-\frac{w}{z}=0,\quad a\neq 0$$

得出的展开式

$$z=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!a^{2n-1}}w^n.$$

这公式说明二次方程

$$z^2-az-w=0$$

的解 z 可以由此方程的系数，特别是常数项的幂级数表之. 这公式并不新鲜: 解二次方程得出

$$z=\frac{a}{2}\left[1\pm\left(1+\frac{4w}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

由二项式定理，展开上式即得. 因此直接得出的收敛范围是

$$\left|\frac{4w}{a^2}\right| < 1.$$

例 2. 如果 z 是

$$z = 1 + wz^2$$

的一根，当 $w \to 0$，它 $\to 1$，则 $|w| < \frac{1}{4}$ 时，

$$z^n = 1 + nw + \frac{n(n+3)}{2!}w^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{3!}w^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4!}w^4 + \frac{n(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)}{5!}w^5 + \cdots.$$

例 3. 如果 z 是

$$z = 1 + wz^\alpha$$

的一根，且当 $w \to 0$，它 $\to 1$，则

$$\log z = w + \frac{2\alpha - 1}{2}w^2 + \frac{(3\alpha-1)(3\alpha-2)}{2 \cdot 3}w^3 + \cdots,$$

并且当

$$|w| < |(\alpha-1)^{\alpha-1} \cdot \alpha^{-\alpha}|$$

时此式成立.

附记. Kepler 方程

$$z - a = w \sin z$$

就是 Lagrange 方程的特例. Kepler 方程在天文上有用，本节的方法提供了解 Kepler 方程的具体解法(参阅一卷一分册第六章 §1).

§14. Poisson-Jensen 公式

令 $f(z)$ 表一函数，在圆 $|z| \leqslant R$ 内有 m 个零点 $a_1, \cdots, a_m$ 及 n 个极点 $b_1, \cdots b_n$，除这些极点外在 $|z| \leqslant R$ 上解析 (p 重零点或极点写 p 次)，则有如下的

Poisson-Jensen 公式

$$\log|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2}\log|f(Re^{i\phi})|d\phi - \sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_\mu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta} - a_\mu)}\right| + \sum_{\nu=1}^{n}\log\left|\frac{R^2 - \bar{b}_\nu e^{i\theta}}{R(re^{i\theta} - b_\nu)}\right|. \qquad (1)$$

证.

1) 如果 $f(z)$ 无零点与极点，则 $\log f(z)$ 是 $|z| \leqslant R$ 上的解析函数. 公式(1)就是 Poisson 公式.

2) 命

$$g(z) = f(z)\frac{\prod \frac{R(z-b_\nu)}{R^2 - \bar{b}_\nu z}}{\prod \frac{R(z-a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu z}},$$

在 $|z|\leqslant R$ 上 $g(z)$ 既无零点又无极点. 在 $|z|=R$ 上除有限个点外

$$|g(z)|=|f(z)|.$$

由 1) 可知

$$\log|g(re^{i\theta})|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\log|g(Re^{i\phi})|d\phi,$$

即得

$$\log|f(re^{i\theta})|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}\log|f(Re^{i\phi})|d\phi$$

$$-\sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{R^2-\bar{a}_\mu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-a_\mu)}\right|+\sum_{\nu=1}^{n}\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu re^{i\theta}}{R(re^{i\theta}-b_\nu)}\right|.$$

当 $a_\mu\neq 0$, $b_\nu\neq 0$ 时,命 $r=0$, 即得

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi-\sum_{\mu=1}^{m}\log\left|\frac{R}{a_\mu}\right|+\sum_{\nu=1}^{n}\log\left|\frac{R}{b_\nu}\right|,$$

即

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi=\log\frac{|f(0)|\left|\prod_{\nu=1}^{n}b_\nu\right|}{\left|\prod_{\mu=1}^{m}a_\mu\right|}R^{m-n}.$$

第八章　最大模原理与函数族

§1. 最大模原理

在第四章中已经提起过最大模原理：在一域D内如果$f(z)$是单值的有则的，则它的绝对值，它的实部，它的虚部都不能在D的内点取最大值．唯一的例外是$f(z)$常数．

我们先减弱一些条件；即使$f(z)$非单值的，但$|f(z)|$是单值的，仍然是在D的内点$|f(z)|$不能取最大值（除$f(z)$等于常数外）．

这样的推广是无须乎证明的，因为对每一分支来说，$f(z)$是一单值函数，以上的定理是正确的，由于$|f(z)|$是单值的，所以得出这一推广的结论来．

命$M(r)$表示$|f(z)|$在圆周$|z|=r$上的最大值，由最大模原理立刻得出$M(r)$是递增函数，并且除$f(z)$是一常数外，$M(r)$是严格的增函数，即如果$r<r'$，则$M(r)<M(r')$．

命$A(r)$表$\mathbf{R}f(z)$在圆周$|z|=r$上的最大值，则$A(r)$也是严格增函数．

关于$M(r)$与$A(r)$之间有以下的不等式．

定理 1　(Borel, Carathéodory)．假定$f(z)$在圆$|z|\leqslant R$内有则，则当$0<r<R$时有

$$M(r)\leqslant\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

当$f(z)$是常数时，此式显然正确．假定$f(z)$非常数，并且假定$f(0)=0$，由$A(r)$的递增性可知$A(R)>A(0)=0$．

命

$$\phi(z)=\frac{f(z)}{2A(R)-f(z)},$$

在$|z|\leqslant r$中，$\phi(z)$是有则的，因为其分母的实数部分$\neq 0$．命$f(z)=u+iv$，则

$$|\phi(z)|^2=\frac{u^2+v^2}{(2A(R)-u)^2+v^2}\leqslant 1.$$

（由于$-2A(R)+u\leqslant u\leqslant 2A(R)-u$.）由 Schwarz 引理

$$|\phi(z)|\leqslant\frac{r}{R},$$

因此

$$|f(z)|=\left|\frac{2A(R)\phi(z)}{1+\phi(z)}\right|\leqslant\frac{2A(R)r}{R-r},$$

即得所证．

如果$f(0)\neq 0$，则把上结果用到$f(z)-f(0)$上，得

$$|f(z)-f(0)|\leqslant\frac{2r}{R-r}\max_{|z|=R}\mathbf{R}(f(z)-f(0))\leqslant\frac{2r}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\},$$

即得所证.

立刻推得

定理 2. 如果 $A(R) \geqslant 0$，则

$$M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\}.$$

定理 3. 如果 $A(R) \geqslant 0$，则

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{2^{n+2}n!R}{(R-r)^{n+1}}(A(R)+|f(0)|).$$

证. 由

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw,$$

此 c 是一以 $w=z$ 为心，$\delta = \frac{1}{2}(R-r)$ 为半径的圆,在此圆上

$$|w| \leqslant r + \frac{1}{2}(R-r) = \frac{1}{2}(R+r),$$

故由 Carathéodory 不等式

$$\max|f(w)| \leqslant \frac{R+\frac{1}{2}(R+r)}{R-\frac{1}{2}(R+r)}(A(R)+|f(0)|)$$

$$< \frac{4R}{R-r}(A(R)+|f(0)|),$$

因此

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!}{\delta^n}\frac{4R}{R-r}\{A(R)+|f(0)|\} = \frac{2^{n+2}n!R}{(R-r)^{n+1}}\{A(R)+|f(0)|\}.$$

§2. Phragmen-Lindelöf 定理

定理 1. 假定 (i) $f(z)$ 在一有界域 D 上有则，而且 $|f(z)|$ 是单值的，(ii) 对任一 $\varepsilon>0$，在每一周界点 ζ 的某一内邻域内

$$|f(z)| < M + \varepsilon, \tag{1}$$

则对每一内点常有 $|f(z)| \leqslant M$，而且如果有内点取等号,则 $f(z)$ 是常数.

证. 命 G 表示 $|f(z)|$ 在 D 内的上确界(并不排斥 $G=\infty$)，由上确界的定义，有一批内点 z_n 使 $|f(z_n)| \to G$，命 z_0 是其一极限点,并且不妨假定 $z_k \to z_0$.

1) 假定 z_0 是内点,则由 $|f(z)|$ 的连续性可知

$$\lim_{k\to\infty}|f(z_k)| = |f(z_0)| = G,$$

即 $|f(z)|$ 在一内点取最大值,即 $f(z)$ 是一常数.

2) 假定 z_0 是边界点,由 (1)，有一正方形 q，以 z_0 为中心,使 z 在 q 与 D 的公共部分

$$|f(z)| < M + \varepsilon.$$

因为当 k 充分大时，z_k 进入 q，因此 $G \leqslant M+\varepsilon$，由于 ε 是任意小,所以 $G \leqslant M$ 即得

定理的前一部分．取等号的情况就是最大模原理的推论．

§3. Hadamard 三圆定理

定理 1. 命 $f(z)$ 是一解析函数，在环 $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$ 内有则，则 $\log M(r)$ 在 $r_1 < r < r_3$ 中是 $\log r$ 的连续凸函数，更明确些，当 $r_1 < r_2 < r_3$ 时，我们有

$$\log M(r_2) \leqslant \frac{\log r_3 - \log r_2}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1} \log M(r_3).$$

把 $M(r_i)$ 写成为 M_i，则

$$M_2^{\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right)} \leqslant M_1^{\log\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} M_3^{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

证．命

$$\phi(z) = z^\lambda f(z),$$

这儿 λ 是一常数，以后再取定．在环中 $\phi(z)$ 是有则的，而且 $|\phi(z)|$ 是单值的．由最大模原理，

$$|\phi(z)| \leqslant \max\,(r_1^\lambda M_1,\ r_3^\lambda M_3),$$

特别在 $|z| = r_2$ 上，

$$|f(z)| \leqslant \max\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\lambda M_1,\ \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^\lambda M_3\right],$$

取

$$\lambda = -\{\log M_3/M_1\}/\log(r_3/r_1),$$

即得所证．(读者试答，为什么取此 λ 值?)

注意．仅当 $\phi(z)$ 是常数时取等号，即 $f(z) = cz^\mu$ 时，取等号．

§4. 关于 $|f(z)|$ 均值的 Hardy 定理

定理 1. 假定 $f(z)$ 在圆 $|z| < R$ 内有则，命

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

则 $I_2(r)$ 是 r 的严格增函数，而且 $\log I_2(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数 $(0 < r < R)$．

证．命

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

则

$$I_2(r) = \sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n}.$$

除 $f(z) = a_0$ 以外，$I_2(r)$ 显然是严格递增函数，命 $u = \log r$，则

$$\frac{d^2}{du^2} \log I_2 = \frac{I_2 I_2'' - (I_2')^2}{I_2^2},$$

这儿 I_2', I_2'' 表示 I_2 对 u 的微商，由 Schwarz 不等式

$$I_2'^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2(2n)e^{2nu}\right)^2 \leqslant (\Sigma|a_n|^2e^{2nu})(\Sigma|a_n|^2 4n^2e^{2nu}) = I_2 I_2'',$$

即得

$$\frac{d^2}{du^2}\log I_2 \geqslant 0.$$

即得所证.(读者试答,何时取等号?)

定理 2. 假定 $f(z)$ 在圆 $|z| < R$ 内有则,命

$$I_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|d\theta,$$

则 $I_1(r)$ 是 r 的严格增函数, $\log I_1(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数 $(0 < r < R)$.

证. 命 $0 < r_1 < r_2 < r_3$, 且定义

$$k(\theta) = |f(r_2e^{i\theta})|/f(r_2e^{i\theta}),$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})k(\theta)d\theta,$$

$F(z)$ 在 $|z| \leqslant r_3$ 上有则,而且在此圆上一点 $z = r_3e^{i\lambda}$ 取最大值,故

$$I_1(r_2) = F(r_2) \leqslant |F(r_3e^{i\lambda})| \leqslant I_1(r_3),$$

取 α 使

$$r_1^\alpha I_1(r_1) = r_3^\alpha I_1(r_3),$$

因此

$$r_2^\alpha I_1(r_2) = r_2^\alpha F(r_2) \leqslant \max_{r_1\leqslant|z|\leqslant r_3} |z^\alpha F(z)| \leqslant r_1^\alpha I_1(r_1) = r_3^\alpha I_1(r_3).$$

因此,如三圆定理的证法,立得本定理.

附记 1. 定理 1 是定理 2 的容易推论.

附记 2. 当 $f(z) = \lambda z^\alpha$ 时取等号.

附记 3. 如果 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内无零点, 则 $(f(re^{i\theta}))^p$ 在 $|z| < R$ 内也是有则的,因此由定理 2 推得

$$I_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta, \quad p > 0$$

是 r 的增函数, $\log I_p(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数 $(0 < r < R)$. 以下几节的目的在于证明,在有零点的条件下这些性质也正确.

§5. 引　　理

定理 1. 若干个解析函数的绝对值的和, 也是在边界上取最大值. 更确切些, 命 $f_1(z), \cdots, f_n(z)$ 在 D 内及其周界上是有则的,是单值的,则连续函数

$$\varphi(z) = |f_1(z)| + \cdots + |f_n(z)|$$

仅在 D 的边界上取最大值. 如果在 D 内部取最大值,则 $f_\nu(z)$ 全是常数.

证. 命 z_0 是 D 一内点,则

$$|f_\nu(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_\nu(z_0 + re^{i\theta})|d\theta, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

因此

$$\varphi(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

如果有一 f_ν 取不等式，则 φ 取不等式，与最大值原理同法得本定理。

定理 2. 假定 $f_1(z), \cdots, f_n(z)$ 在 D 内及其周界上有则，而且是单值的。假定 $p_1, \cdots, p_n$ 是正数，则连续函数

$$\varphi(z) = |f_1(z)|^{p_1} + \cdots + |f_n(z)|^{p_n}$$

仅在 D 的边界上取最大值。如在 D 内取最大值，则 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 全是常数。

证. 假定 z_0 是一内点，可取 r 使圆 $|z - z_0| \leqslant r$ 完全在 D 内，在此圆内除 z_0 以外，$f_1, \cdots, f_n$ 无零点。假定 $f_\nu(z_0) = 0$ 而 $f_\mu(z_0) \neq 0$，则 $(f_\mu(z_0))^{p_\mu}$ 在 $|z - z_0| \leqslant r$ 内有则。由定理 1 可知在圆周 $|z - z_0| = r$ 上有一点 z_1 使

$$\sum_\mu |f_\mu(z_1)|^{p_\mu} \geqslant \sum_\mu |f_\mu(z_0)|^{p_\mu},$$

并且显然有

$$\sum_\nu |f_\nu(z_1)|^{p_\nu} \geqslant 0 = \sum_\nu |f_\nu(z_0)|^{p_\nu}.$$

因此 $\varphi(z_1) \geqslant \varphi(z_0)$。更确切些，在 $f_\mu(z)$ 与 $f_\nu(z)$ 中有一个不恒为常数，则 $\varphi(z_1) > \varphi(z_0)$。

D 及其边界是一闭集合，一定有一点，在此点连续函数 $\varphi(z)$ 取最大值，此点不能是内点(除 $f_\nu(z)$ 都是常数外)。

附记. 如果我们仅假设 $f_m(z)$ 有则，$|f_m(z)|$ 是单值，定理仍然正确。

§6. 一般均值定理

定理 1 (Pólya-Szegö). 假定 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内有则，$p > 0$，而且

$$I_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta, \quad r < R,$$

则 $I_p(r)$ 是 r 的增函数，$\log I_p(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数。

证. 1) 增函数. 命 $\omega_\nu = e^{2\pi i\nu/n}$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$, 命 $0 \leqslant r_1 < r_2 < R$，由上节定理 2 可知在圆周 $|z| = r_2$ 上有一点 $r_2e^{i\theta_2}$，使

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |f(r_1\omega_\nu)|^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |f(r_2\omega_\nu e^{i\theta_2})|^p,$$

当 $n \to \infty$ 时，则

$$I_p(r_1) \leqslant I_p(r_2).$$

2) 凸性. 命 $0 < r_1 < r_2 < r_3 < R$, α 实数，则函数

$$z^{\frac{\alpha}{p}}f(\omega_1 z), \; z^{\frac{\alpha}{p}}f(\omega_2 z), \; \cdots, \; z^{\frac{\alpha}{p}}f(\omega_n z)$$

都在环 $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$ 内有则，而且其绝对值是单值的，由上节的结果

$$r_2^\alpha \sum_{\nu=1}^{n} |f(r_2\omega_\nu)|^p \leqslant \max_{\substack{0\leqslant\theta_1\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant\theta_3\leqslant 2\pi}} \left(r_1^\alpha \sum_{\nu=1}^{n} |f(r_1e^{i\theta_1}\omega_\nu)|^p, \; r_3^\alpha \sum_{\nu=1}^{n} |f(r_3e^{i\theta_3}\omega_\nu)|^p\right)$$

除以 $\frac{1}{n}$ 而且命 $n \to \infty$，则得

$$r_2^\alpha I_p(r_2) \leqslant \max(r_1^\alpha I_p(r_1),\ r_3^\alpha I_p(r_3)).$$

取 α 使

$$r_1^\alpha I_p(r_1) = r_3^\alpha I_p(r_3),$$

即得所证.

§7. $(I_p(r))^{\frac{1}{p}}$

由 §6 的定理显然可以推出 §4 的定理 1 与定理 2．命

$$G(r) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right).$$

(定义为几何平均.)

定理 1. $\lim\limits_{p\to+0} (I_p(r))^{\frac{1}{p}} = G(r).$

证. 我们有

$$\begin{aligned} I_p(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{p\log|f|}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [1 + p\log|f| + O(p^2(\log|f|)^2)]d\theta \\ &= 1 + \frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta + O(p^2), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{p\to+0} \frac{1}{p}\log I_p(r) &= \lim \frac{1}{p}\log\left(1 + \frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f|d\theta + O(p^2)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta = \log G(r), \end{aligned}$$

即得所求.

因此推得

定理 2. $G(r)$ 是 r 的增函数，$\log G(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

定理 3.

$$\lim_{p\to\infty} (I_p(r))^{\frac{1}{p}} = M(r).$$

证. 显然有

$$(I_p(r))^{\frac{1}{p}} \leqslant M(r).$$

命 $re^{i\theta_1}$ 是一点使 $|f(re^{i\theta_1})| = M(r)$，则有一邻域 $|\theta - \theta_1| < \frac{\delta}{2}$ 存在，使其中

$$|f(re^{i\theta})| > M(r) - \varepsilon,$$

此处 ε 是一个任给的正数，因此

$$(I_p(r))^{\frac{1}{p}} \geqslant (M(r) - \varepsilon)(\delta)^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\lim_{p\to\infty}(I_p(r))^{\frac{1}{p}}\geqslant M(r)-\varepsilon.$$

这证明了定理 3。

由此可见 Pólya-Szegö 定理还包含了 Hadamard 三圆定理。

§ 8. Vitali 定 理

定理 1. 命 $f_n(z)$ 是一个函数贯，$n=1,2,\cdots$，它们在域D内单值且解析，而且对每一 n 及D中每一点 z 常有

$$|f_n(z)|\leqslant M. \tag{1}$$

这M与n及z都无关系。假定D内有一点集 E，在其上的任一点 z，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)$ 存在，如E有一极限点是D的内点，则在D内的任一紧致子集上，$f_n(z)$ 一致收敛于一函数，这函数当然在D内是 z 的解析的函数。

证. 先假定D是以原点为中心，R为半径的圆，并且假定

$$z_1,z_2,\cdots\to 0,$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z_\nu),\quad \nu=1,2,\cdots$$

存在，明确地说 $f_n(z)$ 适合于：(i) $f_n(z)$ 在 $|z|<R$ 内有则且单值，(ii) 在 $|z|<R$ 内 $|f_n(z)|<M$，(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z_\nu)$ 存在。

命

$$f_1(z)=a_{01}+a_{11}z+a_{21}z^2+\cdots+a_{k1}z^k+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_l(z)=a_{0l}+a_{1l}z+a_{2l}z^2+\cdots+a_{kl}z^k+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

先证明每一行的系数有一极限，即

$$\lim_{l\to\infty}a_{kl}=a_k$$

存在，再证明 Taylor 级数

$$\Sigma a_kz^k$$

在 $|z|<R$ 内收敛，故它在 $|z|<R$ 内代表一有则函数 $f(z)$。最后证明对任一 $\varepsilon>0$，在 $|z|\leqslant R-\varepsilon$ 内，$f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$。

由假定

$$|f_n(z)-f_n(0)|\leqslant|f_n(z)|+|f_n(0)|\leqslant 2M,$$

由 Schwarz 引理

$$|f_n(z)-f_n(0)|\leqslant 2M|z|/R,\quad |z|<R,$$

故

$$|f_n(0)-f_{n+m}(0)|\leqslant|f_n(0)-f_n(z_l)|+|f_n(z_l)-f_{n+m}(z_l)|+|f_{n+m}(z_l)-f_{n+m}(0)|$$
$$\leqslant\frac{4M|z_l|}{R}+|f_n(z_l)-f_{n+m}(z_l)|.$$

由 $z_l\to 0$，及 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z_l)$ 的存在性可知，给了 $\varepsilon>0$，可以取得 z_l 使 $\frac{4M|z_l|}{R}<\frac{\varepsilon}{2}$，又可以取 N，使 $n>N$ 时 $|f_n(z_l)-f_{n+m}(z_l)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

因此，当 $n>N$ 时

$$|f_n(0)-f_{n+m}(0)|<\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}f_n(0)=\lim_{n\to\infty}a_{0n}$$

存在，命之为

$$\lim_{n\to\infty}a_{0n}=a_0.$$

再考虑函数

$$f_{\nu 1}(z)=(f_\nu(z)-a_{0\nu})/z=a_{1\nu}+a_{2\nu}z+\cdots,\tag{2}$$

今往证这一函数贯也适合 (i), (ii), (iii)，如此则 $\lim\limits_{\nu\to\infty}a_{1\nu}$ 存在.

由于 (2) 的收敛半径是 R，因此 $f_{\nu 1}(z)$ 适合条件 (i)，又由 Cauchy 不等式

$$|a_{k\nu}|\leqslant M/R^k,\tag{3}$$

故在 $|z|\leqslant R-\varepsilon$ 内

$$|f_{\nu 1}(z)|\leqslant|a_{1\nu}|+|a_{2\nu}||z|+\cdots$$
$$\leqslant M\left(1+\frac{R-\varepsilon}{R}+\left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)^2+\cdots\right)\Big/R=\frac{M}{\varepsilon}.$$

因此 (ii) 是适合的，但换了在 $|z|\leqslant R-\varepsilon$ 内，$|f_{\nu 1}(z)|\leqslant\frac{M}{\varepsilon}$. 最后

$$\lim_{\nu\to\infty}f_{\nu 1}(z_l)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{f_\nu(z_l)-a_{0\nu}}{z_l}=\frac{1}{z_l}\left(\lim_{\nu\to\infty}f_\nu(z_l)-a_0\right),\quad z_l\neq 0$$

是存在的，因得所证.

重复这一步骤，推得每一列系数都有极限，

$$\lim_{\nu\to\infty}a_{k\nu}=a_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

由 (3) 可知

$$|a_k|\leqslant M/R^k,$$

因此级数 Σa_kz^k 在 $|z|<R$ 内表有则函数.

最后，当 $|z|\leqslant R-\varepsilon$，

$$|f(z)-f_\nu(z)|\leqslant|(a_0-a_{0\nu})+\cdots+(a_m-a_{m\nu})z^m|+\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}a_kz^k\right|+\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}a_{k\nu}z^k\right|,$$

故

$$|f(z)-f_\nu(z)| \leqslant \sum_{\lambda=0}^{m} |a_\lambda - a_{\lambda\nu}||z^\lambda| + \frac{2M}{R^{m+1}}(R-\varepsilon)^{m+1}\frac{R}{\varepsilon}.$$

给一 $\delta>0$，我们可以取 m，

$$\frac{2RM}{\varepsilon}\left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)^{m+1} < \frac{\delta}{2},$$

然后取 $\nu(\delta, m)$，使 $\nu > \nu(\delta, m)$ 时，$m+1$ 个数

$$|a_0 - a_{0\nu}|, \cdots, |a_m - a_{m\nu}|$$

都小于

$$\frac{\delta}{2}\frac{1-(R-\varepsilon)}{1-(R-\varepsilon)^{m+1}},$$

即得

$$|f(z)-f_\nu(z)| \leqslant \frac{\delta}{2}\frac{1-(R-\varepsilon)}{1-(R-\varepsilon)^{m+1}}\sum_{\lambda=0}^{m}(R-\varepsilon)^\lambda + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

于是 Vitali 定理在圆 $|z|<R$ 中当 $\lim\limits_{\nu\to\infty} z_\nu = z_0 = 0$ 时正确，即使 $\lim\limits_{\nu\to\infty} z_\nu = z_0 \neq 0$ 时也是正确的，因为有 Möbius 变换使 $|z|<R$ 不变而把 0 变为 z_0.

现在证明一般性的定理. 命 R 是任一由 D 的内点所组成的闭域，在 R 上 $f_\nu(z)$ 处处有则，即对 R 中任一点一定有一个以此点为中心的圆，在其中 $f_\nu(z)$ 是有则的，因此，由 Heine-Borel 定理，其中可以选取有限个(开)圆 $c_1, \cdots, c_p$ 覆盖此域 R.

命 c_1 是其中之一圆，包有 z_n 的极限点 z_0 者. 由以上证得的结果：在 c_1 内的任一闭区域，$f_\nu(z)$ 一致收敛于 $f(z)$，取 c_2 为另一圆与 c_1 有公共部分 K，在 K 内取一点列 $z_1', \cdots, z_n', \cdots$ 以 z_0' 其极限点，z_0' 仍在 K 内，则

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(z_l') = f(z_l').$$

故定理能用在 c_2 上，即在 c_2 内，$f_\nu(z)$ 一致收敛于一函数(当 $\nu\to\infty$). 由于在 K 内两极限函数等同，因此后者是前者的解析延拓. 用此办法可以达到所有的 p 个圆，即本定理对 R 为真，定理证毕.

§9. 囿函数族

定义. $\{f(z)\}$ 是一个单值函数的集合，其中每一函数都在域 D 内有则，如果有一常数 M，使对族中每一函数 $f(z)$，常有

$$|f(z)| < M,$$

则此族称为囿族.

关于囿族有以下的重要定理.

定理 1 (Montel). D 上的任何解析函数的囿族，一定在 D 内的任一闭子集上包有一个一致收敛的函数贯，其极限函数是解析函数.

证. 取任一以内点 z_0 为极限点的贯

$$z_1, z_2, \cdots,$$

设 $f_\nu(z)$ 构成一个囿族，由于 $|f_\nu(z_1)| < M$，所以可以取一个函数贯

$$f_{\nu 11}(z), f_{\nu 21}(z), \cdots, f_{\nu n1}(z), \cdots,$$

(其中 $\nu_{n1} \geqslant n$) 使

$$f_{\nu 11}(z_1), f_{\nu 21}(z_1), \cdots, f_{\nu n1}(z_1), \cdots$$

的极限存在. 在这一个函数贯中,考虑

$$f_{\nu 11}(z_2), f_{\nu 21}(z_2), \cdots,$$

其中一定有一子贯

$$f_{\nu 12}(z_2), f_{\nu 22}(z_2), \cdots$$

的极限存在,再在这一贯中选取 $\nu_{13}, \nu_{23}, \cdots, \nu_{n3}, \cdots$ 使

$$f_{\nu 13}(z_3), f_{\nu 23}(z_3), \cdots$$

的极限存在,等等,考虑函数贯

$$f_{\nu 11}(z), f_{\nu 22}(z), f_{\nu 33}(z), \cdots.$$

(Hilbert-Cantor 对角线法,参阅五章 § 2.)

这函数贯对任一 $z = z_l$ 都有极限. 由于 z_l 的极限点是D的内点, 因此由 Vitali 定理推出本定理.

这个定理的逆定理是不对的,例如: 函数族

$$\frac{1}{n(z-1)}$$

在单位圆内的任一闭子集上一致收敛于零,但族中每一函数在单位圆内皆不受囿.

附记. 我们还可以从 Montel 定理来推出 Vitali 定理. 如果 $f_n(z)$ 并不收敛, 由 Montel 定理可以选出两个函数贯, 各收敛于一个解析函数 $f(z)$ 与 $g(z)$, 但在 $z_1, \cdots, z_n, \cdots$,

$$f(z) - g(z) = 0,$$

而其极限点 z_0 是内点. 因此 $f(z) \equiv g(z)$.

§ 10. 正 规 族

上节的结果引出了一个重要概念即正规族.

定义 1. 设 $\{f_\nu(z)\}$ 是定义在某一域D上的一族函数,其中 ν 属于某一指标集合.如果对此函数族中的任一子族,一定可以找到包含在此函数族中的一个函数贯 $\{f_n(z)\}_{n=1,2,3,\cdots}$ 使 $\{f_n(z)\}$ 在D内的任一闭子域内一致收敛,其极限函数可以 $\equiv\infty$, 则我们称 $\{f_\nu(z)\}$ 为域D上的一个正规族.

所谓一个函数贯 $\{f_n(z)\}$ 在一点集合E上一致收敛于 ∞, 即任给 $\varepsilon > 0$, 有N存在,使 $n > N$ 时

$$\frac{1}{|f_n(z)|} < \varepsilon$$

对一切的 $z \in E$ 都成立,就是说N与z无关.

正规族的极限函数成一集合称为原族的导出集合. 导出集合显然是封闭的, 即导出集合中一致收敛贯的极限函数一定在导出集合中,故一正规族的导出集合是一正规族.

上节的定理可以改述为

任何一个(解析函数的)囿族一定是正规族.

定理 1. 命 $\{f(z)\}$ 是 D 内的正则函数的一个正规族，如果在一点 z_0 有界，则在 D 内任一闭子域 D' 上这族是囿族.

证. 反之，即 $\{f(z)\}$ 在 D' 中不受囿，即在 D' 中有一点 z_1 及一函数 $f_1(z)$ 使

$$|f_1(z_1)| > 1,$$

及一点 z_2 与一函数 $f_2(z)$ 使

$$|f_2(z_2)| > 2,$$

等等. 即一般有一点 z_n 及一函数 $f_n(z)$ 使

$$|f_n(z_n)| > n.$$

研究函数贯

$$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots,$$

由假定，其中可以选一子贯，在 D' 中一致收敛于一函数 $f(z)$. 由于在 z_0 点，$f_n(z)$ 收敛，因此 $f(z)$ 不能收敛于 ∞.

所以 $f(z)$ 在 D' 内及其周界上是有则的，因此

$$|f(z)| \leqslant K$$

当 n 充分大时，在 D' 上 $|f_n(z) - f(z)| < 1$，所以

$$|f_n(z)| \leqslant K + 1, \quad z \in D'.$$

这与 $|f_n(z_n)| > n$ 的假定相违背.

第九章　整函数与亚纯函数

§1. 定　　义

在全平面上(不包括∞)无处不解析的函数称为整函数或全纯函数．在全平面上(不包括∞)除去一些孤立极点外，无处不解析的函数称为亚纯函数．

整函数是多项式的推广，而亚纯函数是有理函数的推广．显而易见，二整函数的和、差、积仍然是整函数，亚纯函数的和、差、积、商(分母非零)仍然是亚纯函数．

多项式与有理函数的性质是我们研究整函数与亚纯函数的基础．我们先看一些是多项式与有理函数的基本性质．首先，多项式一定有零点，而且有唯一分解定理(按多项式的根来进行分解)．这一结果能不能推广到整函数？

首先，我们可以举出无零点的整函数，e^z 就无零点．更一般些，对任一整函数 $g(z)$，$e^{g(z)}$ 是无零点的整函数．反之，如果 $f(z)$ 是一个没有一个零点的整函数，则 $\log f(z)=g(z)$ 当然也是整函数．因此，整函数 $f(z)$ 无零点的必要且充分条件是它可以表成为 $e^{g(z)}$，这儿 $g(z)$ 是整函数．其次，更一般些，对任意复数 a (不包括 ∞)，由 n 次多项式 $p(z)$ 做出的方程式

$$p(z)=a$$

常有解(并且常有 n 个解)．由任一整函数 $f(z)$ 做出的方程式

$$f(z)=a \tag{1}$$

对那些 a 有解？关于此问题有著名的 Picard 定理：可能存在有一个数值 a_0，除 $a=a_0$ 外，(1) 常有解(不包括 $a=\infty$)．Picard 的原证非常有趣，但他用到了一个椭圆模函数 $\omega(z)$．这函数有下列性质：除 $z=0,1,\infty$ 以外，这函数(非常数)无处不有则，其虚数部分决不为负．如果 $f(z)=a$，$f(z)=b$ 都无解，作

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{b-a},$$

则 $g(z)=0$，$g(z)=1$ 无解．作函数

$$e^{i\omega(g(z))},$$

因为 $g(z)\neq 0,\neq 1$，所以 $\omega(g(z))$ 除 $z=\infty$ 外无处不解析，由于 $\omega(z)$ 的虚数部分不为负，所以

$$|e^{i\omega(g(z))}|\leqslant 1.$$

$e^{i\omega(g(z))}$ 是有界整函数，由 Liouville 定理，它是一常数，即 $\omega(g(z))$ 是常数，但 ω 非常数，因此 $g(z)$ 是常数．

其三，多项式分解定理有无推广．如果 $f(z)$ 有有限个零点 $a_1,\cdots,a_n$，则不难证明

$$f(z)=\prod_{\nu=0}^{n}(z-a_\nu)e^{g(z)},$$

这儿 $g(z)$ 是整函数．如果有无穷多个零点，就出现了无穷乘积

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right) \tag{2}$$

是否收敛的问题，如果要求它收敛，就必须要求级数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$$

收敛．换言之，如果给了 n 个任意复数，我们可以作出以此为根的多项式，但任意给了无穷个 $a_1, a_2, \cdots, a_\nu, \cdots$，我们不能由 (2) 法做出以此为零点的表达式 (2)． 但我们却能够做出以此为零点的整函数．如果点集 $\{a_\nu\}$ 在有限平面上没有聚点，则所作出的整函数亦不恒等于 0．这将是本章要讲到的 Weierstrass 定理．

关于亚纯函数，第一个问题是：它是否可以表为二整函数之商． 这是容易证明的事实．如果 $f(z)$ 是亚纯函数，其极点是

$$z_1, z_2, \cdots, z_\nu, \cdots$$

重根作重数写出．由 Weierstrass 定理，我们可以做一个整函数 $g(z)$，以 $z_1, z_2, \cdots, z_\nu, \cdots$ 为零点，因此 $g(z)f(z)$ 是整函数 $h(z)$，因此 $f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$.

最后，有理函数有分项分数法，这一结果的推广将是本章所要讲的 Mittag-Leffler 定理．如果说 Weierstrass 定理是用事先给定的零点分布构造整函数，则 Mittag-Leffler 定理是用事先给定的极点分布构造亚纯函数．

§ 2. Weierstrass 分解定理

命 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个仅以∞为其聚点的复数贯，其中同一数可能出现有限次，则存在一个不恒为 0 的整函数以此为零点．

假定其中有 l 个等于 0，把其他的 a_i 排成为

$$0<|a_{l+1}|\leqslant|a_{l+2}|\leqslant\cdots,$$

命 $|a_n|=r_n$．我们先证明有一个正整数贯

$$p_{l+1}, p_{l+2}, \cdots$$

存在，使级数

$$\sum_{n=l+1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n} \tag{1}$$

对任一 r 收敛．我们证明 $p_n=n$ 即有此性质．由于 $r_n\to\infty$，所以当 $r_n>2r$ 时

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^n<\frac{1}{2^n}.$$

因此 (1) 一定收敛(读者试证明 $p_n>\log n$ 即有此性质)．

定义． 函数

$$E(u,p)=(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\cdots+\frac{1}{p}u^p},\quad p=1,2,\cdots,n,\cdots,$$
$$E(u,0)=(1-u),$$

称为原因子．

当 $|u| < 1$ 时，

$$\log E(u, p) = -\frac{u^{p+1}}{p+1} - \frac{u^{p+2}}{p+2} - \cdots\cdots.$$

故当 $|u| < \frac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}|\log E(u, p)| &\leqslant |u|^{p+1} + |u|^{p+2} + \cdots \\ &\leqslant |u|^{p+1}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right\} = 2|u|^{p+1}.\end{aligned} \tag{2}$$

作无穷乘积

$$f(z) = z^l \prod_{n=l+1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n - 1\right).$$

由不等式(2)，可知当 $|a_n| > 2|z|$ 时，

$$\left|\log E\left(\frac{z}{a_n}, p_n - 1\right)\right| \leqslant 2\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}.$$

因此，在 $|z| \leqslant R$ 中，级数

$$\sum_{|a_n|>2R} \left|\log E\left(\frac{z}{a_n}, p_n - 1\right)\right| \leqslant 2\sum\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}$$

一致收敛．即乘积

$$\prod_{|a_n|>2R} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n - 1\right)$$

一致收敛，因此，它在 $|z| \leqslant R$ 中是解析的，而

$$z^l \prod_{|a_n|\leqslant 2R,\, n>l} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n - 1\right) \tag{3}$$

显然是 z 的解析函数． 因此，$f(z)$ 是解析的，而且在 $|z| \leqslant R$ 中以(3)式的零点为零点．

由于 R 可以任意大，我们找到了以 $a_1, a_2, \cdots$ 为零点的整函数．

注意除此之外，无其它零点．(因无穷乘积收敛的意义包括其极限不为 0．)

但必须注意分解不是唯一的，可能相差一个无零点的整函数因子．

§3. 整函数的阶

如果有正数 $A > 0$，使 $|z| = r \to \infty$ 时

$$f(z) = O(e^{r^A}),$$

则整函数 $f(z)$ 称为有限阶的函数． A 的下确界 ρ 称为这函数的**阶**，也就是对任一 $\varepsilon > 0$

$$f(z) = O(e^{r^{\rho+\varepsilon}}), \tag{1}$$

而对任一 $\varepsilon < 0$，此式不能成立．

命 $M(r)$ 表示在 $|z| = r$ 上 $|f(z)|$ 的最大值，则(1)等价于

$$\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

例 1． e^z 与 $\sin z$，$\cos z$ 都是一阶整函数．

例 2. $\cos\sqrt{z}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶整函数.

例 3. e^{e^z} 是无穷阶整函数.

为了减少一些非本质的麻烦，今后我们假定 $f(0)\neq 0$，不然我们可以考虑 $\frac{1}{z^h}f(z)$，阶并不受影响.

定义. 设 a_n 为 $f(z)$ 的零点，命 $|a_n|=r_n$ 及 $r_1\leqslant r_2\leqslant r_3\leqslant\cdots$，如果 ρ_1 是使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n^{\rho}}$$

收敛的 ρ 的下确界，则 ρ_1 称为 $f(z)$ 的零点的收敛指数.

定理 1. 一个 ρ 阶的整函数的收敛指数 $\leqslant\rho$，即 $\rho_1\leqslant\rho$.

证. 由 Jensen 公式可知，当 $r_n\leqslant r\leqslant r_{n+1}$ 时

$$\log\frac{r^n}{r_1\cdots r_n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\log|f(0)|=O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

命 $n(r)$ 表示不大于 r 的 r_n 的个数，则显然有

$$\log\frac{r^n}{r_1\cdots r_n}=\sum_{i=1}^{n}\log\frac{r}{r_i}\geqslant\sum_{r_i\leqslant\frac{1}{2}r}\log\frac{r}{r_i}\geqslant n\left(\frac{r}{2}\right)\log 2.$$

由此推出

$$n\left(\frac{r}{2}\right)=O(r^{\rho+\varepsilon}),\quad 即\ n(r)=O(r^{\rho+\varepsilon}).$$

取 $r=r_n$，则得

$$n=O(r_n^{\rho+\varepsilon}),$$

即

$$\frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}}=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

由于 $\Sigma\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<\infty$，所以对任一 $\varepsilon>0$，

$$\Sigma\frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}}$$

常收敛，定理证明.

由此得出有限阶整函数的重要性质，即有一正整数 p 与 n 无关，乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},p\right) \tag{2}$$

对所有的 z 收敛，其中 z_n 是该整函数的零点.

最小的正整数 p 使 (2) 收敛者称为亏格 (genus)，如果 ρ_1 非整数，则 $p=[\rho_1]$；如果 ρ_1 是整数，则

$$p=\begin{cases}\rho_1, & 如果\ \Sigma r_n^{-\rho_1}\ 发散,\\ \rho_1-1, & 如果\ \Sigma r_n^{-\rho_1}\ 收敛.\end{cases}$$

无论如何

$$p\leqslant\rho_1\leqslant\rho.$$

定理 2. 任意给定一趋于无穷的点列 z_n，每个 $z_n \neq 0$. 如果 $r_1, r_2, \cdots$ 的收敛指数是 ρ_1，则标准乘积

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)$$

是一 ρ_1 阶的整函数(此 p 的定义上面已经交代).

证. 设 ρ 是标准乘积的阶，由定理 1 已知 $\rho_1 \leqslant \rho$，今须证明 $\rho \leqslant \rho_1$. 命 k 为大于 1 的正整数

$$\log|P(z)| = \sum_{r_n \leqslant kr} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| + \sum_{r_n > kr} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

对 Σ_2 有

$$\Sigma_2 = O\left(\sum_{r_n > kr}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\right) = O\left(r^{p+1}\sum_{r_n > kr}\frac{1}{r_n^{p+1}}\right).$$

如果 $p = \rho_1 - 1$，则 $\Sigma_2 = O(r^{p+1}) = O(r^{\rho_1})$，不然，$\rho_1 + \varepsilon < p + 1$ (ε 充分小的正数)，则

$$r^{p+1}\sum_{r_n > kr}\frac{1}{r_n^{p+1}} = r^{p+1}\sum_{r_n > kr}\frac{1}{r_n^{\rho_1+\varepsilon}}\frac{1}{r_n^{-\rho_1-\varepsilon+p+1}}$$

$$< r^{p+1}(kr)^{\rho_1+\varepsilon-p-1}\sum\frac{1}{r_n^{\rho_1+\varepsilon}} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}).$$

又在 Σ_1 中，以 u 表 $\frac{z}{z_n}$，则有 $|u| \geqslant \frac{1}{k}$. 因此

$$\log|E(u,p)| \leqslant \log(1+|u|) + |u| + \cdots + \frac{|u|^p}{p} < K|u|^p.$$

此处 K 仅与 k 及 p 有关，故

$$\Sigma_1 = O\left(r^p\sum_{r_n \leqslant kr}\frac{1}{r_n^p}\right) = O\left(r^p\sum_{r_n \leqslant kr} r_n^{\rho_1+\varepsilon-p} r_n^{-\rho_1-\varepsilon}\right)$$

$$= O\left\{r^p(kr)^{\rho_1+\varepsilon-p}\sum r_n^{-\rho_1-\varepsilon}\right\} = O(r^{\rho_1+\varepsilon}),$$

所以

$$\log|P(z)| = O(r^{\rho_1+\varepsilon}),$$

即得所证.

§ 4. Hadamard 分解定理

定理 1. 如果 $f(z)$ 是一 ρ 阶的整函数，其零点是 $z_1, z_2, \cdots$, ($f(0) \neq 0$)，则

$$f(z) = e^{Q(z)}P(z). \tag{1}$$

这儿 $P(z)$ 是由 $f(z)$ 的零点所形成的标准乘积，而 $Q(z)$ 是一多项式其次数不大于 ρ.

证. 已知 $f(z)$ 可以表为 (1) 的形式，其中 $Q(z)$ 是一整函数. 因此，所待证明者乃是 $Q(z)$ 是一多项式，其次数 $\leqslant \rho$.

取 $\nu = [\rho]$，则 $\rho \leqslant \nu$. 取 (1) 的对数，微商 $\nu + 1$ 次，得

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{\nu}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} = Q^{(\nu+1)}(z) - \nu!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z_n - z)^{\nu+1}}.$$

如能证明 $Q^{(\nu+1)}(z)=0$，则得 $Q(z)$ 是一多项式，其次数 $\leqslant \nu$.

命

$$g_R(z)=\frac{f(z)}{f(0)}\prod_{|z_n|\leqslant R}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{-1}.$$

在圆 $|z|=2R$ 上，当 $|z_n|\leqslant R$ 时，

$$\left|1-\frac{z}{z_n}\right|\geqslant 1,$$

故在 $|z|=2R$ 上

$$|g_R(z)|\leqslant\left|\frac{f(z)}{f(0)}\right|=O(e^{(2R)^{\rho+\varepsilon}}), \tag{2}$$

由于 $g_R(z)$ 是整函数，此式当 $|z|<2R$ 中也真.

命 $h_R(z)=\log g_R(z)$，对数取值由 $h_R(0)=0$ 决定，则 $h_R(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ 中有则，故由 (2)，

$$\boldsymbol{R}\{h_R(z)\}<KR^{\rho+\varepsilon}. \tag{3}$$

由 Borel-Carathèodory 不等式，可知当 $|z|=r<R$ 时，

$$|h_R^{(\nu+1)}(z)|\leqslant\frac{2^{\nu+3}(\nu+1)!R}{(R-r)^{\nu+2}}KR^{\rho+\varepsilon},$$

特别取 $r=\frac{1}{2}R$，则

$$h_R^{(\nu+1)}(z)=O(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1}). \tag{4}$$

故当 $r=\frac{1}{2}R$ 时，

$$\begin{aligned}Q^{(\nu+1)}(z)&=h_R^{(\nu+1)}(z)+\nu!\sum_{|z_n|>R}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}}\\&=O(R^{\rho+\varepsilon-\nu-1})+O\left(\sum_{|z_n|>R}|z_n|^{-\nu-1}\right),\end{aligned}$$

当 $|z|<\frac{1}{2}R$ 时，上式也正确，当 ε 充分小及 $R\to\infty$ 时其第一项 $\to 0$. 由于 $\Sigma|z_n|^{-\nu-1}$ 收敛，第二项也 $\to 0$. 由于左方与 R 无关，故得所证.

习题. 证明如果 ρ 非整数，则 $\rho_1=\rho$.

§5. Mittag-Leffler 定理

命 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是仅有∞为聚点的贯，我们现在求一亚纯函数在 a_i 有给定的主展开部分

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)=\frac{\alpha_{k1}}{z-a_k}+\cdots+\frac{\alpha_{kl_k}}{(z-a_k)^{l_k}},\quad k=1,2,\cdots, \tag{1}$$

我们把极点排成为

$$|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant|a_3|\leqslant\cdots,$$

并暂为假定 0 非极点. 展开 (1) 为 z 的幂级数

$$g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)=\beta_0^{(k)}+\beta_1^{(k)}z+\beta_2^{(k)}z^2+\cdots,\quad |z|<|a_k|. \tag{2}$$

命 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,\cdots$ 是一个正数贯，使级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k$$

收敛.

幂级数 (2) 在圆 $|z|<\frac{1}{2}|a_k|$ 一致收敛，所以可以取定 p_k，使

$$q_k(z)=\beta_0^{(k)}+\cdots+\beta_{p_k}^{(k)}z^{p_k}$$

适合于

$$\left|g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k(z)\right|<\varepsilon_k, \tag{3}$$

做级数

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k(z)\right]. \tag{4}$$

以原点为中心，半径为 R 作一圆 C. 由于 $|a_k|\to\infty$，故存在 N，使 $k>N$ 时，$R\leqslant\frac{1}{2}|a_k|$. 对这样的 k，估计 (3) 在圆 C 内是成立的，因此 (4) 在 C 内绝对而且一致收敛，而 $\sum_{k=1}^{N}$ 在圆内有极点 $a_1,\cdots,a_N$，而在各点有所给的主展开部分 (1)，并且 (4) 在圆 C 内仅有这些极点而已. 因为 R 可以任意大，因此 (4) 就是所求的亚纯函数.

如果 $z=0$ 也是极点，它的主展开部分是

$$g_0\left(\frac{1}{z}\right),$$

则在 (4) 上再添加上 $g_0\left(\frac{1}{z}\right)$ 即得.

命 $f(z)$ 是任一亚纯函数，上法可作 $\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 有相同的主展开部分，因此 $f(z)-g(z)$ 在全平面上解析，因而得出

$$f(z)=F(z)+g_0\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k(z)\right],$$

这儿 $F(z)$ 是整函数.

读者试比较 Weierstrass 与 Mittag-Leffler 两证明，看其中有原则相通处否？能否如上节一般更具体地给出 p_k，例如 $p_k=k$.

读者试考虑单位圆内的解析函数因子分解定理，亚纯函数是解析函数的商，亚纯函数的分项分数定理.

§ 6. ctg z 与 $\sin z$ 的表示式

函数

$$F(z)=\operatorname{ctg}z-\frac{1}{z} \tag{1}$$

在 $z=k\pi$ 处有单极点，其留数是 1，这儿 k 是任一非零的整数，除这些极点外，处处解析．

用上节方法可以作出函数

$$F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right),$$

符号 Σ' 表示略去 $k=0$ 一项，此级数显然在任一点 $z\neq k\pi$ 是收敛的，并且以 $z=k\pi$ 为单极点，且有与 (1) 相等的留数，由上节结果可知 $F(z)$ 与 $F_1(z)$ 可能差一个整函数，现在我们进一步证明 $F(z)=F_1(z)$．

取 c_n 为以 $\left[x=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ y=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ 为四个顶点的正方形． 如第七章 § 11 的方法考虑沿 c_n 的边界函数

$$f(z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z\left(\frac{1}{x-z\pi}+\frac{1}{z\pi}\right).$$

由于 $z=0$ 是一二重极点，所以不能直接用原来的公式，在 c_n 上 $f(z)$ 无极点，在 c_n 内有极点 $z=\pm1,\pm2,\cdots,\pm n$，当 $z=k$ (k 非 0 整数)时，$f(z)$ 的留数等于

$$\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{k\pi}.$$

在 $z=0$ 处 $f(z)$ 有一二重极点，展式是

$$\left(\frac{1}{z}-\frac{\pi^2z}{3}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z\pi}+\frac{1}{x}+\frac{\pi z}{x^2}+\cdots\right),$$

所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 的留数是

$$\frac{1}{x}.$$

$f(z)$ 在 $z=\frac{x}{\pi}$ 处的留数等于

$$-\operatorname{ctg}x.$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n}f(z)dz=\sum_{k=-n}^{n}{}'\left(\frac{1}{x-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right)+\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x.$$

如能证明，当 $n\to\infty$ 时，左边 $\to 0$，则问题已解决了．

已知

$$|\operatorname{ctg}(x+yi)|^2=\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}.$$

在平行于 y 轴的 c_n 边上，即 $x=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$，$\cos 2x=-1$，即

$$|\operatorname{ctg}z|^2\leqslant\left|\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right|<1,$$

所以当 n 充分大时，由于 $\frac{1}{x-z\pi}+\frac{1}{z\pi}=O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$，

$$\int_{x=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}f(z)dz=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

又在平行于 x 轴的边上，即 $y=\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$，

$$|\operatorname{ctg} z|^2\leqslant\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2}{e^{2y}+e^{-2y}-2}=\left(\frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}}\right)^2=O(1),$$

也得出所对应的积分 $\to 0$（当 $n\to\infty$），即得所证，也就是

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}+\lim_{n\to\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(\frac{1}{x-m\pi}+\frac{1}{m\pi}\right)=\frac{1}{x}+2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2\pi^2}, \tag{2}$$

这级数是收敛的.

任作一边界不过极点的有界闭区域，包含 $z=0$ 点在内，以此区域内之每个极点为中心作一充分小之圆，则在挖掉这些(有限个)小圆后，级数(2)在这闭区域内是一致收敛的，设 z 为此中一点，由 0 到 z 逐项积分，但积分路线不过极点，得

$$\log\frac{\sin z}{z}=C+\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

即得

$$\frac{\sin z}{z}=C\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

由于 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$，所以 $C=1$，即得 $\sin z$ 的无穷乘积表达式

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

或

$$\frac{\sin \pi z}{\pi}=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

如果改写为

$$\frac{\sin \pi z}{\pi}=z\lim_{m\to\infty}\prod_{n=-m}^{+m}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}},$$

这就是 Weierstrass 形式的乘积了.

例 1. 证明

$$\sec z=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-z^2},$$

$$\cos z=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2-z^2}.$$

例 2. 证明

$$\cos z=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right).$$

例 3. 证明

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2+4n^2\pi^2}.$$

例 4.

$$\csc^2 z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}.$$

习题. 从

$$\frac{\sin \pi z}{\pi}=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),$$

推出 $\sin z$ 以 2π 为周期.

§7. Γ 函 数

考虑 Weierstrass 乘积

$$ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]. \tag{1}$$

这儿

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)$$

是 Euler 常数.

由于 $\Sigma\frac{|z|^2}{n^2}$ 收敛,故由第二节的证明方法中可知,取 $p_n=2$, 无穷乘积

$$\Pi E\left(-\frac{z}{n},1\right)$$

收敛,因此 (1) 是整函数.

我们定义

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]. \tag{2}$$

由此立刻可见, $\Gamma(z)$ 有 $0,-1,-2,\cdots$ 作为其单极点,此外处处解析.

这样定义的 $\Gamma(z)$ 是否就是以往所定义的

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt? \quad (\boldsymbol{R}z>0)$$

在证明此点之前先由 (2) 推导出若干性质

定理 1. 除去 $z=0,-1,-2,\cdots$ 诸点外

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}.$$

证. 将 (2) 写成为

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left[\lim_{m\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)z}\right]\left[\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}\right]$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[m^{-z}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right] = z\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\right\}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}\right].$$

即得所证.

定理 2. 当 $\boldsymbol{R}z>0$ 及 n 是自然数时,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \Gamma(z).$$

证. 命 $t=n\tau$, 得

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau.$$

分部积分 n 次得

$$\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau = \frac{1}{z}\tau^z(1-\tau)^n\Big|_0^1+\frac{n}{z}\int_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1\tau^{z+n-1}d\tau$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$

由定理 1 可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)}n^z = \Gamma(z).$$

定理 3. 当 $\boldsymbol{R}z>0$ 时,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

证. 命

$$\Gamma_1(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,$$

由定理 2 知

$$\Gamma_1(z)-\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt,$$

由于

$$0\leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant n^{-1}t^2e^{-t}, \tag{3}$$

可知

$$\left|\int_0^n\left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]t^{z-1}dt\right|\leqslant\int_0^n n^{-1}t^2e^{-t}t^{z-1}dt\leqslant n^{-1}\int_0^\infty e^{-t}t^{z+1}dt\to 0,$$

即得所证.

但还须证明不等式(3)：当 $0 \leqslant y < 1$ 时，由幂级数显然有

$$1 + y \leqslant e^y \leqslant (1-y)^{-1},$$

以 $\frac{t}{n}$ 代 y 得

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \geqslant e^{-t} \geqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

故

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left\{1 - e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\} \leqslant e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right\}.$$

当 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时，由归纳法可证 $(1-\alpha)^n \geqslant 1 - n\alpha$，以 $\frac{t^2}{n^2}$ 代 α，则得

$$1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n},$$

因此

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}\frac{t^2}{n}.$$

即得所证.

习题 1. 求证：对任一自然数

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz}(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\Gamma(nz).$$

(Gauss-Legendre)

提示：先由定理 1 推出

$$\varphi(z) = \frac{n^{nz}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nz)}$$

与 z 无关，再由 $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ 算出 $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$.

我们常用 $n=2$ 的特例

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z).$$

习题 2. 命

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

则

$$B(np, nq) = n^{-nq}\frac{B(p, q)B\left(p+\frac{1}{n}, q\right)\cdots B\left(p+\frac{n-1}{n}, q\right)}{B(q, q)B(2q, q)\cdots B((n-1)q, q)}.$$

习题 3. 试证：如果 $a_1 + \cdots + a_k = b_1 + \cdots + b_k$，则

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(n-a_1)\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)\cdots(n-b_k)}\right\} = \prod_{m=1}^{k}\frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)},$$

例如

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

习题 4. 证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n^l}\right) = -\frac{1}{\prod_{n=0}^{l-1}\Gamma\left(-x^{\frac{1}{m}}\omega_m\right)}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi}{l}i}.$$

习题 5. 证明

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -r - \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{z+m}\right).$$

§8. ζ 函 数

我们换一下符号，用复数 s 来做复变数，而命 $s=\sigma+it$，σ, t 是实数，Riemann ζ 函数的定义是

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

对任一 $\delta>0$，这级数在 $\sigma \geqslant 1+\delta$ 中的任一区域一致收敛． 因此它在 $\sigma>1$ 的半个平面上表解析函数．

这函数的来源是数论，在素数分布的研究中它有头等重要性，但其重要性并不局限于数论．在 Γ 函数及其相关的高级理论，积分方程的研究中都有用场．

(1) 仅在 $\sigma>1$ 上定义，我们要看它在全平面上的性质，证明它是一个亚纯函数．从

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}dx, \quad \sigma>0$$

出发．当 $\sigma \geqslant 1+\delta$ 时

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}dx \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}dx - \int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}e^{-(N+1)x}dx\right) = \lim_{N\to\infty}(I+II).\end{aligned}$$

当 $x \geqslant 0$，$e^x \geqslant 1+x$，故第二积分的绝对值

$$|II| \leqslant \int_0^{\infty} x^{\sigma-2}e^{-Nx}dx = N^{1-\sigma}\Gamma(\sigma-1),$$

故当 $N\to\infty$ 时，这积分 $\to 0$．因此

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}dx, \quad \sigma>1.$$

考虑积分

$$I(s) = \int_c \frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz. \tag{2}$$

把平面沿正实轴切开，这儿积分途径沿上切口由 $+\infty$ 到 $\delta(>0)$，再沿圆 $|z|=\delta$ 到下切口，沿下切口回到 $+\infty$，这儿函数 z^{s-1} 定义是

$$e^{(s-1)\log z},$$

在开始时 $\log z$ 是实的，故沿 c 走时 $I(\log z)$ 从 0 变到 $2\pi i$.

在小圆 $|z|=\delta$ 上，

$$|z^{s-1}| = e^{(\sigma-1)\log|z|-t\arg z} \leqslant |z|^{\sigma-1}e^{2\pi|t|},$$

$$|e^z - 1| > A|z|.$$

因此，当 $\sigma > 1$ 时在 $|z|=\delta$ 上的积分随 δ 而趋于 0. 故得

$$I(s) = -\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx + \int_0^\infty \frac{(xe^{2\pi i})^{s-1}}{e^x-1}dx$$

$$= (e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\zeta(s) = \frac{2i\pi e^{i\pi s}}{\Gamma(1-s)}\zeta(s),$$

即得

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz. \tag{3}$$

此示，当 $\sigma > 1$ 时，(3) 即前面的 ζ 函数. 但积分 $I(s)$ 在 s 平面上的任一有限部分都是一致收敛的，因此公式 (3) 给与 $\zeta(s)$ 的全平面解析拓展，其可能的奇点来自 $\Gamma(1-s)$ 的极点 $s=1,2,3,\cdots$，但已知 $\zeta(s)$ 在 $s=2,3,\cdots$ 是有限的，故仅有 $s=1$ 处可能有一个奇点，在 $s=1$ 是一个单极. 由

$$I(1) = \int_c \frac{dz}{e^z-1} = 2\pi i$$

及

$$\Gamma(1-s) = -\frac{1}{s-1} + \cdots,$$

可知这单极的留数是 1.

如果 s 是整数，积分 $I(s)$ 是单值的. $I(s)$ 可以用留数法算出

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{1}{2}z + B_1\frac{z^2}{2!} - B_2\frac{z^4}{4!} + \cdots,$$

这儿 $B_1, B_2, \cdots$ 是 Bernoulli 数，而且可以求得

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2m) = 0, \quad \zeta(1-2m) = \frac{(-1)^m B_m}{2m}, \quad m=1,2\cdots.$$

§9. 函 数 方 程

定理 1. 在全平面上 $\zeta(s)$ 是处处有限的，但 $s=1$ 例外，该处有一单极，留数为 1，并有函数方程

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\frac{1}{2}s\pi\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

证. 仍取上节(2)中的被积函数，但积分路线改为：c_n 沿正实轴从 $+\infty$ 到 $(2n+1)\pi$，再沿以 $(2n+1)\pi(\pm1\pm i)$ 为顶点的方块一周，然后沿正实轴回到 ∞，在 c（即上节(2)的积分路线）与 c_n 之间被积函数以 $\pm 2i\pi, \cdots, \pm 2i\pi n$ 为极点，在 $2mi\pi$ 与 $-2mi\pi$ 的留数之和是

$$(2m\pi e^{\frac{1}{2}i\pi})^{s-1}+(2m\pi e^{\frac{3}{2}i\pi})^{s-1}=(2m\pi)^{s-1}e^{i\pi(s-1)}2\cos\frac{1}{2}\pi(s-1)$$

$$=-2(2m\pi)^{s-1}e^{i\pi s}\sin\frac{1}{2}\pi s,$$

故由留数定理

$$I(s)=\int_c\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz=\int_{C_n}\frac{z^{s-1}}{e^z-1}dz+4\pi i e^{i\pi s}\sin\frac{1}{2}\pi s\sum_{m=1}^{n}(2m\pi)^{s-1},$$

命 $\sigma<0$ 并使 $n\to\infty$，则函数 $\frac{1}{e^z-1}$ 在 c_n 上有界，$z^{s-1}=O(|z|^{\sigma-1})$，故沿 c_n 的积分 $\to0$，即得

$$I(s)=4\pi i e^{i\pi s}\sin\frac{1}{2}\pi s\sum_{m=1}^{\infty}(2m\pi)^{s-1}=4\pi i e^{i\pi s}\sin\frac{1}{2}\pi s(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s),$$

即得函数方程．由解析函数唯一性定理可知它在 $\sigma\geqslant0$ 亦成立．

由函数方程立刻可以推出几个小结果．由上节 $\zeta(1-2m)$ 的值立可推得

$$\zeta(2m)=2^{2m-1}\pi^{2m}\frac{B_m}{(2m)!},\quad m=1,2,\cdots.$$

今往证

$$\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\log2\pi.$$

把函数方程改写为

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{1}{2}\pi s\Gamma(s)\zeta(s),$$

然后求函数方程的对数微商，得

$$-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}=-\log2\pi-\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}+\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}+\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

在 $s=1$ 处，

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{s\pi}{2}=-\frac{1}{s-1}+O(|s-1|),\quad\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}+\cdots=-\gamma+\cdots,$$

及

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{-\frac{1}{(s-1)^2}+k+\cdots}{\frac{1}{s-1}+\gamma+k(s-1)}=-\frac{1}{s-1}+\gamma+\cdots,$$

此处 k 是常数．故当 $s\to1$ 时，

$$-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}=-\log2\pi,$$

故得 $\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\log2\pi$.

引进新符号

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

则函数方程变为

$$\xi(s)=\xi(1-s).$$

如果命

$$\Xi(z)=\xi\left(\frac{1}{2}+iz\right),$$

则

$$\Xi(z)=\Xi(-z).$$

§10. 球面收敛

为了要把一致收敛的概念,正规族的概念推广到亚纯函数,我们引进球面一致收敛的概念.

在 Neumann 球上,两点 (ξ,η,ζ) 与 (ξ',η',ζ') 的距离,定义为过此两点的大圆的最短距离. 二复数 z, z' (包括 $z=\infty$, $z'=\infty$ 在内)的球距离定义为其球面两对应点的距离,以 $[z,z']$ 表之.

一个函数 $Z=f(z)$ 称为在 z_0 点球连续,如果给了 ε,有一 δ 存在使适合 $[z_0,z]<\delta$ 的 z 常有

$$[Z_0,Z]<\varepsilon.$$

同法定义球一致连续. 不难证明: 在一闭域上连续的函数一定是一致连续.

亚纯函数一致收敛: 命

$$Z_1=f_1(z),\ Z_2=f_2(z),\ \cdots,\ Z_n=f_n(z),\ \cdots$$

表一个在 D 内收敛的亚纯函数贯, 并假定以 $Z=f(z)$ 为其极限. 如果给了 $\varepsilon>0$, 可以找到一个整数 N 与 z 无关,使 $n>N$ 时,对所有的 $z\in D$ 常有

$$[Z_n,Z]<\varepsilon,$$

则 $\{f_n(z)\}$ 称为一致收敛于 $f(z)$.

更具体地写出 $[z_1,z_2]$ 的意义,已知 z_i 对应于球面上的一点

$$\xi_i=\frac{2x_i}{1+|z_i|^2},\quad \eta_i=\frac{2y_i}{1+|z_i|^2},\quad \zeta_i=\frac{|z_i|^2-1}{|z_i|^2+1}.$$

(ξ_i,η_i,ζ_i) 可以看成为过球面的单位矢量,命 θ 是这二单位矢量的夹角,则

$$\cos\theta=\frac{4x_1x_2+4y_1y_2+(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}$$

$$=\frac{2(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)+(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1}{1+|z_1z_2|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1}=\left|\frac{z_1-z_2}{1+z_1\bar{z}_2}\right|^2,$$

因此

$$\theta=\pm2\operatorname{tg}^{-1}\left|\frac{z_1-z_2}{1+z_1\bar{z}_2}\right|.$$

以往我们常用 $\frac{1}{|z|}<\varepsilon$ 作为∞点的邻域,现在看来是有据的了,因为

$$[z_1, \infty] = 2\,\mathrm{tg}^{-1}\left|\frac{1}{z_1}\right|.$$

命

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

是一酉变换，即

$$|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = |\beta|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad \alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} = 0, \tag{1}$$

则

$$[w_1, w_2] = [z_1, z_2],$$

由于

$$w_1 - w_2 = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} - \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z_1 - z_2)}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)},$$

及

$$1 + w_1\bar{w}_2 = 1 + \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta}\ \frac{\bar{\alpha}\bar{z}_2 + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{z}_2 + \bar{\delta}} = \frac{1 + z_1\bar{z}_2}{(\gamma z_1 + \delta)(\bar{\gamma}\bar{z}_2 + \bar{\delta})}.$$

由于 $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$，可知

$$[w_1, w_2] = [z_1, z_2].$$

由此可得如果

$$f_1, \cdots, f_n, \cdots$$

球一致收敛于 f，则

$$g_\nu = \frac{\alpha f_\nu + \beta}{\gamma f_\nu + \delta},$$

也球一致收敛于

$$g = \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}.$$

其中 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ 适合条件 (1).

如果不用球面语言(或椭圆几何的语言)，我们可用以下的定义：

1. 如果 z_0 非 f 的极点，则在 z_0 的邻域内 $f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$ 的意义就是通常的意义.

2. 如果 z_0 是 f 的极点，则在 z_0 的邻域内 $f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$ 的意义是 $\frac{1}{f_n(z)}$ 一致收敛于 $\frac{1}{f(z)}$. (注意，此邻域内一定不包含 $f_n(z)$ 的零点.)

§11. 亚纯函数的正规族

定理 1. 命 $\{f_\nu(z)\}$ 是在域 G 上的一族亚纯函数. 在 w 平面上有一个区域 D，这些函数不取 D 内的数值，则 $\{f_\nu(z)\}$ 成一正规族.

证. 命 A 是 D 的一内点，作以 A 为中心，δ 为半径完全包含在 D 内的闭圆，则

$$|f_\nu(z) - A| > \delta,$$

命

$$g_\nu(z)=\frac{\delta}{f_\nu(z)-A},$$

则 $g_\nu(z)$ 在 G 上有则而且有界（$|g(z)|<1$）. 故 $\{g(z)\}$ 成为正规族.

考虑 $f(z)$ 的任一无穷子集合，则对应的 $g(z)$ 中包有一个一致收敛的贯 $g_n(z)$，命 $g_0(z)$ 为其极限函数，因此可知 $\frac{1}{g_n(z)}$ 球收敛于 $\frac{1}{g(z)}$，因而 $f_n(z)$ 球收敛于

$$f_0(z)=\frac{\delta}{g_0(z)}+A.$$

附记. 有以下更深刻的结果，但不在此证明了，一个亚纯函数族，如果不取一曲线上的点，则成一正规族. 更深刻些：

定理 2. 一个在域 D 上解析的函数族 $\{f_\nu(z)\}$，如果其值均不取两点 (a, b) 其中 $a\neq b$，则 $\{f_\nu(z)\}$ 为正规族.

定理 3. 一个在域 D 上的亚纯函数族，如果不取三值 (a, b, c) 其中 $a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$，则成为正规族.

现在讲几个容易推出的结果.

定理 4 (Montel). 假定 $f(z)$ 是 z 的解析函数. 在半条 $S: a<x<b$，$y>0$ 中有则. 假定 $f(z)$ 在 S 中有界. 如果 $a<\xi<b$，

$$\lim_{z\to\infty} f(\xi+iy)=l,$$

则对任一 $\delta>0$，在 $a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta$ 中，当 $y\to\infty$ 时 $f(z)$ 一致收敛于 l.

证. 在矩形 R

$$a<x<b,\ 0<y<2$$

中考虑函数族

$$f_n(z)=f(z+in),$$

这是一个囿族，而且对任一 $\lambda(0<\lambda<2)$ 当 $n\to\infty$，$f_n(\xi+\lambda i)\to l$，由Vitali 定理，在 $a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta$，$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$ 中，$f_n(z)\to l$，这证明了本定理.

用保角变换 $z=i\log w$，上定理变为

定理 5. 如果 $\phi(w)$ 在角 $\alpha<\arg w<\beta(|\alpha-\beta|<\pi)$ 中有界，如果对某一 θ，

$$\lim_{r\to\infty}\phi(re^{i\theta})\to l(\alpha<\theta<\beta),$$

则在 $\alpha+\delta\leqslant\arg w\leqslant\beta-\delta$ 中 $\phi(w)$ 一致地趋于 l.

定理 6 (Picard). 一非常数的整函数 $f(z)$ 取所有的有限值，最多仅有一例外而已.

证. 在 $|z|<1$ 内研究

$$f_0(z)=f(z),\ \cdots,\ f_n(z)=f(2^n z),\ \cdots.$$

这族在 $z=0$ 有界，如有二个例外值，则 $\{f_n(z)\}$ 为一正规族. 由第八章 § 10 定理 1 可知，则一定有子贯 $f_{n_\nu}(z)$ 在 z 平面上任一有限部分一致收敛于一整函数 $f(z)$，我们开始假设 $f_{n_\nu}(z)$ 即 $f_n(z)$. 当 $|z|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，

$$|f_n(z)|\leqslant M.$$

即当 $|z|\leqslant 2^{n-1}$ 时，

$$|f(z)| \leqslant M.$$

一有上界的整函数仅能是常数（Liouville 定理）。与题设相矛盾．

定理 7（Schottky）。如果在 $|z| \leqslant 1$ 内 $f(z)$ 有则，而且不取 0 与 1，则当 $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ 时，

$$|f(z)| < \Omega(|f(0)|).$$

此处 Ω 是一正数仅依赖于 $f(0)$．

证．研究适合于 $f(0) = a_0$ 及定理假定的函数族．由定理 2，成一正规族，而且在 $z = 0$ 时有限，故由第八章 § 10 定理 1 可知：在 $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ 中，

$$|f(z)| < \Omega(|f(0)|).$$

第十章　保角变换

§1. 重要内容概要

在保角变换的理论中最主要的结果当然是我们屡次提到的 Riemann 映照定理.

定理 1——基本定理（Riemann）. 任何一个单连通域 G，如至少有两个不同的边界点，一定可以一对一地，保角地映照到单位圆的整个内部，这一映照函数被以下的条件唯一决定：G 内一点及一过此点的方向变为单位圆内一点及过该点的一个方向.

说得更精确些，单位圆内的一点不妨假定它是 $w=0$，方向是沿 x 轴正向，则结果可转述为：命 z_0 是 G 的内点，一定有一而且唯一的保角变换把 G 一一地变为单位圆的整个内部，而且 $f'(z_0)>0$.

逆变换

$$z=g(w)$$

把单位圆变为 G，这逆变换有下列性质：(i) 在 $|w|<1$ 中 $g(w)$ 是单值解析函数，(ii) 如果

$$g(w_1)=g(w_2),\quad |w_1|<1,\ |w_2|<1,$$

则 $w_1=w_2$. 这样的函数 $g(w)$ 称为单叶函数. 因此，单位圆上全部单叶函数的探讨，就等价于研究全部单连通域.

命

$$g(w)=a_0+a_1w+a_2w^2+\cdots,\quad |w|<1,$$

则必有 $a_1\neq 0$，因此函数 $\dfrac{g(w)-a_0}{a_1}=h(w)$ 依然是单叶函数. 所以只需研究

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots,\quad |z|<1$$

形式的单叶函数而不失去其普遍性. 把一个单叶函数看成为无穷维空间的一个点 $(a_2, a_3,\cdots)$，这些点所成的集合的结构如何？这是单叶函数论的中心问题，但是这是十分困难的问题. Bieberbach 猜测，这一集合包在一个无穷维体

$$|a_n|\leqslant n$$

之中，这是数学上的著名难题.



图　41

Riemann 定理解决了单连通域的内部问题，边界可能十分复杂. 例如，由 $\frac{1}{2}$ 到 1 作一线段把这一线段和单位圆的圆周作为边界，依然是一个单连通域，用此方法可以得出十分复杂的边界. 但 Riemann 定理告诉我们在研究内部映照的时候，边界是无关紧要的，这内部映象反映在边界上，可能既不是一对一，又不是连续的，因为如果是一对一且连续的，则单位圆周将变为 Jordan 曲线，关于这我们有以下的：

定理 2. 任何一个以 Jordan 曲线为周界的域 G，可以一对一地保角地映到单位圆的整个内部，而且这变换在单位圆和 G 的闭包上仍是连续的，使得 Jordan 曲线和单位圆

周之间也成为一个一一对应双向连续的关系，并且方向相同．如果在 Jordan 曲线上任取三点，单位圆周上也任取三点，但它们是同向的，则有一个而且唯一的一个，把 Jordan 曲线上的三点依次变为圆周上的三点，而且有以上所讲的性质．

这定理不但说明了边界关系，而且指出了 Jordan 曲线的一个表达方法：$g(w)$ 在单位圆内解析，而 $g(e^{i\theta})$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 就描述了 Jordan 曲线．命

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n,$$

则 Jordan 曲线一定可以表为 Fourier 级数

$$\tau(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

的形式，即命 $a_n = \alpha_n + i\beta_n$，

$$x = \varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta),$$

$$y = \psi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \sin n\theta + \beta_n \cos n\theta).$$

注意，$\varphi(\theta)$ 是 $\psi(\theta)$ 的共轭 Fourier 级数，除去一常数可由 $\psi(\theta)$ 唯一决定．给与任一连续函数 $\psi(\theta)$，我们有一 Fourier 级数（用 $(c,1)$ 求和法，这 Fourier 级数也恰巧代表 $\psi(\theta)$）．但问题并不如此简单，其中包含了一个一一对应问题，即需要由

$$\varphi(\theta_1) = \varphi(\theta_2),\quad \psi(\theta_1) = \psi(\theta_2),\quad 0 \leqslant \theta_1,\ \theta_2 < 2\pi$$

而得出 $\theta_1 = \theta_2$ 来．因此研究 Jordan 曲线问题转变而为研究适合于以上条件的以 2π 为周期的连续函数的问题．

保角变换在流体力学、电学、弹性力学中都有广泛的应用，在应用的时候，我们要求用具体数据求出所需要的保角变换来，由于任一 Jordan 曲线都可以用多边形来迫近，因此，具体地把多边形变为单位圆（或上半平面）的计算方法也是十分重要的．（何况有时客观数据也仅仅知道其边界上的若干点．）关于这我们将介绍 Schwarz-Christoffel 法，但 Schwarz-Christoffel 法依然不是简单的数值计算方法．

§2. 单 叶 函 数

定义． 在 D 域内，一个解析单值而不取任何数值一次以上的函数 $f(z)$ 称为 D 内的单叶函数．

所谓不取任何数值一次以上的意义是：由 $f(z_1) = f(z_2)$，$z_1 \in D$，$z_2 \in D$ 可以推出 $z_1 = z_2$．

函数 $w = f(z)$ 把平面上的区域 D 映照到 w 平面的区域 D' 其间的关系是一一对应的．

如果 $f(z)$ 在 D 内单叶，则在 D 内 $f'(z) \neq 0$．若不然，假定 $f'(z_0) = 0$，则 $f(z) - f(z_0) = 0$ 在 $z = z_0$ 有 $n(\geqslant 2)$ 重根．由于 $f(z)$ 非常数，故有一圆 $|z - z_0| \leqslant \delta$ 在其上 $f(z) - f(z_0) \neq 0$，在其内 $f'(z)$ 除 $z = z_0$ 外无零点．命 m 为 $|f(z) - f(z_0)|$ 在圆周上的下界．由 Rouché 定理（第七章，§9），如果 $0 < |a| < m$，$f(z) - f(z_0) - a$ 在

此圆内有 n 个根(它们无一是重根，因为 $f'(z)$ 在此圆内无其它零点)．这与 $f(z)$ 不取任何值一次以上相违背，因得所证．

单叶函数的单叶函数仍然是单叶函数．更具体些：如果 $f(z)$ 在D内单叶，其值包含于 D' 内，$F(w)$ 在 D' 内单叶，则 $F(f(z))$ 在D内单叶．

§3. Taylor 级数求逆

定理 1. 命 $f(z)$ 在 $z=0$ 有则，$f'(0)\neq 0$，则有一 ρ 存在，在 $|z|\leqslant\rho$ 中 $f(z)$ 是单叶的．

更精确些有

定理 2 (Landau)．命

$$w=f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots,\quad a_1\neq 0$$

在 $|z|\leqslant R$ 中有则且 $|w|<M$，则它有一逆函数 $z=g(w)$ 在 $|w|<\phi(M,R|a_1|)$ 中是有则单值的，而且 $|g(w)|<R$，此处 ϕ 是一个仅与 M，R，$|a_1|$ 有关的函数．

证．先设 $a_1=1$，$R=1$．

由最大模原理

$$\max_{|z|=r}|a_2+a_3z+a_4z^2+\cdots|\geqslant|a_2|,\quad 0<r<1,$$

并且左边是 r 的增函数．由

$$\max_{|z|=r}|f(z)-z|=r^2\max_{|z|=r}|a_2+a_3z+a_4z^2+\cdots|,$$

可知

$$\frac{1}{r}\max_{|z|=r}|f(z)-z|$$

随 r 而趋于 0，故有一 R'，在 $0<r<R'$ 中，

$$\phi(r)=r-\max_{|z|=r}|f(z)-z|=r\left(1-\frac{1}{r}\max_{|z|=r}|f(z)-z|\right)>0.$$

因此，当 $o<r<R'$ 及 $|z|=r$ 时

$$|f(z)|=|z-\{z-f(z)\}|\geqslant|z|-|z-f(z)|\geqslant\phi(r)>0,$$

即在 $|z|<R'$ 中，原点是 $f(z)$ 的唯一零点．

取一固定的 r，当 $|y|<\phi(r)$ 时考虑积分

$$I(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)-y}dz.$$

当 $y=0$ 时，这积分的数值等于 1，其原因是 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r<R'$ 中只有一个原点是一级零点而无极点．当 $|y|<\phi(r)$ 时，在 $|z|=r$ 上 $|f(z)|\geqslant\phi(r)>|y|$，所以 $I(y)$ 是 y 的连续函数，因此当 $|y|<\phi(r)$ 时

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)-y}dz=1.$$

即给一 y 适合于 $|y|<\phi(r)$，方程式 $f(z)=y$ 在 $|z|<r$ 中有一且唯一解．这就是，逆函数 $z(y)$ 在 $|y|<\phi(r)$ 内是单值的．

由留数定理知道

$$z(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z\frac{f'(z)}{f(z)-y}dz.$$

故在 $|y|<\phi(r)$ 中，$z(y)$ 是 y 的有则函数.

问题归结为找一适当的 r 使 $\phi(r)>0$. 首先，证明 $M\geqslant 1$. 由于 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant 1$ 中有则，

$$\max_{|z|=1}|f(z)|=\max_{|z|=1}\left|\frac{f(z)}{z}\right|=\max_{|z|=1}|1+a_2z+\cdots|\geqslant 1.$$

其次，如取 $r=\frac{1}{4}M$ 即能达到目的. 由 Taylor 系数的 Cauchy 估计

$$\phi\left(\frac{1}{4M}\right)\geqslant r-\sum_{2}^{\infty}Mr^n=r-\frac{Mr^2}{1-r}.$$

由于 $\frac{1}{1-r}=\frac{4M}{4M-1}\leqslant\frac{4}{3}$，故

$$\phi\left(\frac{1}{4M}\right)\geqslant r-\frac{4Mr^2}{3}=\frac{1}{6M}.$$

因此，当 $|w|<\frac{1}{6M}$ 时，逆函数 $z=g(w)$ 有则，而且在其中 $|g(w)|\leqslant 1$. 回到一般情况. 命

$$F(z)=\frac{f(Rz)}{Ra_1},$$

则 $F(0)=0$，$F'(0)=1$，而且当 $|z|\leqslant 1$ 时

$$|F(z)|\leqslant\frac{M}{R|a_1|}.$$

故 $F(z)$ 适合于以上的条件，只需把M换为 $\frac{M}{R|a_1|}$ 即是. 因此当 $|w|<R|a_1|/6M$ 时 $w=F(z)$ 有逆函数 $z=G(w)$，它是有则，而且 $|G(w)|\leqslant 1$.

命 $Rz=z'$，则

$$f(z')=Ra_1F(z'/R),$$

故

$$\frac{z'}{R}=G\left(\frac{w}{Ra_1}\right),\quad z'=RG\left(\frac{w}{Ra_1}\right).$$

这式证明，当

$$\left|\frac{w}{Ra_1}\right|<\frac{R|a_1|}{6M}$$

时，z' 是有则函数，而且 $|z'|<R$，即

$$|w|<\frac{R^2|a_1|^2}{6M}=\phi(M,R|a_1|)$$

适合所求.

附记. 如果 $a_0=f(0)\neq 0$，我们的定理依然成立，只须把 $w-a_0$ 来代替 w 即得. 同样可以用 $z-z_0$ 来代替 z，而得出任一点的逆函数定理.

§4. 域的映象

假定 $f(z)$ 在域 D 内解析，$f'(z)\neq 0$，又设 E 为 $f(z)$ 在 w 平面上的象点集合．由上节已知在 E 上的任一点的充分小的邻域中逆函数 $z=g(w)$ 是有则的单值的，也就是如果 $f(a)=b$，则绕 b 作一小圆，其中的任一数值 b'，一定有一与 a 邻近的数 a'，使 $f(a')=b'$．今往证：对应 D 中的 w 的数值成一域 D'．

证．从刚才说过的话已知 D' 是开集．因此所待证的是 D' 是连通的．设 w_1 及 w_2 为 D' 任意两点，则它们至少各有一原象点 z_1，z_2，在 D 内可作一折线 C 把 z_1，z_2 联起来，这折线以 $z(t)$ 表之，而且 $z(t_1)=z_1$，$z(t_2)=z_2$．C 上的任一点都是内点．在 w 平面上对应的曲线以 C' 表之：$w[z(t)]$，当 $t=t_1, t_2$ 时 $w_1=w(z_1)$，$w_2=w(z_2)$．C' 的点也全是内点，这证明了 D' 的连通性．

要注意的是 D' 十分可能是多叶域，因为 $f'(z)\neq 0$ 并不保证 $f(z)$ 是单叶函数．我们再看 $f'(a)=0$ 的情况，此时

$$w=f(z)=b+a_k(z-a)^k+\cdots,\quad a_k\neq 0,\ k>1.$$

为简单起见命 $w-b=S$，$z-a=t$，则

$$S=a_kt^k(1+p_1t+p_2t^2+\cdots),$$

在 $t=0$ 附近

$$(1+p_1t+p_2t^2+\cdots)^{1/k}=1+q_1t+q_2t^2+\cdots,$$

即得

$$S=a_kt^k(1+q_1t+q_2t^2+\cdots)^k,$$

即

$$S^{1/k}=a_k^{1/k}t(1+q_1t+q_2t^2+\cdots\cdots).$$

这函数有逆函数

$$t=g(S^{1/k}),$$

即得原函数的逆函数是

$$z=a+b_1(w-b)^{1/k}+b_2(w-b)^{2/k}+\cdots\cdots.$$

绕 b 一圈，有 k 分支轮转，即由 $(w-b)^{1/k}$，$(w-b)^{1/k}e^{\frac{2\pi i}{k}}$，$\cdots\cdots(w-b)^{1/k}e^{\frac{2\pi i}{k}(k-1)}$ 轮转而得 k 个函数．这样的点称为歧点，而称 k 为这歧点的重数．由于 $f'(z)$ 的零点是孤立的，因此在 D 内的任一闭子集中仅有有限个这样的歧点，如果我们考虑"Riemann"面，我们将会证明，$w=f(z)$ 也是把域变为域的．

定理 1 (Weierstrass 单一定理)．如果 $f(z)$ 在单连通域 D 内有则，则 $f(z)$ 是单值的．

这定理可用解析延拓法证明．

§5. 单叶函数贯

定理 1. 一致收敛的单叶函数贯的极限仍然是单叶函数或常数．

例子 $f_n(z)=\frac{z}{n}$ 告诉我们：极限是常数的情况是存在的．更确切些：如果对任一 n，$f_n(z)$ 在 D 内是单叶的，而且在 D 内 $f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 D 内仍然单叶，或为常数。

证．我们已经知道，在 D 中 $f(z)$ 是解析的，单值的．如果不单叶，则有二点 z_1，z_2 在 D 中，而 $f(z_1)=f(z_2)=w_0$，以 z_1，z_2 为中心各作一圆，既不重叠又全在 D 内，并且 $f(z)=w_0$ 在圆周上无解（除 $f(z)$ 是常数外，这是经常可能的）．命 m 是 $|f(z)-w_0|$ 在这两圆上的下界，取 n 充分大使在两圆周上，$|f(z)-f_n(z)|<m$，则由 Rouché 定理，函数

$$f_n(z)-w_0=\{f(z)-w_0\}+\{f_n(z)-f(z)\}$$

的根数与 $f(z)-w_0$ 相等，即至少有二根，即 $f_n(z)$ 非单叶，这是矛盾的，定理得证。

§6. 边界与内部

定理 1. 命 C 是一 Jordan 曲线，包有一域 D．命 $w=f(z)$ 是 z 的一解析函数，在 D 及 C 上有则，把 C 一一地映为另一闭 Jordan 曲线 C'，则在 D 内 $f(z)$ 是单叶的。

证．命 D' 代表 C' 所包的域。

假定 z_0 是 D 内一点，则 $f(z_0)$ 不等于 $f(z)$ 在 C 上的数值，命 Δ_C 表示绕 C 的变化，则

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C\log(f(z)-f(z_0)) \tag{1}$$

等于 $f(z)-f(z_0)$ 在 C 内的零点数，故是一正整数（因为至少有一根），但这也等于

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C'}\arg(w-w_0),\quad w_0=f(z_0), \tag{2}$$

如果 w_0 在 C' 外，(2) 等于 0，如 w_0 在 C' 内，(2) 等于 ±1（其符号依赖于正向或反向）．由 (1) 知 w_0 在 C' 之内，C' 依正向行走，故 $f(z)$ 在 D 内取 w_0 一次，而且仅有一次，此示 $f(z)$ 完全落在 D' 内，但 D' 的点也都是 D 的象点，因为否则在 D 内还有别的边界点与假设矛盾．所以 D 单叶地变为 D'.

附记 1．以上的假定"$f(z)$ 在圆周上解析"可以减弱些：如果 C 上有些点仅连续而不解析也成。

假定 z_1 是边界上的一个奇点，在 z_1 附近作一内向小圆弧，以这些圆弧代替 z_1 的曲线部分，所得的一曲线以 C_1 表之，在 C_1 内的零点数等于

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_1}\arg\{f(z)-w_0\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz,$$

如果在 z_1 的邻域内有 $f'(z)=O(|z-z_1|^a)$，$a>-1$，则当 $C_1\to C$ 时，沿 C_1 的积分趋于 C 的积分.

附记 2．在周界上 $f(z)$ 也可能有一极点，如此则 D' 拓展到 ∞，如果这一极点是一阶的，边界的其它部分相当普通，则以上的讨论仍然正确．先来一变形把这一极点变为 $z=0$，而且把这区域 D 变成为 $Rz\geqslant 0$ 上的一部分，无妨假设 $f(z)$ 在这点的留数为 1（否则除以一常数即可），故 $f(z)$ 可表为

$$w=f(z)=\frac{1}{z}+g(z),$$

此处 $g(z)$ 在D内有则且有界,因此对D内的 z 有

$$\boldsymbol{R}w\geqslant\min\boldsymbol{R}\{g(z)\},$$

命之为 a，命 $b<a$，则当 $z\in D$，$|w-b|\geqslant a-b$，故

$$\zeta=\frac{1}{w-b}=\frac{z}{1+zg(z)-bz}$$

在 D 内有则，上述定理可以直接用到ζ上,由于 w 是ζ的单叶函数,这定理也可以用到 $w=f(z)$ 上.

但这结果对高次的极并不正确.

例 1. 命 $w=\frac{1}{i}\frac{z+1}{z-1}$，若 $z=e^{i\theta}$，则

$$w=\frac{1}{i}\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}=-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

当 z 描绘单位圆时，即 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 时，w 描绘实轴从 $-\infty$ 到 $+\infty$，$|z|=1$ 的周界上只有一单极点，故 z 平面上的单位圆，单叶地映成上半 w 平面，这一事实是已知的事实.

例 2. 命

$$w=i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3,$$

命 $z=e^{i\theta}$，则 $w=-\operatorname{ctg}^3\frac{\theta}{2}$，这也建立了 z 平面的单位圆周与 w 平面上实轴的一一对应关系，但由于边界上有一三重极点，这二曲线所包的域并不一定一一对应，确切些说：

$$w=i\left(\frac{x+iy+1}{x+iy-1}\right)^3$$
$$=i\frac{(x^2+y^2-1)^3-12(x^2+y^2-1)y^2}{[(x-1)^2+y^2]^3}+\cdots,$$

而 $v=0$ 对应于

$$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2\sqrt{3}y-1)(x^2+y^2+2\sqrt{3}y-1)=0,$$

这表三个圆．若 z 在此三圆之外，则 $v>0$，在一圆之外，二圆之内也有 $v>0$，所以有三个区域都映为上半平面（见图，有阴影部分），同样，三个区域映为下半平面（图上空白部分）.

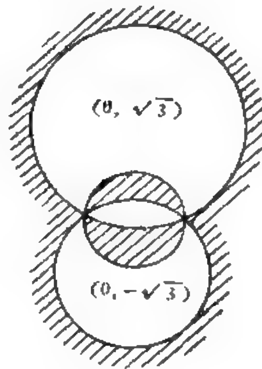


图 42

§7. Riemann 映照定理

定理 1 (Riemann). w 平面上的任何一个单连通域 D，如果它至少有两个边界点，我们一定有一单叶函数 $w=f(z)$，它把 z 平面上的单位圆变为 w 平面上的D域.

证. 假定 $w=f(z)$ 是这种的函数，则其逆函数 $z=g(w)$ 在D内有则，有界 ($|g(w)|<1$). 考虑在D内有则有界的函数类，并且适合于 $g(w_0)=0$，$g'(w_0)=1$，

这儿 w_0 是 D 内的一定点，这些函数将 D 映照到其他域(今后称此函数类为 C 类).

1) 确有这样的函数类存在. 命 a, b 是两边界点，考虑函数

$$\zeta = \sqrt{\frac{w-a}{w-b}},$$

当 w 过一单连通域 D 时，它不能画出一个分开 a 与 b 的封闭曲线，即 $\zeta(w)$ 在 w 内是单值的，由于根号下的函数是线性的，它不能二次取同一数值，故如果我们先在一点取定了平方根的符号，则 $\zeta(w)$ 也有此性质，故 $\zeta(w)$ 把 D 单叶地变为 ζ 平面上一域 D'，如果我们取平方根的另一符号$\left(\text{即函数} \sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \text{的另一分支}\right)$，则 D 变为另一域 D''，因此 D' 和 D'' 是两个以原点为对称的域，如果 C' 是 D' 的任一内点，则 $C''=-C'$ 是 D'' 的内点，函数 $\tau=\frac{1}{\zeta-C''}$ 在 D' 上是单值、有则有界的函数，减以 $\tau(w_0)$，并除以 $\tau'(w_0)$，即得一所需的函数.

2) 命 $g(w)$ 是 C 类上的函数，以 $M(g)$ 表 $|g(w)|$ 在 D 内的最大值. 命 ρ 表示 $M(g)$ 的下确界(对所有的 $g\in C$ 而言). 今往证明，C 类中必有一函数 $h(w)$ 使 $M(h)=\rho$.

如果不然，C 中必有一组函数 $g_1, g_2, \cdots$ 使

$$\lim_{n\to\infty} M(g_n)=\rho.$$

即给予任一 $\varepsilon>0$，有一整数 N 存在，使 $n>N$ 时

$$M(g_n)<\rho+\varepsilon,$$

即 $g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots$ 有同一的上界，以 B 表之. 今往证明，$\{g_n\}$ 有一子贯在 D 内的任一域内一致收敛，用前面已经叙述过的 Cantor 对角线法，可以取得一个子贯，它在 D 内一处处稠密的可数集上——例如有理点集——有极限存在. 由 Vitali 定理，这函数贯在 D 内的任一闭子域中一致收敛于一极限函数，不妨假设，这就是原来的函数贯 $\{g_n(w)\}$，并命 $g(w)$ 是其极限函数，由 § 5 可知 $g(w)$ 属于 C 类而且 $M(g)=\rho$. 由此可知 $\rho>0$.

3) 函数 $g(w)$ 把 D 变为圆 $|z|<\rho$. 命 D' 是 $z=g(w)$ 把 D 所映成的域，它一定包含在 $|z|<\rho$ 之内. 今往证 D' 就是圆 $|z|<\rho$. 假定 D' 有一边界点 ζ_0 适合于 $|\zeta_0|<\rho$，今将由此而推出类 C 中有一函数 $h(w)$ 使 $M(h)<\rho$. 这和 ρ 是 $M(g)$ 的下确界的假定相违背.

考虑函数

$$\zeta_1(\zeta)=\rho\sqrt{\frac{\rho(\zeta-\zeta_0)}{\rho^2+\bar{\zeta}_0\zeta}},$$

它在 D' 内有则，而且 $M(\zeta_1)=\rho$，取定一分支，作函数

$$\zeta_2(w)=\frac{\rho^2(\zeta_1-\zeta_1(0))}{\rho^2-\bar{\zeta}_1(0)\zeta_1},$$

则 $\zeta_2(w_0)=0$，$M(\zeta_2)=\rho$，$\zeta_2(w)$ 在 D 内有则，在 $w=w_0$ 时，其微商是 $\frac{\rho+|\zeta_0|}{2\sqrt{-\zeta_0\rho}}$，以此除 $\zeta_2(w)$，得 $\zeta_3(w)$，它属于 C 类，而

$$M(\zeta_3)=\rho\left|\frac{2\sqrt{-\zeta_0\rho}}{\rho+\sqrt{\zeta_0\bar{\zeta}_0}}\right|<\rho,$$

这与假定相违背.

在§1中所谈到的定理2，我们现在不加证明了。

§8. 第二系数的估计

定理1 (Cronwall). 命
$$w = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots$$
在 $|z| > 1$ 中是单叶的，而且处处有则，除去在无穷远点有一极点，则
$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leqslant 1.$$

特别有 $|a_1| \leqslant 1$，仅当 $w = z + \frac{e^{i\alpha}}{z}$ 时，取等号.

证.(面积原理). 由于函数是单叶的，它将圆 $|z| = r > 1$ 变为 w 平面上的一条 Jordan 曲线，并包有正面积，在这曲线上命 $w = u(\theta) + iv(\theta)$，则
$$u(\theta) + iv(\theta) = re^{i\theta} + \frac{a_1}{re^{i\theta}} + \frac{a_2}{r^2e^{2i\theta}} + \cdots\cdots,$$
命 $a_n = b_n + ic_n$，则
$$u(\theta) = r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(b_n\cos n\theta + c_n\sin n\theta),$$
$$v(\theta) = r\sin\theta - \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(b_n\sin n\theta - c_n\cos n\theta).$$
Jordan 曲线所包围的面积 (>0) 等于
$$\int_0^{2\pi} u(\theta)v'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\left\{r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(b_n\cos n\theta + c_n\sin n\theta)\right\}$$
$$\times\left\{r\cos\theta - \sum_{n=1}^{\infty} nr^{-n}(b_n\cos n\theta + c_n\sin n\theta)\right\}d\theta$$
$$= \pi\left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} nr^{-2n}(b_n^2 + c_n^2)\right) = \pi\left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{-2n}\right).$$
即得
$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{-2n} < r^2,$$
当 $r \to 1$ 时得出所求证的不等式.

如果 $|a_1| = 1$，则显然有 $a_2 = a_3 = \cdots = 0$，即得所证.

引理1 (Faber). 假定
$$f(z) = z + a_2z^2 + \cdots\cdots$$
在单位圆内是有则及单叶的，命 $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$，则 $g(z)$ 也是 $|z| < 1$ 内的有则单叶奇函数.

证. 1) 有则性. 已知
$$f(z^2) = z^2(1 + a_2z^2 + \cdots),$$

括弧内的表示式是有则的偶函数,而且除 $z=0$ 外没有其他零点,因此

$$h(z)=\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}=1+\frac{a_2}{2}z^2+\cdots$$

是有则的偶函数,而

$$g(z)=zh(z)=z+\frac{a_2}{2}z^3+\cdots,\quad |z|<1$$

是有则的奇函数.

2) 单叶性. 显然 0 只取一次,如果

$$g(z_1)=g(z_2)\quad 0<|z_1|<1,\ 0<|z_2|<1,$$

则

$$f(z_1^2)=(g(z_1))^2=(g(z_2))^2=f(z_2^2),$$

由此推得 $z_1^2=z_2^2$, 即 $z_1=\pm z_2$, 但

$$g(-z_1)=-g(z_1),\quad g(z_1)\neq 0,$$

故 $z_1=z_2$.

定理 2 (Bieberbach). 如果

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots$$

在 $|z|<1$ 中有则且单叶, 则 $|a_2|\leqslant 2$, 当且仅当 $f(z)=\dfrac{z}{(1+e^{i\theta}z)^2}$ 时取等号 $(\theta\geqq 0)$.

证. 由引理 1

$$\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{z+\frac{a_2}{2}z^3+\cdots}=\frac{1}{z}-\frac{a_2}{2}z+\cdots$$

在 $0<|z|<1$ 内是有则单叶函数,应用定理 1 到函数 $\dfrac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$ 上得不等式 $|a_2|\leqslant 2$, 当且仅当 $\dfrac{1}{g(z)}=\dfrac{1}{z}+e^{i\theta}z$ 时取等式,即

$$f(z)=\frac{z}{(1+e^{i\theta}z)^2}.$$

附记. 读者自证,这函数确是单叶函数.

§9. 推 论

今后我们常设

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots$$

在 $|z|<1$ 中有则且单叶.

定理 1 (Faber). 在 $|z|<1$ 中, $f(z)$ 取所有的绝对值小于 $\frac{1}{4}$ 的复数值,即 $w=f(z)$ 把 $|z|<1$ 变为一域,其中包有圆 $|w|<\frac{1}{4}$.

证. 假定 $f(z) \neq \gamma$，则函数

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/\gamma} = \frac{z + a_2 z^2 + \cdots}{1 - z/\gamma + \cdots} = z + \left(a_2 + \frac{1}{\gamma}\right) z^2 + \cdots$$

在 $|z| < 1$ 仍然是有则且单叶，由上节定理 2，可知

$$|a_2| \leqslant 2 \text{ 及 } \left|a_2 + \frac{1}{\gamma}\right| \leqslant 2,$$

则得

$$\left|\frac{1}{\gamma}\right| \leqslant 2 + |a_2| \leqslant 4, \quad |\gamma| \geqslant \frac{1}{4}.$$

附记 1. 易证，如果

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha} z)^2},$$

则 $f(e^{-i\alpha})$ 取 $\frac{1}{4} e^{-i\alpha}$，反之如果 $f(z)$ 在单位圆周上的值取 $\frac{1}{4} e^{-i\alpha}$，$f(z)$ 一定是以上形式.

附记 2. 定理 1 的不等式可以换为

$$|\gamma| \geqslant \frac{1}{2 + |a_2|}.$$

定理 2 (Beiberbach). 在 $|z| < 1$ 中，

$$\left|\frac{1 - |z|^2}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z}\right| \leqslant 2,$$

当且仅当

$$f(z) = \frac{(z - z_0)(1 - \bar{z}_0 z)}{[(1 - e^{i\alpha} z_0) + (\bar{z}_0 - e^{i\alpha} z)]^2}$$

及 $z = z_0$ 时取等号.

证. 取 $|z_0| < 1$，作

$$f\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 \cdots, \quad A_0 = f(z_0)$$

及

$$g(z) = \frac{1}{A_1}\left(f\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right) - A_0\right) = z + \frac{A_2}{A_1} z^2 + \cdots,$$

$g(z)$ 仍然是单叶函数，因此

$$\left|\frac{A_2}{A_1}\right| \leqslant 2,$$

但

$$A_1 = \frac{d}{dz} f\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right)\bigg|_{z=0} = f'\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right) \frac{1 - |z_0|^2}{(1 + \bar{z}_0 z)^2}\bigg|_{z=0} = f'(z_0)(1 - |z_0|^2),$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} f\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right)\bigg|_{z=0} = \frac{1}{2}\left(f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)\right).$$

由此得出所求证的不等式. 关于取等号的情况的证明不难，读者可自己证明.

§ 10. Koebe 之歪扭定理

定理 1 (Koebe). 当 $|z| = r < 1$ 时,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

当且仅当 $f(z) = \dfrac{z}{(1 + e^{i\alpha}z)^2}$ 时取等号.

证. 易见

$$\log f'(z) + \log(1 - |z|^2) = \int_0^z \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1 - |z|^2} \right) dz,$$

积分路线取由 0 到 z 的直线. 由上节定理 2 可知

$$|\log f'(z) + \log(1 - |z|^2)| \leqslant \int_0^r \frac{4}{1 - r^2} dr = 2\log\frac{1+r}{1-r}.$$

其实部给出

$$-2\log\frac{1+r}{1-r} \leqslant \log|f'(z)| + \log(1 - r^2) \leqslant 2\log\frac{1+r}{1-r},$$

即得

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

何时取等号,读者自证.

附记. 取虚部得

$$|\arg f'(z)| = |I \log f'(z)| \leqslant 2\log\frac{1+r}{1-r}.$$

这不是最佳结果, Голузин 求得的最佳结果是

$$|\arg f'(z)| \leqslant \begin{cases} 4 \arcsin|z| & \text{当 } |z| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi + \log\dfrac{|z|^2}{1 - |z|^2} & \text{当 } |z| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

由此立刻推得(用最大模原理)

定理 2. 在 $|z| \leqslant r$ 中不等式仍然成立.

定理 3. 假定 $|z_1| \leqslant r$, $|z_2| \leqslant r$, 则

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4 \leqslant \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^4.$$

定理 4 (Bieberbach). 当 $|z| \leqslant r$ 时,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}.$$

(仍然如定理 1 的所指的情况取等号.)

证. 1) 由定理 1

$$|f(z)| = \left|\int_0^z f'(z)dz\right| \leqslant \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|d\rho \leqslant \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho$$
$$= \int_0^r \left(\frac{2}{(1-\rho)^3} - \frac{1}{(1-\rho)^2}\right) d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

2）假定 $w = f(z)$ 把圆 $C(|z| = r)$ 变为平面上的曲线 Γ，命 w_0 是 Γ 上离 0 最近的一点。

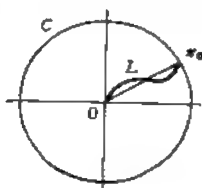


图 43

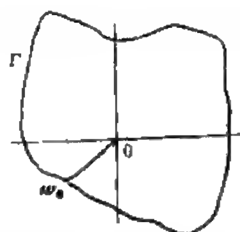


图 44

在 w 平面上作直线 $(w_0(0 \leqslant \rho \leqslant 1))$，在 z 平面对应的曲线是 L，如此则
$$|w_0| = \int_0^{w_0} |dw| = \int_L |f'(z)||dz|,$$
由于 $|dz| \geqslant d\lambda(|z| = \lambda)$，所以，由定理 1
$$|w_0| = \int_0^r |f'(\lambda e^{i\theta})|d\lambda \geqslant \int_0^r \frac{1-\lambda}{(1+\lambda)^3} d\lambda = \frac{r}{(1+r)^2}.$$
由此立刻推出

定理 5. 在 $|z| = r$ 上，$|f(z)| \geqslant \frac{r}{4}$.

§ 11. Littlewood 的估计

定理 1 (Littlewood). 当 $n \geqslant 2$ 时，
$$|a_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} n < en.$$

证. 由 § 8 引理 1，
$$g(z) = \sqrt{f(z^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad b_1 = 1, \ |z| < 1$$
是有则单叶函数. 由上节定理 4，当 $|z| \leqslant t < 1$ 时，
$$|f(z)| \leqslant \frac{t}{(1-t)^2}.$$
故当 $|z| \leqslant \sqrt{t} < 1$ 时，
$$|g(z)| < \sqrt{\frac{t}{(1-t)^2}} = \frac{\sqrt{t}}{1-t},$$
即 $w = g(z)$ 把圆 $|z| = \sqrt{t}$ 变为一条 Jordan 曲线 Γ 在圆 $|w| = \frac{\sqrt{t}}{1-t}$ 之内，故 Γ

所包的面积不大于圆面积 $\pi\left(\frac{\sqrt{t}}{1-t}\right)^2=\frac{\pi t}{(1-t)^2}$.

Γ 所包的面积等于

$$\int_0^{2\pi} u(\theta)dv(\theta)=\int_0^{2\pi}\left[\sum_1^{\infty}(b_n'\cos n\theta-b_n''\sin n\theta)t^{\frac{n}{2}}\right]$$

$$\times\left[\sum_1^{\infty}(b_n'\cos\theta-b_n''\sin n\theta)nt^{\frac{n}{2}}\right]d\theta$$

$$=\pi\sum_1^{\infty}n(b_n'^2+b_n''^2)t^n=\pi\sum_1^{\infty}n|b_n|^2t^n,$$

其中 $b_n=b_n'+b_n''i$. 则得

$$\pi\sum_1^{\infty}n|b_n|^2t^n\leqslant\frac{\pi t}{(1-t)^2},$$

$$\sum_1^{\infty}n|b_n|^2t^{n-1}\leqslant\frac{1}{(1-t)^2},$$

积分之,当 $0<r<1$ 时,

$$\sum_1^{\infty}|b_n|^2r^n\leqslant\int_0^r\frac{dt}{(1-t)^2}=\frac{r}{1-r}.$$

由于

$$\sum_1^{\infty}a_nr^n=\left(\sum_1^{\infty}b_nr^{\frac{n}{2}}\right)^2,$$

所以

$$|a_n|r^n=\left|\sum_{\nu=1}^{2n-1}b_\nu r^{\frac{\nu}{2}}b_{2n-\nu}r^{\frac{2n-\nu}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2n-1}(|b_\nu|^2r^\nu$$

$$+|b_{2n-\nu}|^2r^{2n-\nu})\left(\text{用了 }|ab|\leqslant\frac{|a^2|+|b|^2}{2}\right)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{2n-1}|b_\nu|^2r^\nu\leqslant\sum_1^{\infty}|b_\nu|^2r^\nu,$$

故得

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{r^{n-1}(1-r)}.$$

当 $n\geqslant 2$ 时,取 $r=\frac{n-1}{n}$, 则得

$$|a_n|\leqslant\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n<en.$$

§12. 星 形 区

定义. 一个 Jordan 曲线所包的域称为对其中一点 z_0 是星形的, 如果由 z_0 向外的射线只交曲线于一点.

引理 1. 如果 $w = g(z)$ 把圆 $|z| = r$ 变为相对 $w = 0$ 的星形的曲线，则在 $|z| = r$ 上恒有

$$\boldsymbol{R} z \frac{g'(z)}{g(z)} > 0,$$

并且反之亦真.

证. 以上所说即等价于 $g(re^{i\theta})$ 的辐角是 θ 的增函数，即

$$\frac{d}{d\theta} \boldsymbol{I} \log g(re^{i\theta}) > 0,$$

即

$$0 < \boldsymbol{I} \frac{g'(z)}{g(z)} \frac{dz}{d\theta} = \boldsymbol{I} iz \frac{g'(z)}{g(z)} = \boldsymbol{R} z \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

引理 2. 如果 $g(z)$ 在 $|z| < 1$ 中有则，及

$$g(z) = \frac{1}{2} + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots, \quad \boldsymbol{R} g(z) > 0,$$

则 $|b_n| \leqslant 1$.

证. 命 $g(z) = u + iv$ 及 $b_n = b_n' + ib_n''$，则

$$u = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty r^n (b_n' \cos n\theta - b_n'' \sin n\theta),$$

此处

$$b_n = b_n' + b_n'' i = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u e^{-in\theta} d\theta, \quad n \geqslant 1.$$

由于 $u > 0$，所以

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u d\theta = \frac{1}{r^n}.$$

当 $r \to 1$，即得所求.

引理 3. 设 $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ 把 $|z| < 1$ 单叶地映为 w 平面上一对 $w = 0$ 的星形区域，则在 $|z| < 1$ 内处处有

$$\boldsymbol{R}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0.$$

证. 由引理 1，我们只需证明对任一 $0 < r < 1$，$|z| < r$ 之象 B_r 亦是对于 $w = 0$ 的星形域即可. 设 w 是 B 之一点，则当 $0 < t < 1$ 时，一切点 tw 皆属于 B. 因此函数 $f^{-1}[tf(z)] = \phi(z)$ 适合 $\phi(0) = 0$，且在 $|z| < 1$ 中是正则的，$|\phi(z)| \leqslant 1$，因此在 $|z| < 1$ 有 $|\phi(z)| < |z|$ 设 $w_1 = f(z_1)$ 是 B_r 中的一点，即 $|z_1| < r$. 由上可知 $|f^{-1}(tw_1)| < |z_1| < r$，但 $tw_1 \in B$，因此 $tw_1 = f(z_0)$，$|z_0| < 1$. 以此代入上面的不等式，得 $|z_0| < r$，即 $tw_1 \in B_r$，引理证明.

又由调和函数的极值原理知，本引理的不等式在 $|z| < 1$ 内不能取等号.

定理 1 (R. Nevanlinna). 假定

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

在 $|z| < 1$ 内有则且单叶，$w = f(z)$ 将单位圆变为相对于 $w = 0$ 的星状域，则

$$|a_n| \leqslant n, \quad n = 2, 3, 4 \cdots,$$

(即在此特殊情况下，Bieberbach 猜想正确)且仅当 $f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$ 时取等号.

证. 由引理 3,

$$\mathbf{R}z\frac{f'(z)}{f(z)}>0,$$

故由引理 2 可知,

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=z\frac{1+2a_2z+\cdots}{z+a_2z^2+\cdots}=1+b_1z+\cdots+b_nz^n+\cdots,$$

$$|b_n|\leqslant 2.$$

即得

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}\ll 1+2z+2z^2+\cdots=\frac{1+z}{1-z},$$

(这儿用 $\Sigma a_nz^n\ll\Sigma b_nz^n$ 表示 $|a_n|\leqslant b_n$)

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}\ll\frac{2}{1-z},$$

即得

$$\log\frac{f(z)}{z}\ll\log\frac{1}{(1-z)^2},$$

$$\frac{f(z)}{z}\ll\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}.$$

即得 $|a_n|\leqslant n$ (这儿我们用了由 $A(z)\ll B(z)$ 可推出

$$\int_0^z A(w)dw\ll\int_0^z B(w)dw,\quad e^{A(z)}\ll e^{B(z)}$$

等事实),关于等号部分不再证明.

§13. 实 系 数

定理 1 (Dieudonnè Rogosinski). 假定

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

在 $|z|<1$ 内正则且单叶,如果 a_n 都是实的,则

$$|a_n|\leqslant n,\quad n=2,3,4\cdots.$$

证. 由于 $f(z)$ 是单叶的,所以当 $0<r<1$, $\theta\neq 0$、π 时

$$f(re^{i\theta})-f(re^{-i\theta})\neq 0,$$

即

$$r(e^{i\theta}-e^{-i\theta})+a_2r^2(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})+\cdots+a_nr^n(e^{ni\theta}-e^{-ni\theta})+\cdots\neq 0,$$

$$\sin\theta+a_2r\sin 2\theta+\cdots+a_nr^{n-1}\sin n\theta+\cdots\neq 0,$$

乘以 $\sin\theta$ 并利用 $\sin\theta\sin m\theta=\frac{1}{2}(\cos(m+1)\theta-\cos(m-1)\theta)$, 可得

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta)=1+a_2r\cos\theta+(a_3r^2-1)\cos 2\theta+\cdots\\+(a_{n+1}r^n-a_{n-1}r^{n-2})\cos n\theta+\cdots\neq 0\end{aligned}$$

$\psi(o, \theta) = 1 - \cos 2\theta > 0$，所以常有

$$\psi(r, \theta) > 0, \quad \theta \neq 0, \pi.$$

因此，函数

$$F(z) = 1 + a_2 r z + (a_3 r^2 - 1) z^2 + \cdots + (a_{n+1} r^n - a_{n-1} r^{n-2}) z^n + \cdots$$

在 $|z| < 1$ 上是正则的，且 $\boldsymbol{R}[F(z)] \geqslant 0$，由前节引理 2 知

$$|a_2 r| \leqslant 2, \ |a_3 r^2 - 1| \leqslant 2, \cdots, \ |a_{n+1} r^n - a_{n-1} r^{n-2}| \leqslant 2,$$

由此

$$|a_2| \leqslant \frac{2}{r}, \ |a_3| \leqslant \frac{3}{r^2}, \ |a_4 r^3 - a_2 r| \leqslant 2,$$

$$|a_4| \leqslant \frac{2}{r^3} + \frac{|a_2|}{r^2}, \cdots,$$

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{2}{r^n} + \frac{|a_{n-1}|}{r^2} \leqslant \frac{2 + |a_{n-1}| r^{n-2}}{r^n},$$

当 $r \to 1$ 时得

$$|a_n| \leqslant n.$$

§14. 把三角形变为上半平面

寻求一个函数 $w = g(z)$ 将 w 平面上以 $i\sqrt{3}, 0, 1$，为顶点的三角形内部变为 z 平面的上半平面．由 Riemann 定理可知一定有一一的保角变换把这三角形变为上半平面，且把 $(i\sqrt{3}, 0, 1)$ 变为实轴上三点 (a, b, c)，又有一实的 Möbius 变换把 (a, b, c) 顺次变为 $(-1, 0, 1)$．换言之：存在一函数 $w = g(z)$ 使 $i\sqrt{3} = g(-1)$，$0 = g(0)$，$1 = g(1)$．问题在于实际找出这个变换．考虑积分

$$w = c\int_0^z (t+1)^{-5/6} t^{-1/2} (1-t)^{-2/3} dt,$$

希望它合于我们的要求． 它确乎将 0 变为 0，当 z 沿实轴从 0 到 1 时，w 也从 0 沿实轴变到

$$c\int_0^1 (t+1)^{-5/6} t^{-1/2} (1-t)^{-2/3} dt = 1,$$

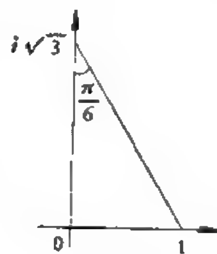


图 45

今往算出

$$\frac{1}{c} = \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma(n+1)} (-t)^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)} (-1)^n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} 2^{-1/2},$$

即函数

$$w=\frac{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^z(t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(1-t)^{-2/3}dt$$

把线段 $0\leqslant z\leqslant 1$ 变为 $0\leqslant w\leqslant 1$. 考虑当 z 在绕 1 跨过一个小的上半圆而从 1 变到 ∞ 时的情况，则 $(z-1)$ 变为 $(z-1)e^{-\pi i}$，因此

$$\begin{aligned}w&=\frac{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left[\int_0^1(t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(1-t)^{-2/3}dt\right.\\&\left.\quad+e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_1^z(t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(t-1)^{-2/3}dt\right]\\&=1+e^{\frac{2\pi i}{3}}\frac{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_1^z(t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(t-1)^{-2/3}dt,\end{aligned}$$

即 w 由 1 沿直线段 $1+e^{\frac{2\pi i}{3}}t$ 变到点

$$w_0=1+e^{\frac{2\pi i}{3}}\frac{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_1^\infty(1+t)^{-5/6}t^{-1/2}(t-1)^{-2/3}dt,$$

由于 $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=2$，这积分是收敛的.

再看当 z 绕 0 跨过一个小的上半小圆，而从 0 沿实轴变到 -1 的情况，此时 t 变为 $te^{\pi i}$，因此

$$\begin{aligned}w&=c\int_0^{-1}(t+1)^{-5/6}t^{-1/2}(1-t)^{-2/3}dt\\&=-c\int_0^1(1-t')^{-5/6}(-t')^{-1/2}(1+t')^{-2/3}dt\\&=-e^{-\frac{i\pi}{2}}c\int_0^1(1-t')^{-5/6}t'^{-1/2}(1+t')^{-2/3}dt'=i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\left(\text{此值由同法算出，但需用 } \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)$. 当 z 由 -1 变到 $-\infty$ 时，不难证出 w 由 $i\sqrt{3}$ 沿斜边变到 w_0.

因此，当 z 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时，w 正向地绕三角形一周. 同时在上半平面 $f(z)$ 是 z 的解析函数，因此 $z=f(w)$ 把三角形的内部变为上半平面.

更一般些，三角形 ABC 的三角各为

$$\angle A=\alpha\pi,\quad \angle B=\beta\pi,\quad \angle C=\gamma\pi,$$

则

$$w=k\int_{z_0}^z(t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt,\quad a<b<c$$

把三角形内部变为上半平面，而且 A, B, C 三点变为 a, b, c，这儿的 k 与 z_0 可由

$$A = k\int_{z_0}^{a} (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt$$

$$B = k\int_{z_0}^{b} (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt$$

来决定，即由 $A - B = k\int_{b}^{a} (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt$ 定出 k 来，再由其中之一定出 z_0 来.

习题 1. $w = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}}$ 把半平面变为等边三角形.

习题 2. $w = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^2)^{5/6}t^{1/3}}$ 把半平面变为三角各为 30°, 30°, 120° 的三角形.

§15. Schwarz 反射原理

定理 1. 设 G_1, G_2 为两个互不相交的域. 它们有一段共同的边界弧 C，设 C 为一 Jordan 曲线段，C 的任一内点都不是除 C 以外的 G_1 或 G_2 的其它边界点的聚点. 又设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 分别为 G_1 及 G_2 内的解析函数，在 $G_1 + C$ 及 $G_2 + C$ 上连续，且在 C 上有 $f_1(z) = f_2(z)$，则存在一个在 $G_1 + G_2 + C$ 解析的函数 $F(z)$，它在 G_1 等于 $f_1(z)$，在 G_2 等于 $f_2(z)$.

证. 我们定义 $G_1 + G_2 + C$ 上的单值连续函数 $F(z)$ 为

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{当 } z \in G_2; \\ f_2(z), & \text{当 } z \in G_2; \\ f_1(z) = f_2(z), & \text{当 } z \in C. \end{cases}$$

现在来证明 $F(z)$ 是解析函数，当 z 属于 G_1 或 G_2 时这是显然的，现设 z 属于 C，但作一可度长的闭围路 g 横跨 G_1, G_2（见 46 图）. 考虑积分

$$\int_g F(z)dz. \tag{1}$$

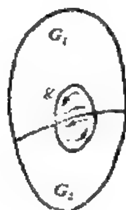


图 46



图 47

把这积分分解为两个积分，一个在 G_1 内一个在 G_2 内(见 46 图)，由于 $f_1(z), f_2(z)$ 在 G_1+C 及 G_2+C 上的连续性，这两个积分都等于零，因之积分 (1) 也等于 0，根据 Morera 定理，$F(z)$ 是一解析函数.

定理 2 (Schwarz 反射原理). 设域 G 位于上半平面，它的边界含有实轴上的一个线段（区间）C，C 具有和**定理 1** 的弧段 C 同样的性质，设 $f(z)$ 在 G 解析在 $G + C$ 上连续，

且在 C 上只取实值，则 $f(z)$ 可经 C 向 G 外作解析延拓(见图 47)。

证. 把 G 对实轴作反射，得另一区域 $\bar{G}$，在 $\bar{G}$ 上函数

$$f(z)=\overline{f(\bar{z})}$$

是有定义且解析的，$g(z)$ 在 $\bar{G}+C$ 上连续，且在 C 上有 $g(z)=f(z)$. 由定理 1 立可推出本定理。

习题. 如果定理 2 中 $f(z)$ 在 C 上不取实值，但 $f(z)$ 在 C 上所取的值都落在复平面上某一直线段 $\overline{AB}$ 上(即 $f(z)$ 把 c 连续地映为 $\overline{AB}$)，如何推出类似的结果？

§16. 把四边形变为上半平面

命 $0<k<1$，考虑积分

$$w=\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

当 z 沿实轴由 0 变到 1，则

$$w=\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

也沿实轴由 0 变到

$$K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

当 z 沿实轴由 1 变到 $\frac{1}{k}$，则

$$w=K+i\int_1^z\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

沿直线 $u=K$，从 K 变到 $K+iK'$，这儿

$$K'=\int_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}},$$

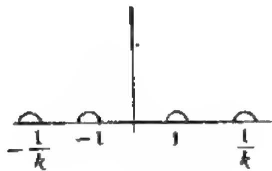


图 48

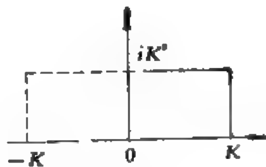


图 49

再当由 $\frac{1}{k}$ 变到 ∞，则

$$w=K+iK'-\int_{1/k}^z\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}$$

沿直线 $v=K'$，由 $K+iK'$ 变到 iK'，这儿用了

$$\int_{1/k}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}=K,$$

要证明此点并不困难，换变数 $kt=\frac{1}{\tau}$ 即得。

再考虑当 z 过实轴负向部分，同法可证当 z 沿实轴，由 0 而 -1，而 $\frac{-1}{k}$ 而 $-\infty$，则 w 由 0 变到 $-K$，而 $-K+iK'$ 而 iK'。

总之，当 z 由 $-\infty$ 到 ∞ 时$\left(\text{但须注意 } -\frac{1}{k},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{k} \text{ 诸点处都必须作一上半小圆，沿小圆过去}\right)$，则 w 过一长方形的边界，其边长各为 $2K$ 及 iK'，因之将上半面变到长方形

$$K,\ K+iK',\ -K+iK',\ -K.$$

函数

$$w=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

并不能用初等函数表示出来．它是一个所谓椭圆积分．它的反函数是 Jacobi 的椭圆正弦

$$z=\operatorname{sn} w=\operatorname{sn}(w;\ k),$$

它把矩形

$$[K,\ K+iK',\ -K+iK',\ -K]$$

$$\left(K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\ K'=\int_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}\right)$$

变为上半平面．

能不能找到这样的变换，把任意长宽的矩形变为上半平面，即给了 $L(>0)$，$M(>0)$，能否找到 C 与 k，使

$$L=CK,\ M=CK',$$

即求 k 使

$$\frac{M}{L}=\int_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}\Bigg/\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\varphi(k),$$

$\varphi(k)$ 在 $0<k<1$ 中是 k 的连续函数，而且

$$\lim_{k\to1}\varphi(k)=0,\quad \lim_{k\to0}\varphi(k)=\infty.$$

因此任给 $\frac{M}{L}$，一定有 k 存在，找到 k 后，再定出 C 来，即得所需的变换．

附记．$z=\operatorname{sn} w$ 在全平面上的情况，当 w 在实轴上 $[-K,K]$ 之间时，z 在实轴上 $[-1,1]$ 之间，由 Schwarz 反射原理，可知这函数可以解析延拓到矩形

$$[-K,\ -K-iK',\ K-iK',\ K]$$

之中，其中的数值对应于 z 的下半平面．

又线段 $[K,\ K+iK']$ 对应于 $\left(1,\ \frac{1}{k}\right)$，因此再由 Schwarz 原理可以拓展到矩形 $[K,\ 3K,\ 3K+iK,\ K+iK']$ 之中．不难证明

$$\operatorname{sn}(w+4K)=\operatorname{sn} w,$$
$$\operatorname{sn}(w+2K'i)=\operatorname{sn} w,$$

即 $\operatorname{sn} w$ 是一个有两周期 $2K'i$ 与 $4K$ 的函数．不但如此，除去 $w=iK'$ 及 $iK'+2K'im+4Kn$ 之外，它无处不解析．

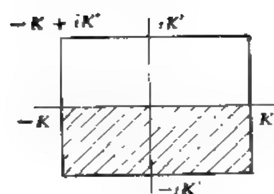


图 50

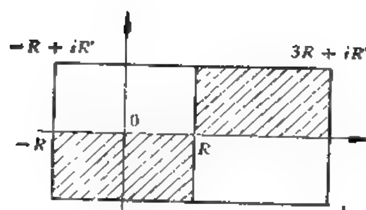


图 51

习题 1. 用 Schwarz 反射原理,求出 § 14 所定义的函数的反函数的全平面性质. 并证明,这函数也是有两个周期的。它的周期是 $4w+2w'$, $2w+4w'$, 这儿

$$w,\ w'=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$$

(如图 52).

习题 2. 函数

$$w=\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

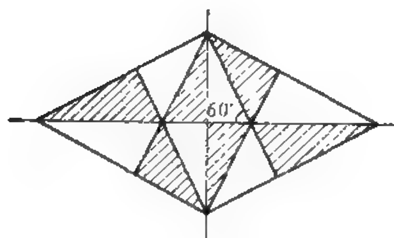


图 52

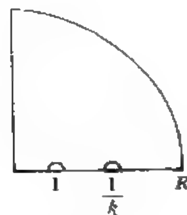


图 53

把 z 平面上的单位圆变为 w 平面上的方块(命 $z=(\zeta-i)/(\zeta+i)$).

习题 3. 证明

$$\int_0^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}.$$

(提示: 考虑如图 53 的迴道.)

§ 17. Schwarz-Christoffel 法——把多边形变为上半平面

更一般考虑积分

$$w=c\int_{-\infty}^z(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt+c_1,\tag{1}$$

这儿

$$-\infty<a_1<a_2<\cdots\cdots<a_n<\infty,$$

及

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n=n-2,\quad 0<\alpha_\nu<1,\ \nu=1,2,\cdots,n,$$

c 与 c_1 是常数. 我们考虑当 z 沿实轴由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时, w 的变化怎样 (当然当过 a_1,

$a_2, \cdots, a_n$ 时，作一个上半小圆绕过可能的奇异点 a_i)。

首先由于当 $t \to \infty$ 时，

$$(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1} = O(|t|^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n-n}) = O(|t|^{-2}),$$

故积分 (1) 是收敛的，而且当 t 沿上半小圆

$$t = a_\nu + \varepsilon e^{i\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad \varepsilon > 0$$

而积分时，这积分

$$O(\varepsilon^{\alpha_\nu}) = o(1).$$

当 z 在整个上半平面，积分 (1) 是解析的单值的.

先考虑

$$w = \int_{-\infty}^{z} (t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt \tag{2}$$

(即 $c=1$, $c_1=0$ 的情况). 当 z 沿实轴从 $-\infty$ 变到 a_1 时，

$$w = e^{\pi i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n-n)}\int_{-\infty}^{z}(a_1-t)^{\alpha_1-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{z}(a_1-t)^{\alpha_1-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt,$$

w 沿实轴由 0 变到

$$A_1 = \int_{-\infty}^{a_1}(a_1-t)^{\alpha_1-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt,$$

当 z 经上半小圆绕 a_1 后，再沿实轴由 a_1 变到 a_2 时，w 由 A_1 变到

$$A_2 = A_1 + e^{-(\alpha_1-1)\pi i}B_1.$$

更具体些，当 z 由 a_1 变到 a_2 时，w 画一线段

$$w = A_1 + e^{-(\alpha_1-1)\pi i}t, \quad 0 \leqslant t \leqslant B_1,$$

这儿

$$B_1 = \int_{a_1}^{a_2}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(a_2-t)^{\alpha_2-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt.$$

同样，当 z 由 a_2 变到 a_3 时，w 画一线段

$$w = A_2 + e^{-(\alpha_1+\alpha_2-2)\pi i}t, \quad 0 \leqslant t \leqslant B_2,$$

而

$$B_2 = \int_{a_2}^{a_3}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}(a_3-t)^{\alpha_3-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt.$$

命

$$A_3 = A_2 + e^{-(\alpha_1+\alpha_2-2)\pi i}B_2,$$

现在考虑线段 $\overline{A_1B_2}$ 与 $\overline{A_2A_3}$ 的夹角，由于 $\overline{A_1A_2}$ 及 $\overline{A_2A_3}$ 与 x 轴的斜角各等于 $-(\alpha_1-1)\pi$, $-(\alpha_1+\alpha_2-2)\pi$, 故 $\overline{A_1A_2}$ 与 $\overline{A_2A_3}$ 的夹角等于 $\alpha_2\pi$.

依法续行，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 各对应于 w 平面上的

$$A_1, A_2, \cdots, A_n,$$

而且 $\overline{A_{\nu-1}A_\nu}$ 与 $\overline{A_\nu A_{\nu+1}}$ 的夹角是 $\alpha_\nu\pi$. 最后，当 z 由 a_n 变形∞时，w 沿直线

$$w = A_n + t, \quad 0 \leqslant t \leqslant B_n$$

从 A_n 变到 $A_n + B_n$, 这儿

$$B_n = \int_{a_n}^{\infty} (t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt.$$

今往证明：$A_n + B_n = A_1$，也就是待证

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a_1-t)^{\alpha_1-1}\cdots(a_n-t)^{\alpha_n-1}dt = 0,$$

当然积分路线过 $a_1, \cdots, a_n$ 需过一小半圆.

由于被积函数在上半平面有则，画一以 R 为半径的大圆，上半平面的积分

$$= O(R^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-n+1}) = O(R^{-1}),$$

故当 $R\to\infty$ 时，积分趋于 0，利用 Cauchy 积分定理，立得所证.

图 54

因此，当 z 由 $-\infty$ 变到 ∞ 时，w 画一 n 边形，以

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

为顶点，A_ν 的角度等于 $\alpha_\nu\pi$.

由 § 6 定理 1，可知 (2) 把上半平面变为 n 角形，同样 (1) 把上半平面变为 n 角形，它的 n 个顶点是

$$A_\nu = c\int_{-\infty}^{\alpha_\nu} (t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt + c_1$$

在 A_ν 处的角度是 $\alpha_\nu\pi$.

习题 怎样的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$w = \int_{-\infty}^{z} (t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}(t-a_3)^{\alpha_3-1}dt$$

的反函数 $z=f(w)$ 才在整个 w 平面是单值函数，试证仅有三种可能性，即其三角形三角的度数各为

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$

提示：绕一点用 Schwarz 反射原理偶数次后回到原来的所在，因此 $\alpha_i = \frac{1}{a_i}$，这儿 a_i 是自然数，又有 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$，因此仅当

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1, \quad a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant 2$$

时，有此可能.

§ 18. 续

现在证明把上半平面变到多边形的一一保角映照，一定是上节中所讲的形式.

首先，由 Riemann 基本定理，必有函数 $w=f(z)$ 把上半 z 平面保角且一一地映照到多边形的内部 Δ 上去，我们约定：z 平面实轴上三点（例如 a_1, a_2, a_3）与 Δ 的边界上的三点（例如三顶点 A_1, A_2, A_3）相对应，由 § 1 引言中所述的定理 2，$f(z)$ 唯一地决定了，这函数把顶点 $A_4, \cdots, A_n$ 变为 x 轴上的 $n-3$ 个点 $a_4, \cdots, a_n$，现在来找出这函数的解析表达形式.

当 z 在实轴的每一段 (a_k, a_{k+1}) 上，$w = f(z)$ 画一线段 A_kA_{k+1}，由 Schwarz 对称原理，可以把这函数经这线段解析延拓到下半平面内去，这函数的解析延拓作出一保角映照，它把下半个平面映到依线段 A_kA_{k+1} 对称，Δ 的影子上去，它的影子是多边形 Δ'，这解析延拓又可以经任一线段 $(a_{k'}, a_{k'+1})$ 而被延拓到 z 的上半平面上来，这样的解析延拓所作出的保角映照，把上半 z 平面映到依 $A_{k'}A_{k'+1}$ 对称，Δ' 的影子 Δ'' 上去。

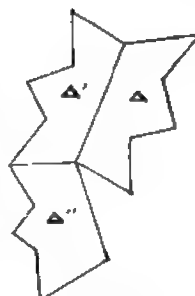


图 55

假定我们已经完成了一切可能的象上面所说的那样的解析延拓，一般说来，结果将是一个多值函数(可能是无限个值的函数) $w=F(z)$。对这函数来说，原来的 $f(z)$ 是它在上半平面内的一个单值分支。

假定 $w = f^*(z)$ 与 $w = f^{**}(z)$ 是函数 $F(z)$ 在上半平面的任意两个分支按照 $F(z)$ 的构成方式，由 f^* 到 f^{**} 是经过偶数次对称(反射)而来的，对任意两直线各作一次反射得一 Euclid 变换，即偶数次对称结果是

$$f^{**}(z) = e^{i\alpha}f^*(z) + a,$$

对下半平面来说这结论也是正确的。

考虑函数

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{d}{dz}\log f'(z),$$

由于在上半平面 $f(z)$ 是一一的保角映射，所以 $f'(z)$ 在上半平面 $\neq 0$，因此 $g(z)$ 在上半平面是解析的，又由

$$f^{**\prime}(z) = e^{i\alpha}f^{*\prime}(z),$$
$$f^{**\prime\prime}(z) = e^{i\alpha}f^{*\prime\prime}(z),$$

所以 $g(z)$ 是单值的，对下半平面可作同样的讨论。因此在整个 z 平面上，除 $z = a_k$ 之外，$g(z)$ 无处不解析，而是单值函数。由于 $z = \infty$ 变为多角形边上的某一点，而非顶点，因此 $g(z)$ 在无穷远点也是解析的。

我们现在看 $g(z)$ 在 $z = a_k$ 处的性质，取一个分支 $f(z)$，则在 $z = a_k$ 附近

$$f(z) = A_k + (z - a_k)^{\alpha_k}\{c_0 + c_1(z - a_k) + \cdots\}. \tag{1}$$

要证明此点可以考虑

$$(f(z) - A_k)^{1/\alpha_k} = \omega(z),$$

当 z 绕 a_k 画上半个小圆时 $f(z)$ 绕 A_k 画 $\alpha_k\pi$ 因此，当 z 通过 a_k 的直线时，$a(z)$ 过一经过 A_k 的直线段。由对称原理 $\omega(z)$ 可以展为

$$\omega(z) = c_1(z - a_k) + c_2(z - a_k)^2\cdots\cdots,$$

因而得出表达式 (1) 来。

由 (1) 推得，在 $z = a_k$ 附近

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{(\alpha_k - 1)\alpha_k c_0(z - a_k)^{\alpha_k-2} + \cdots}{\alpha_k c_0(z - a_k)^{\alpha_k-1} + \cdots}$$
$$= \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + c_0' + c_1'(z - a_k) + \cdots,$$

即 $g(z)$ 有一一阶极点，留数为 $\alpha_k - 1(\alpha_k \neq 1)$。

在整个平面上 $g(z)$ 有 n 个奇点，

$$G(z)=g(z)-\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}-\cdots-\frac{\alpha_n-1}{z-a_n}$$

是一个在整个平面上解析的函数(包括∞),因此它是一常数.

又由于 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处是有则的,

$$f(z)=d_0+\frac{d_{-p}}{z^p}+\frac{d_{-p-1}}{z^{p+1}}+\cdots$$

及

$$g(z)=\frac{p(p+1)\frac{d_{-p}}{z^p}+\cdots}{-p\frac{d_{-p}}{z^{p+1}}+\cdots}=-\frac{p+1}{z}+\frac{d_2'}{z^2}+\cdots.$$

于是 $g(\infty)=0$, 故 $G(\infty)=0$, 因此 $G(z)=0$,

$$g(z)=\frac{d}{dz}\log f'(z)=\frac{\alpha_1-1}{z-a_1}+\cdots+\frac{\alpha_n-1}{z-a_n},$$

沿上半平面中任一路线积分可得

$$f'(z)=c(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}, \tag{2}$$

即得所求函数的形式是

$$f(z)=c\int_{-\infty}^{z}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt+c_1, \tag{3}$$

也就是上节所讲的变形是必然的形式.

附记. 由(2)可知,当 $z=x>a_n$ 时,

$$\arg f'(z)=\arg c,$$

线段 (a_n,a_1) 经 $w=f(z)$ 而变为 A_nA_1, 因此 $\arg c$ 等于线段 A_nA_1 与 x 所成的角度.

给出了一个顶点的位置可以确定 c_1, 要确定 a_k 与 $|c|$ 可以利用已知多边形的边长

$$\overline{A_kA_{k+1}}=|c|\int_{a_k}^{a_{k+1}}|f'(x)|dx,\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

来决定,因此在实际使用 Schwarz-Christoffel 公式时,我们要解超越联立方程组,这可以用多变数牛顿法来寻求其数值解.

§19. 补　　充

以下一些结果我们不加证明:

1° 多边形有一顶点是 $a_n=\infty$ 的象,则映照函数为

$$w=c\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}dz+c_1.$$

2° 多边形有一个或几个顶点在无穷远处.

Schwarz-Christoffel 公式仍然有意义,但要把无穷远处的顶点的角度理解为夹这顶的两边的夹角的反向,即如图 56 所示.

3° 把多边形外部变为上半平面,假定它把∞变为 a, 则

$$w=c\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\times\frac{dz}{(z-a)^2(z-\bar{a})^2}+c_1.$$

4° 把单位圆内部映到多边形内部上去的映射

$$w = c\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz + c_1,$$

这儿 a_k 是单位圆上的对应于多边形顶点的点。

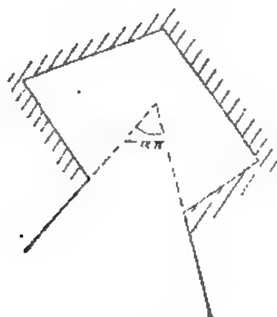


图 56

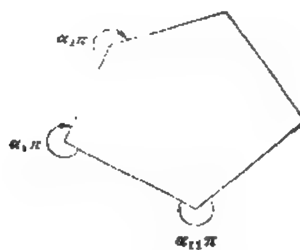


图 57

第十一章　求　和　法

§1. Cesáro 求和法

定义. 命 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 为一个复数贯,而且命

$$
\begin{aligned}
s_n^{(0)} &= a_0 + \cdots + a_n, \\
s_n' &= s_0^{(0)} + \cdots + s_n^{(0)}, \\
s_n'' &= s_0' + \cdots + s_n', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_n^{(k)} &= s_0^{(k-1)} + \cdots + s_n^{(k-1)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k!s_n^{(k)}}{n^k} \to s, \tag{1}$$

则级数

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

称为在 Cesáro 的意义下可 k 级求和,其和是 s,或简称为级数 (2) 可 (c, k) 求和,或 (c, k) 和等于 s,或记之为

$$a_0 + \cdots + a_n + \cdots = s, \quad (c, k).$$

命

$$c_n^{(k)} = \frac{k!n!}{(n+k)!} s_n^{(k)},$$

则 (1) 与

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{(k)} = s \tag{3}$$

等价.

定理 1. 如果一级数的 (c, k) 和等于 s,则 $(c, k+1)$ 和也等于 s.

证. 由

$$s_n^{(k)} = s\frac{n^k}{k!} + o(n^k),$$

可得

$$
\begin{aligned}
s_n^{(k+1)} &= \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{(k)} = \frac{s}{k!}\sum_{\nu=0}^{n} \nu^k + o\left(\sum_{\nu=0}^{n} \nu^k\right) = \frac{s}{k!}\left(\frac{n^{k+1}}{k+1} + o(n^{k+1})\right) \\
&\quad + o(n^{k+1}) = \frac{sn^{k+1}}{(k+1)!} + o(n^{k+1}).
\end{aligned}
$$

特例是 c^0 和就是普通的收敛,因此一级数如果收敛,其极限是 s,则任何次 Cesáro 和也是以 s 为其极限.

定理 2. 如果级数 (2) (c, k) 可求和,则

$$a_n = O(n^k).$$

证. 由定义

$$s_n^{(k)} = s\frac{n^k}{k!} = o\left(\frac{n^k}{k!}\right) = O(n^k),$$

因此得

$$s_n^{(k-1)} = s_n^{(k)} - s_{n-1}^{(k)} = O(n^k) + O(n^k) = O(n^k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

及

$$s_n^{(0)} = O(n^k),$$
$$a_n = O(n^k).$$

定理 3. 命 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$。如果 (2) (c, k) 可求和,则

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = s.$$

证. 由定理 2 可知,当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

收敛,并有

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(0)} x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} s'_n x^n = \cdots = (1-x)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n. \quad (4)$$

现在

$$s_n^{(k)} = s\binom{n}{k} + o\binom{n}{k},$$

即对任一 $\delta > 0$, 当 $n \geqslant n_0(\delta)$ 时,

$$\left| s_n^{(k)} - s\binom{n}{k} \right| < \delta \binom{n}{k}.$$

因此,当 $0 < x < 1$ 时,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n - s\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left|s_n^{(k)} - s\binom{n}{k}\right| x^n$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}\left|s_n^{(k)} - s\binom{n}{k}\right| x^n + \delta\sum_{n=n_0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}\left|s_n^{(k)} - s\binom{n}{k}\right| x^n + \delta\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n,$$

即得

$$\overline{\lim_{x\to 1}} \frac{\left|\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n - s\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n\right|}{\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k} x^n} \leqslant \delta.$$

(注意当 $x\to 1$ 时，分母变为∞.)因此，当 $x\to 1$ 时，

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)}x^n - s\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n}{\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n}\to 0. \tag{5}$$

由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n=\frac{x^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}=\frac{x^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$=\frac{x^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{1-x}=\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}},$$

(5) 式分子分母同乘以 $(1-x)^{k+1}$，则得

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-sx^k}{x^k}=0,$$

即

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=s.$$

例 1.

$$1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2},\ (c,1).$$

例 2.

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4},\ (c,2).$$

但这级数并不 $(c,0)$ 收敛.

§2. Hölder 求和法

定义. 命 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 是一复数贯，命

$$h_n^{(0)}=a_0+\cdots+a_n,$$
$$h_n'=\frac{h_0^{(0)}+\cdots+h_n^{(0)}}{n+1},$$
$$h_n''=\frac{h_0'+\cdots+h_n'}{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$h_n^{(k)}=\frac{h_0^{(k-1)}+\cdots+h_n^{(k-1)}}{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即逐步求平均值. 如果

$$\lim_{n\to\infty}h_n^{(k)}=s, \tag{1}$$

则级数

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots \tag{2}$$

称为在 Hölder 意义下可 k 级求和，其和为 s，或简称为 (2) 可 (H, k) 求和，(H, k) 和等于 s，或记之为

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s, (H, k),$$

或和 s 为贯 $h_n^{(0)}$ 的 (H, k) 极限.

现在也有(并且较易)与§1定理1，2，3相仿的结果,即

定理 1. 如果 (2) 的 (H, k) 和等于 s，则 $(H, k+1)$ 和也是 s.

(由于如果 $h_n^{(k+1)} \to s$，则 $h_n^{(k+1)}$ 的平均值也 $\to s$.)

定理 2. 如果 (2) (H, k) 可求和,则 $a_n = O(n^k)$,

证. 由 $h_n^{(k)} \to s$，可知

$$h_n^{(k)} = O(1),$$
$$h_n^{(k-1)} = (n+1)h_n^{(k)} - nh_{n-1}^{(k)} = O(n) + O(n) = O(n),$$
$$h_n^{(k-2)} = (n+1)h_n^{(k-1)} - nh_{n-1}^{(k-1)} = O(n^2) + O(n^2) = O(n^2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以及

$$h_n^{(1)} = o(n^k),$$
$$a_n = h_n^{(0)} - h_{n-1}^{(0)} = o(n^k).$$

定理 3. 如果 (2) (H, k) 可求和,则

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = s.$$

这定理我们将不再证明,因为它是以下定理 4 与上节定理的直接推论.

定理 4 (Knopp-Schnee). 对一固定的自然数 k，如果

$$c_n^{(k)} \to s,$$

则

$$h_n^{(k)} \to s.$$

而且反之亦真.

换言之，Cesáro 求和法与 Hölder 求和法是等价的.

在证明这定理之前,在下节先证两条引理.

习题. 研究以下级数的求和问题

$$1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots.$$

§3. 与均值有关的两条引理

引理 1. 假定 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是一个复数贯，q 是正整数,并假定

$$x_n + q\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to 0, \tag{1}$$

则

$$x_n \to 0. \tag{2}$$

证. 简书

$$y_n = q(x_1 + \cdots + x_n) + nx_n = q(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + (n+q)x_n, \tag{3}$$

则有恒等式

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)=(n+1)(n+2)\cdots(n+q)\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu. \tag{4}$$

当 $n=1$ 时，这恒等式

$$y_1\cdot 2\cdots q=2\cdot 3\cdots(q+1)x_1$$

就是(3)在 $n=1$ 时的特例. 假定(4)对 $n-1$ 时成立，而往证对 n 成立. 由归纳假定及(3)可知

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)\\
&\quad=\sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)+y_n(n+1)\cdots(n+q-1)\\
&\quad=n(n+1)\cdots(n-1+q)\sum_{\nu=1}^{n-1} x_\nu+[q(x_1+\cdots+x_{n-1})\\
&\qquad+(n+q)x_n](n+1)\cdots(n+q-1),
\end{aligned}$$

即得所证.

由(1)可知，$y_n=o(n)$，即

$$y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)=o(\nu^q).$$

故

$$\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(\nu+1)\cdots(\nu+q-1)=o\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^q\right)=o(n^{q+1}).$$

由恒等式得

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu=\frac{1}{(n+1)\cdots(n+q)}\,o(n^{q+1})=o(n),$$

$$nx_n=y_n-q\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu=o(n)+o(n)=o(n),$$

即

$$x_n=o(1).$$

引理 2. 假定 k 是正整数及

$$\frac{1}{k}x_n+\frac{k-1}{k}\,\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\to\gamma,$$

则

$$x_n\to\gamma.$$

证. 命 $x_n-\gamma=z_n$，则由假定推得

$$\frac{1}{k}z_n+\frac{k-1}{k}\,\frac{z_1+\cdots+z_n}{n}\to 0,$$

即

$$z_n+(k-1)(z_1+\cdots+z_n)/n\to 0.$$

由引理 1 可知

$$z_n\to 0,$$

即

$$x_n \to \gamma.$$

§4. (C,k) 与 (H,k) 等价性的证明

给了一个复数贯

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,$$

用 $M(x_n)$ 代表由算术平均所得出的数贯

$$x_0,\ \frac{x_0+x_1}{2},\ \frac{x_0+x_1+x_2}{3},\ \cdots,\ \frac{x_0+x_1+\cdots+x_n}{n+1},\ \cdots.$$

对任意二常数 a, b, $aM(x_n)+bx_n$ 代表数贯

$$ax_0+bx_0,\ a\frac{x_0+x_1}{2}+bx_1,\ \cdots,\ a\frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}+bx_n.$$

算子 $y_n=aM(x_n)+bx_n$ 把数贯 $\{x\}$ 变为数贯 $\{y\}$,

$$y_n=\frac{a}{n+1}x_0+\cdots+\frac{a}{n+1}x_{n-1}+\left(\frac{a}{n+1}+b\right)x_n.$$

这是 $\{x\}$ 的更一般形式的算子的特例:

$$\begin{aligned}
&y_0=c_{00}x_0,\\
&y_1=c_{10}x_0+c_{11}x_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_n=c_{n0}x_0+c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}$$

如果有一这样性质的算子由 $\{x\}$ 到 $\{y\}$, 另一由 $\{y\}$ 到 $\{z\}$, 则连续运算仍然得一个算子由 $\{x\}$ 到 $\{z\}$, 称为上述算子的乘积, 这样的算子适合结合律, 一般并不适合交换律, 但两个算子

$$aM(x_n)+bx_n,\quad a'M(x_n)+b'x_n$$

则是可以交换的:

$$\begin{aligned}
&a'M(aM(x_n)+bx_n)+b'(aM(x_n)+bx_n)\\
&\qquad=aa'MM(x_n)+(a'b+b'a)M(x_n)+b'bx_n,\\
&aM(a'M(x_n)+b'x_n)+b(a'M(x_n)+b'x_n)\\
&\qquad=a'aMM(x_n)+(ab'+ba')M(x_n)+bb'x_n,
\end{aligned}$$

二者相等.

对正整数 k, 我们特别定义

$$T_k(x_n)=\frac{k-1}{k}M(x_n)+\frac{1}{k}x_n,$$

故 T_k 与 M 可交换, 因此任二 T_k, T_l 是可交换的.

由 $x_n\to s$ 可知

$$T_k(x_n)\to\frac{k-1}{k}s+\frac{1}{k}s=s,$$

又由引理 2 可知，由 $T_k(x_n)\to s$ 可得 $x_n\to s$.

先证恒等式

$$M(c_n^{(k-1)})=T_k(c_n^{(k)}),\quad k\geqslant 1,\tag{1}$$

即

$$\frac{c_0^{(k-1)}+\cdots+c_n^{(k-1)}}{n+1}=\frac{k-1}{k}\,\frac{c_0^{(k)}+\cdots+c_n^{(k)}}{n+1}+\frac{1}{k}c_n^{(k)}.\tag{2}$$

由

$$s_n^{(k)}=s_{n-1}^{(k)}+s_n^{(k-1)},$$

推出

$$\frac{(n+k)!}{n!k!}c_n^{(k)}=\frac{n(n+k-1)!}{n!k!}c_{n-1}^{(k)}+\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}c_n^{(k-1)},$$

$$kc_n^{(k-1)}=(n+k)c_n^{(k)}-nc_{n-1}^{(k)}=(k-1)c_n^{(k)}+((n+1)c_n^{(k)}-nc_{n-1}^{(k)}),$$

即

$$k\sum_{n=0}^{m}c_n^{(k-1)}=(k-1)\sum_{n=0}^{m}c_n^{(k)}+(m+1)c_m^{(k)}.$$

这就是恒等式 (2).

今有

$$h_n^{(0)}=s_n^{(0)}=c_n^{(0)},$$

$$h_n'=\frac{s_n'}{n+1}=c_n',$$

简书之

$$h'=c',$$

则

$$h''=M(h')=M(c')=T_2(c''),$$

$$h'''=M(h'')=MT_2(c'')=T_2M(c'')=T_2T_3(c'''),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h^{(k)}=M(h^{(k-1)})=MT_2T_3\cdots T_{k-1}(c^{(k-1)})$$
$$=T_2T_3\cdots T_{k-1}M(c^{(k-1)})=T_2\cdots T_{k-1}T_k(c^{(k)}).$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}c_n^{(k)}=s,$$

则依序得

$$T_k(c^{(k)})\to s,$$

$$T_{k-1}T_k(c^{(k)})\to s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h^{(k)}=T_2T_3\cdots T_k(c^{(k)})\to s.$$

即得

Schnee 定理. 由

$$\lim_{n\to\infty}c_n^{(k)}=s,$$

可得

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{(k)} = s.$$

反之，如果

$$h_n^{(k)} \to s,$$

则由引理 2 逐步推出

$$T_3T_4\cdots T_k(c^{(k)}) \to s,$$
$$T_4\cdots T_k(c^{(k)}) \to s,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_k(c^{(k)}) \to s,$$
$$c^{(k)} \to s.$$

就是

Knopp 定理. 由

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{(k)} = s,$$

推得

$$\lim_{n\to\infty} c_k^{(k)} = s.$$

§5. (C, α) 求 和

再回到 §1 中 $s_n^{(k)}$ 的定义．命

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

则

$$f(x) = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n.$$

由于

$$(1-x)^{-(k+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n,$$

因此由

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n = (1-x)^{-(k+1)} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^m \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l, \tag{1}$$

即得

$$s_n^{(k)} = \sum_{m+l=n} \binom{m+k}{k} a_l = \sum_{l=0}^{n} \binom{n-l+k}{k} a_l.$$

因而

$$c_n^{(k)} = \frac{\sum_{l=0}^{n} \binom{n-l+k}{k} a_l}{\binom{n+k}{k}}. \tag{2}$$

不难证明

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n-l+k}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}.$$

(在(1)式中命 $a_0=a_1=\cdots=a_n=\cdots=1.$)

(2) 可改写为

$$c_n^{(k)}=\sum_{l=0}^{n}\frac{(n-l+k)\cdots(n-l+1)}{(n+k)\cdots(n+1)}a_l$$
$$=\sum_{l=0}^{n}\frac{\Gamma(n-l+k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(n-l+1)}a_l,$$

则对非整数 k，我们也可定义 (c, k) 求和法。

在研究 (c, α) 求和时，我们假定 $\alpha>-1$，如果

$$c_n^{(\alpha)}=\sum_{l=0}^{n}\frac{\Gamma(n-l+\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n-l+1)}a_l\to s,$$

则

$$a_0+a_1+\cdots+a_n\cdots=s,\quad (c, \alpha).$$

我们不深入研究 (c, α) 求和的问题，读者可以自己证明：如果 $\alpha'>\alpha$，则由

$$a_0+a_1+\cdots+a_n\cdots=s,\quad (c, \alpha),$$

可推出

$$a_0+a_1+\cdots+a_n\cdots=s,\quad (c, \alpha').$$

§6. Abel 求和法

定义. 命

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

如果

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)$$

存在而且等于 s，则称级数

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots$$

可以 Abel 求和，它的 Abel 和等于 s，用符号

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots=s, (A)$$

表之.

上节已知凡 (c, k) (或 (H, k)) 可求和的级数一定可以 Abel 求和，反之并不真确。

例如

$$f(x)=e^{\frac{1}{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

在 $|x|<1$ 内收敛，而且

$$\lim_{x\to 1}f(x)=e^{\frac{1}{2}},$$

但如果

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

是可 k 阶求和，则 $a_n = O(n^k)$，即有一常数 P 使

$$|a_n| < P\binom{n+k}{k}.$$

因此，当 $0 \leqslant r < 1$ 时，

$$e^{\frac{1}{1-r}} = f(-r) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < P\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} r^n = P(1-r)^{-(k+1)}.$$

当 $r \to 1$ 时，这式子不正确.

§7. 一般求和法简介

提高一步，命

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} s_n, \quad m = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

如果由

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

可以推得

$$\lim_{m\to\infty} t_m = s,$$

则 (1) 可以定义一种求和法。§5 所说明的 (C, α) 求和就是这一类。

又命

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) s_n, \tag{2}$$

如果由

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

可以推得

$$\lim_{x\to 1} t(x) = s,$$

则 (2) 也可以定义一种求和法. Abel 求和法

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x) s_n$$

就是一例.

求和法 (1) 将以方阵 (C_{mn}) 表之. (2) 将以 $C_n(x)$ 表之.

在附录中将寻求必要且充分的条件使 (1) 把收敛贯变为收敛贯，把收敛于 s 的贯，变为收敛于 s 的贯.

有两种求和法 P 与 Q，如果凡是可以由 P 求和的贯，一定可以由 Q 求和，则称为 Q 法强于 P 法，以符号

$$P < Q$$

表之.

以上可证明，如果 $k \leqslant k'$，则

$$(C, k) < (C, k'),$$

而

$$(C, k) < A.$$

关系<显然有传递性，即由

$$P < Q, \quad Q < R,$$

可以推得

$$P < R.$$

我们有以下一些问题:

1）定义一些求和法.

2）求和法之间的比较，孰强孰弱.

3）加上何种条件，强者可能变为弱者.

4）把收敛性改为渐近性，如 $s_n \sim an^{\beta}$.

§8. Borel 求和法

命

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

代表一个非多项式的整函数，而且 $p_n \geqslant 0$. 我们引进一种求和法：如果当 $x \to \infty$ 时，

$$\frac{s(x)}{J(x)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \to s,$$

则称为 $s_n \to s$, (J), 或

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s, \ (J),$$

即级数可 J 求和.

取

$$p_n = \frac{1}{n!},$$

则得

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x_n}{n!} \to s.$$

这是有名的 Borel 求和法，以 $s_n \to s$, (B) 表之.

定理 1. 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s, (J),$$

或 $s_n \to s$ 则 $s_n \to s, (J)$.

证. 并不失普遍性,可以假定 $s=0$, 给了 $\varepsilon>0$, 当 $n>N$ 时

$$|s_n| < \varepsilon.$$

如此,则

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} p_n s_n x^n\right| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n x^n \leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} p_n s_n x^n\right| + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n.$$

由于 $J(x)$ 非多项式,而且 $p_n \geqslant 0$, 故对任意 k, 常有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{J(x)} = 0,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = 0(J(x)).$$

即得所证.

现在再介绍 Borel 求和第二法. 若

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^X e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} dx = s,$$

则定义

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s, (B').$$

定理 2. 命

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!},$$

如果当 $x\to\infty$ 时, $e^{-x}a(x)\to 0$, 则 B 与 B' 二法是等价的.

证. 命

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}.$$

不难证明: 如果 $a(x)$ 对所有的 x 收敛,则 $s(x)$ 也对所有的 x 收敛. 并且反之亦然. 又

$$a'(x) = \sum a_{n+1} \frac{x^n}{n!},\quad s'(x) = \sum s_{n+1} \frac{x^n}{n!},$$

$$\int_0^x e^{-t}a'(t)dt = e^{-x}a(x) - a_0 + \int_0^x e^{-t}a(t)dt, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} e^{-x}s(x) - a_0 &= \int_0^x \frac{d}{dt}(e^{-t}s(t))dt = \int_0^x e^{-t}(s'(t) - s(t))dt \\ &= \int_0^x e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (s_{n+1} - s_n) \frac{t^n}{n!} dt \\ &= \int_0^x e^{-t} \sum a_{n+1} \frac{t^n}{n!} dt = \int_0^x e^{-t}a'(t)dt. \end{aligned} \tag{2}$$

比较 (1)，(2) 得出

$$e^{-x}s(x) = e^{-x}a(x) + \int_0^x e^{-t}a(t)dt. \tag{3}$$

这就是定理 2.

由公式 (3) 还可以推得更深入的结果.

定理 3. 一级数如果是 (B) 可求和，一定是 B' 可求和，即

$$B < B'.$$

命

$$\int_0^x e^{-t}a(t)dx = \phi(t).$$

如果这级数 B 可求和，则由 (3) 可知

$$\phi(x) + \phi'(x) \to s.$$

因此定理 3 的证明归结为求证以下的

引理. 假定 $\phi(x)$ 有连续微商，如果当 $x \to \infty$ 时，

$$\phi(x) + \phi'(x) \to 0,$$

则

$$\phi(x) \to 0.$$

证. 1) 如果当 $x > X$ 时，$\phi'(x) \geqslant 0$，则 $\phi(x)$ 是单调增函数，故有极限 l (可能是 $+\infty$). 由假定 $\phi'(x) \to -l$，由 $\phi'(x) \geqslant 0$ 可知 $l \leqslant 0$. 由

$$\phi(x+1) - \phi(x) = \int_x^{x+1} \phi'(t)dt \to -l,$$

可知除 $l = 0$ 外无可能.

2) 如果当 $x > X$ 时，$\phi'(x) \leqslant 0$，同法可证本定理.

3) 不然，则 $\phi'(x)$ 变号无穷次，因而有无穷个零点，即 $\phi(x)$ 有无穷个极大极小. 假定在 $x = x_1, x_2, \cdots$ 时 $\phi(x)$ 给极大值，则由

$$\phi(x_i) + \phi'(x_i) = \phi(x_i)$$

可知

$$\lim_{i\to\infty} \phi(x_i) = 0.$$

又假定在 $x = y_1, y_2 \cdots$ 时，$\phi(x)$ 给极小值，则

$$\lim_{i\to\infty} \phi(y_i) = 0,$$

因此

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0.$$

有 B' 可求和而 B 不可求和的级求存在，例如

$$a_n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p(2p+2)^n}{(2p+1)!},$$

则

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p(2p+2)^n}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} e^{(2p+2)x} = e^x \sin e^x,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}a(x)dx = \int_0^\infty \sin e^x dx = \int_1^\infty \frac{\sin u}{u} du,$$

但 $e^{-x}a(x)$ 并不趋限，所以并非 (B) 可求和。

但由等式 (2) 可以推出

定理 4. 以下两个式子是等价的

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = s, \ (B),$$
$$a_1 + a_2 + \cdots = s - a_0, \ (B').$$

注意

$$a_1 + a_2 + \cdots = s - a_0, \ (B)$$

与

$$a_0 + a_1 + \cdots = s, \ (B')$$

并不等价.

§9. Hardy-Littlewood 定理

定理 1. 如果 $\sum a_n = s, (c, k)$, k 是整数 >1, 及

$$a_n = O(n^{-1}),$$

则 $\sum a_n$ 收敛于 s.

定理 2. 如果 a_n 是实数, $\sum a_n = s, (c, k)$, k 是整数 >1, 及

$$na_n > -H,$$

则 $\sum a_n$ 收敛于 s, H 是一正常数.

定理 1 是定理 2 的自然推论，因为分开 a_n 的虚实部分即可由定理 2 推出定理 1 来.

命 $b_n = na_n$, 由 b_n 定义 T_n^k 和由 a_n 定义 s_n^k 的方法相同. 定理 2 的证明依赖于

定理 3. 假定 $\sum a_n$, (c, k) 可求和, $k > 0$, 则 $\sum a_n$, $(c, k-1)$ 可求和的必要且充分条件是 $T_n^{k-1} = O(n^k)$.

定理 4. $\sum a_n (c, k)$ 可求和 $(k > 0)$ 的必要且充分的条件是级数

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{T_n^{(k-1)}}{\binom{n+k}{n} n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(n-1)!}{(k+1)(k+2)\cdots(n+k)} T_n^{(k-1)}$$

收敛，或等价于

$$\sum n^{-k-1} T_n^{(k-1)}$$

收敛.

因为

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = (1-x)^k \sum_{n=0}^\infty s_n^{(k-1)} x^n,$$

由

$$\sum_{n=0}^\infty n a_n x^n = (1-x)^k \sum_{n=0}^\infty T_n^{(k-1)} x^n,$$

可得

$$(1-x)^k \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(k-1)} x^n = -xk(1-x)^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k-1)} x^n + (1-x)^k \sum_{n=0}^{\infty} n s_n^{(k-1)} x^n$$

$$= (1-x)^k \sum_{n=0}^{\infty} (k+n) s_n^{(k-1)} x^n - k(1-x)^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k-1)} x^n$$

$$= (1-x)^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} (k+n) s_n^{(k-1)} x^n - k \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n \right).$$

因此得

$$T_n^{(k-1)} = (k+n) s_n^{(k-1)} - k s_n^{(k)}. \tag{1}$$

再由

$$s_n^{(k-1)} = s_n^{(k)} - s_{n-1}^{(k)},$$

可得

$$T_n^{(k-1)} = n s_n^{(k)} - (n+k) s_{n-1}^{(k)}. \tag{2}$$

由 (1) 及 (2) 推出

$$\frac{s_n^{(k-1)}}{\binom{n+k-1}{k-1}} - \frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{T_n^{(k-1)}}{k\binom{n+k}{k}} \tag{3}$$

及

$$\frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} - \frac{s_{n-1}^{(k)}}{\binom{n+k-1}{k}} = \frac{T_n^{(k-1)}}{n\binom{n+k}{k}}.$$

命 $n=1, 2, \cdots, N$, 而总加之得

$$\frac{s_N^{(k)}}{\binom{N+k}{k}} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n^{(k-1)}}{n\binom{n+k}{k}}. \tag{4}$$

由 (3) 推得定理 3, 由 (4) 推出定理 4, 由 Stirling 公式可知定理 4 的两个结论的等价性.

定理 2 的证明: 不妨假定 $H=1$. 如果 $T_n^{(k-1)} \neq O(n^k)$, 则有一 $c>0$, 使有无穷个 n 使

$$T_n^{(k-1)} > cn^k, \tag{5}$$

或有无穷个 n 使

$$T_n^{(k-1)} < -cn^k. \tag{6}$$

先假定有无穷个 N 使 (5) 成立.

若 $\eta > 1$ 及 $N \leqslant n \leqslant \eta N$, 则

$$T_n^{(k-1)} - T_N^{(k-1)} = \sum_{\nu=0}^{N} \left\{ \binom{n-\nu+k-1}{k-1} - \binom{N-\nu+k-1}{k-1} \right\} b_\nu + \sum_{\nu=N+1}^{n} \binom{n-\nu+k-1}{k-1} b_\nu. \tag{7}$$

由于 $b_\nu > -1$ 及 b_ν 的系数是正的，所以

$$T_n^{(k-1)} - T_N^{(k-1)} > -\sum_{\nu=0}^{N}\left\{\binom{n-\nu+k-1}{k-1} - \binom{N-\nu+k-1}{k-1}\right\}$$
$$-\sum_{\nu=N+1}^{n}\binom{n-\nu+k-1}{k-1},$$

因此

$$T_n^{(k-1)} - T_N^{(k-1)} > -\binom{n+k}{k} + \binom{N+k}{k}.$$

由于

$$\binom{n+k-1}{k} \sim \frac{n^k}{k!}, \quad \binom{N+k-1}{k} \sim \frac{N^k}{k!},$$

所以对任一 $\varepsilon > 0$，充分大的 N，适合于 $N \leqslant n \leqslant \eta N$ 的 n 常有

$$T_n^{(k-1)} - T_N^{(k-1)} > -\frac{1}{k!}\left((1+\varepsilon)\eta^k - (1-\varepsilon)\right)N^k.$$

取 ε, η 使

$$T_n^{(k-1)} - T_N^{(k-1)} > -\frac{1}{2}cN^k.$$

由 (5) 式 $(n = N)$，则

$$T_n^{(k-1)} > \frac{1}{2}cN^k, \quad N \leqslant n \leqslant \eta N.$$

故对充分大的 N 有

$$\sum_N^{\eta N}\frac{T_n^{(k-1)}}{n^{k+1}} > \frac{1}{2}cN^k\sum_N^{\eta N}\frac{1}{n^{k+1}} > \frac{1}{2}cN^k\frac{(\eta-1)N}{(\eta N)^{k+1}} = \frac{c(\eta-1)}{2\eta^{k+1}}.$$

这对无穷个 N 正确．因此定理 4 中的级数发散，因此 $\sum a_n'$ 的 (C, k) 和不存在，因此不可能有无穷个 n 使 (5) 式成立．

同法(但取 $(\zeta N, N)$, $\zeta < 1$) 可证，不可能有无穷个 n 使 (6) 式成立．因此 $T_n^{(k-1)} = O(n^k)$，故由定理 3 可知 $\sum a_n(C, k-1)$ 可求和．一次一次地降下来可得 $\sum a_n$ 收敛．

§ 10. Tauber 定 理

定理 1 (Tauber)． 如果 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$，则由

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s, \ (A)$$

可得

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s.$$

这定理等价于：如果当 $|x| < 1$ 时，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

收敛，且 $na_n \to 0$ 及

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 0,$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$$

证. 命

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n, \quad m = 1, 2, \cdots,$$

则当 $0 \leqslant x < 1$ 时，

$$s_m - f(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n(1 - x^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n.$$

由于 $1 - x^n = (1 + x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \leqslant n(1 - x)$，所以

$$|s_m - f(x)| \leqslant (1 - x) \sum_{n=1}^{m} n|a_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| x^n.$$

命

$$\varepsilon_m = \max_{n>m} n|a_n|,$$

则 $\varepsilon_m \to 0$. 故

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| x^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n| \frac{1}{n} x^n \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{m} x^n \leqslant \frac{\varepsilon_m}{m(1-x)}.$$

另一方面，由 $n|a_n| \to 0$，其算术平均当 $m \to \infty$ 时也有

$$\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} n|a_n| \to 0.$$

命 $x = 1 - \frac{1}{m}$，则当 $m \to \infty$ 时，

$$\left|s_m - f\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right| \leqslant \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} n|a_n| + \varepsilon_m \to 0,$$

因此，由 $f\left(1 - \frac{1}{m}\right) \to 0$，可知 $s_m \to 0$.

附记 1. 我们并未完全用到假定“$f(x) \to 0$”，而只用到“$f\left(1 - \frac{1}{m}\right) \to 0$”. 但加上 $na_n \to 0$，则可推得“$f(x) \to 0$”，其理由是：由

$$|na_n| < c$$

可知

$$|f'(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| < c \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{c}{1-x} \quad (0 < x < 1).$$

故在 $1 - \frac{1}{m} < x < 1 - \frac{1}{m+1}$ 中，

$$\left|f(x) - f\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right| = \left|\int_{1-\frac{1}{m}}^{x} f'(y)dy\right| < \int_{1-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m+1}} \frac{c}{1 - \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)} dy$$

$$= c\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)(m+1) = \frac{c}{m}.$$

此处只与m有关，而且$\to 0$。

习题. 在怎样的假定下，可以由

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s, \ (A)$$

推出

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = s, \ (C^k).$$

附记 2. Littlewood 把条件改进为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$，如果 a_n 是实数，Hardy-Littlewood 更改进为 $\geqslant H/n$，$(H<0)$。这一深入的结果如不与 § 9 的结果对照以观，将觉得非常突然。

§ 11. 在收敛圆圆周上的渐近性质

定理 1. 假定 $a_n \geqslant 0$，$b_n \geqslant 0$ 及级数

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad g(x) = \sum b_n x^n$$

在 $0 < x < 1$ 处收敛，而在 $x=1$ 处发散. 如果

$$a_n \sim c b_n, \quad n \to \infty,$$

则当 $x \to 1$ 时，

$$f(x) \sim c g(x).$$

证. 给 $\varepsilon > 0$，有N使 $n > N$ 时，

$$|a_n - c b_n| < \varepsilon b_n,$$

故

$$|f(x) - cg(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - c b_n) x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - c b_n| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n x^n$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n - c b_n| + \varepsilon g(x).$$

由于 $g(x) \to \infty$，所以可取 δ 使 $x > 1-\delta$ 时，

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n - c b_n| < \varepsilon g(x).$$

即得当 $x > 1-\delta$ 时，

$$|f(x) - cg(x)| < 2\varepsilon g(x).$$

定理 2. 仍然假定 $0 < x < 1$ 时级数收敛. 命

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n,$$

假定 $s_n \geqslant 0$，$t_n \geqslant 0$，及 $\sum s_n$ 与 $\sum t_n$ 发散，如果

$$s_n \sim c t_n,$$

则

$$f(x) \sim c g(x).$$

证. 当 $0 < x < 1$ 时，

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \quad g(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n,$$

由定理 1，

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \sim c \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n,$$

所以得出本定理.

（读者试自己推出高阶和的对应定理.）

特例：如果 $s_n \sim cn$，则

$$f(x) \sim \frac{c}{1-x}.$$

例 1. 若 $p < 1$，则当 $x \to 1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p} \sim \frac{\Gamma(1-p)}{(1-x)^{1-p}}.$$

由于

$$(1-x)^{p-1} = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-p+1)}{\Gamma(n+1)} x^n$$

及

$$\frac{1}{n^p} \sim \frac{\Gamma(n-p+1)}{\Gamma(n+1)},$$

故得此结果.

例 2. 命

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots.$$

如果 $\alpha + \beta > \gamma$，当 $x \to 1$ 时，

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}},$$

而

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, x) \sim \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \log \frac{1}{1-x}.$$

定理 2 能否有逆定理？不行，例如

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2(1-x)} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x^{2n} - x^{2n+1}),$$

此处 $s_{2m+1} = -(m+1)$，而 $s_{2m} = m+1$，故 s_n 有无穷振动的情况．但

$$f(x) \sim \frac{1}{4} \Big/ (1-x).$$

这个例子的系数有正有负，我们假定系数非负，能不能找到逆定理？回答是肯定的。

§ 12. Hardy-Littlewood 定理

定理 1（Hardy-Littlewood）．如果 $a_n \geqslant 0$，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{1-x}, \quad 当\ x\to 1,$$

则当 $n\to\infty$ 时,

$$s_n=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sim n.$$

作为比较,先证明一较容易的定理.

定理 2. 假定 $a_n \geqslant 0$, $n=0,1,2\cdots$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad 0<x<1,$$

如果

$$\frac{1}{1-x} \gg f(x) \gg \frac{1}{1-x},$$

则

$$n \gg s_n \gg n.$$

逆定理十分显然.

证. 1) 显然有

$$s_n x^n \leqslant \sum_{m=0}^{n} a_m x^m \leqslant f(x) \ll \frac{1}{1-x},$$

取 $x=e^{-\frac{1}{n}}$, 则得

$$\frac{s_n}{e} \ll \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n}}} \ll n,$$

即

$$s_n \ll n. \tag{1}$$

2) 由 (1) 可知

$$f(x)=(1-x)\sum_{m=0}^{\infty} s_m x^m \ll (1-x)s_n\sum_{m=0}^{n-1} x^m$$

$$+(1-x)\sum_{m=n}^{\infty} m x^m \ll s_n + n x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

则得

$$\frac{1}{1-x} \ll s_n + n x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

取 $x=e^{-\lambda/n}$,

$$1-x=1-e^{-\lambda/n}=\int_0^{\lambda/n} e^{-t}dt \leqslant \frac{\lambda}{n},$$

所以

$$\frac{n}{\lambda} \ll s_n + n e^{-\lambda} + \frac{n e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

当 λ 充分大时

$$s_n \gg n.$$

但是 Hardy-Littlewood 定理的证明并不容易．以下是 Karamata 的证明．

1）先证对任一多项式 $p(x)$ 常有

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n p(x^n)=\int_0^1 p(t)dt. \tag{1}$$

由于可加性，如果证明 $p(x)=x^l$，即得所证．而

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+ln}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{1-x^{l+1}}(1-x^{l+1})\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{(l+1)n}=\frac{1}{l+1}=\int_0^1 t^l dt.$$

2）(1) 式对任一 (0, 1) 内的连续函数 $g(x)$ 也对，由 Weierstrass 定理：给了 $\varepsilon>0$，可以找两个多项式 $p_1(t)$，$p_2(t)$ 使

$$p_1(x)<g(t)<p_2(t),$$

而且

$$\int_0^1[g(t)-p_1(t)]dt<\varepsilon,\quad \int_0^1[p_2(t)-g(t)]dt<\varepsilon.$$

因此

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n p_1(x^n)<(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n g(x^n)<(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n p_2(x^n).$$

当 $x\to 1$ 时，左右边各等于

$$\int_0^1 p_1(t)dt,\quad \int_0^1 p_2(t)dt.$$

即

$$\int_0^1 g(t)dt-\varepsilon\leqslant\overline{\lim_{x\to 1}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n g(x^n)\leqslant\int_0^1 g(t)dt+\varepsilon.$$

因此，对任一连续函数 $g(t)$ 常有

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n g(x^n)=\int_0^1 g(t)dt.$$

3）取

$$h(t)=0,\quad 当\ 0\leqslant t<e^{-1},$$
$$=\frac{1}{t},\quad 当\ e^{-1}\leqslant t\leqslant 1,$$

这是一个有间断点 $t=e^{-1}$ 的函数．给 $\varepsilon>0$，可以作出两个连续函数 $g_1(t)$ 与 $g_2(t)$，使

$$g_1(t)\leqslant h(t)\leqslant g_2(t),$$

而且

$$\int_0^1[h(t)-g_1(t)]dt<\varepsilon,\quad \int_0^1[g_2(t)-h(t)]dt<\varepsilon,$$

这样就可以证明

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n h(x^n)=\int_0^1 h(t)dt=\int_{e^{-1}}^1\frac{dt}{t}=1,$$

即

$$(1-x)\sum_{n\leqslant 1/\log\frac{1}{x}}a_n\sim 1.$$

取 $x = e^{-\frac{1}{N}}$，则得

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} a_n \sim 1,$$

即得所证。

定理 3. 假定 $a_n \geq 0$，$\alpha > 1$，及

$$f(x) \sim (1-x)^{-\alpha},$$

则

$$s_n \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

证. 命

$$f_{\alpha-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\,dt$$

（这称 $f(x)$ 的 $\alpha-1$ 次积分）. 由假定

$$f_{\alpha-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} t^n\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^{\alpha+n-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n^{\alpha-1}},$$

另一方面

$$f_{\alpha-1}(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-2}(1-t)^{-\alpha}\,dt$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-2}(1-xu)^{-\alpha}\,du$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+l-1)}{l!} x^l \int_0^1 (1-u)^{\alpha-2} u^l\,du$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+l-1)}{l!}\,\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(l+1)}{\Gamma(\alpha+l)}\, x^l$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-x)} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-x)},$$

故

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu}{\nu^{\alpha-1}} \sim \frac{n}{\Gamma(\alpha)}.$$

定理的结论可由此及以下的引理推得.

引理. 若 $\alpha > 0$，由

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{\alpha-1}} \sim \frac{N}{\Gamma(\alpha)},$$

可以推出

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \sim \frac{N^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

证．命

$$t_0=0,\ t_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^{\alpha-1}},\quad N=1,2,\cdots,$$

则

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{N}(t_n-t_{n-1})n^{\alpha-1}=\sum_{n=1}^{N-1}t_n(n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1})+t_NN^{\alpha-1}.$$

由假定当 $N>X$ 时

$$\left|t_N-\frac{N}{\Gamma(\alpha)}\right|<\varepsilon N,$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N-1}\left(t_n-\frac{n}{\Gamma(\alpha)}\right)(n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1})+\left(t_N-\frac{N}{\Gamma(\alpha)}\right)N^{\alpha-1}\right|$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{X}n|n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}|+\varepsilon\sum_{n=X+1}^{N-1}n|n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}|+\varepsilon N^{\alpha}$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{X}n|n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}|+\varepsilon\left|\sum_{n=X+1}^{N-1}n^{\alpha}-\sum_{n=X+2}^{N}(n-1)n^{\alpha-1}\right|+\varepsilon N^{\alpha},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\sum_{n=1}^{N-1}n\{n^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha-1}\}+N^{\alpha}\right\}+o(N^{\alpha})$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\sum_{n=1}^{N}n^{\alpha}-\sum_{n=2}^{N}(n-1)n^{\alpha-1}\right\}+o(N^{\alpha})$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=1}^{N}n^{\alpha-1}+o(N^{\alpha}).$$

由于

$$\sum_{n=1}^{N}n^{\alpha-1}\sim\frac{N^{\alpha}}{\alpha},$$

即得所证.

§13. Littlewood 的 Tauber 定理

定理 1 (Littlewood). 假定

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s \tag{1}$$

又 $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s. \tag{2}$$

即由

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s, \ (A)$$

及 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$，可以推得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

在证明这定理之前，先证以下的

引理. 假定 $f(x)$ 在 $o \leqslant x \leqslant 1$ 中有二阶微商，并当 $x \to 1$ 时

$$f(x) = o(1), \ f''(x) = O\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right),$$

则

$$f'(x) = o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

证. 命 $x' = x + \delta(1-x)$，$o < \delta < \frac{1}{2}$，则

$$f(x') = f(x) + \delta(1-x)f'(x) + \frac{1}{2}\delta^2(1-x)^2 f''(\xi).$$

这儿 $x < \xi < x'$，故

$$\begin{aligned}(1-x)f'(x) &= \frac{f(x') - f(x)}{\delta} - \frac{1}{2}\delta(1-x)^2 f''(\xi) \\ &= \frac{f(x') - f(x)}{\delta} + O(\delta),\end{aligned} \tag{3}$$

这儿用了

$$f''(\xi) = O\left(\frac{1}{(1-\xi)^2}\right) = O\left(\frac{1}{(1-x')^2}\right) = O\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

先取 δ 充分小，并取 x 充分接近于 1，使 (3) 的右边可以任意小，这证明了引理.

定理 1 的证明. (证明的主要难点已经在 § 12 定理 1 中解决了.) 不妨假定 $s=0$，即

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = o(1), \quad x \to 1.$$

由于 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$，可知

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = O\left(\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{n-2}\right) = O\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

由引理可知

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

假定 $|na_n| \leqslant c$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{na_n}{c}\right)x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{f'(x)}{c} \sim \frac{1}{1-x}.$$

这级数的系数是正的，由§12 定理 1 可知

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu a_\nu}{c}\right)\sim n,$$

即得

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu=o(n). \tag{4}$$

命

$$w_n=\sum_{\nu=1}^{n}\nu a_\nu,\quad n>0,\ w_0=0,$$

$$\begin{aligned}f(x)-a_0&=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{w_n-w_{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}w_n\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\\&=\sum_{\nu=1}^{\infty}w_n\left(\frac{x^n-x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^n}{n(n+1)}\right)\\&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{n(n+1)}x^n.\end{aligned}$$

由 $w_n=o(n)$，故当 $x\to 1$ 时第一项 $\to 0$. 又已知 $f(x)\to 0$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{n(n+1)}x^n\to -a_0.$$

现在

$$\frac{w_n}{n(n+1)}=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

可以用普通的 Tauber 定理了. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n}{n(n+1)}=-a_0.$$

左边写成为

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{w_n}{n(n+1)}&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}w_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{w_n-w_{n-1}}{n}-\frac{w_N}{N+1}\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n,\end{aligned}$$

即得所证.

附记. 这结果当然包括§9 的 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 结果，但思索过程正是因为有了§9 的结果，才得出这个更深刻的结果.

§14. 解析性与收敛性

级数函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z}$$

在 $z=1$ 处有则，但所代表的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

却是发散的。但

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=\frac{1}{2},\quad (C,1).$$

函数

$$\frac{1}{(1+z)^n}$$

建议：有函数 $f(z)$ 存在，在 $z=1$ 处有则，但在 $z=1$ 的幂级数却不能 (C,k) 求和 $(k<n)$.

Abel 求和却最妥善地反映解析性，即如果 $f(z)$ 在 $z=1$ 有则，则

$$\lim_{z\to 1} f(z)$$

存在(反之，有例子说明 $\lim\limits_{z\to 1} f(z)$ 存在，而 $f(z)$ 在 $z=1$ 并不解析)。

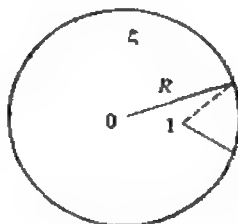


图 58

我们现在的问题是加上怎样的条件使有则点处级数是收敛(或可和)。

定理 1 (M. Riesz). 命 ζ 代表一个扇形

$$|z|\leqslant R,\ \vartheta\leqslant \arg(z-1)\leqslant 2\pi-\vartheta\ \left(R>1,\ 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right),$$

假定 $f(z)$ 在 ζ 上及 ζ 内连续，除 $z=1$ 外处处有则，则级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

在圆 $|z|=1$ 上一致收敛.

证. 我们需要以下的引理:

如果 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ 及 $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\zeta})=g(\zeta)$ (存在). 这个极限对所有的 ζ 是一致的，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\varphi}$ 一致收敛于 $g(\varphi)$.

这条引理与 Tauber 定理的证明相同(但请注意一致性). 由此引理，我们仅需证明 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

不失普遍性可以假定 $f(1)=0$. 命 M 是 $|f(z)|$ 在 ζ 上的最大值. 给与 $\delta>0$, 可以取 $r(=r(\delta))$ 使在 Q 的直线边界上

$$|f(z)|<\delta,$$

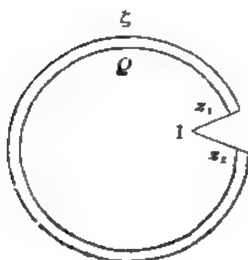


图 59

而此处

$$Q:\ |z|\leqslant r,\quad \vartheta\leqslant\arg(z-1)\leqslant 2\pi-\vartheta.$$

由 Cauchy 定理(由于 $f(z)$ 在 Q 上连续)，得

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_1^{z_1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz+\int_{z_1}^{z_2}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz+\int_{z_2}^{1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right).$$

当 $n>0$ 时，

$$\left|\int_1^{z_1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\leqslant\delta\int_0^{|z_1-1|}\frac{dy}{|1+e^{i\vartheta}y|^{n+1}}\leqslant\delta\int_0^{|z_1-1|}\frac{dy}{(1+y\cos\vartheta)^{n+1}}$$
$$<\delta\int_0^{\infty}\frac{dy}{(1+y\cos\vartheta)^{n+1}}=\frac{\delta}{n\cos\vartheta}.$$

同法

$$\left|\int_{z_2}^{1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|<\frac{\delta}{n\cos\vartheta}.$$

在由 z_1 到 z_2 的圆弧上

$$\left|\int_{z_1}^{z_2}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|\leqslant 2\pi r\frac{M}{r^{n+1}}=\frac{2\pi M}{r^n},$$

因此

$$|a_n|<\frac{\delta}{\pi\cos\vartheta}\frac{1}{n}+\frac{M}{r^n},$$

即对任一 $\delta>0$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n|a_n|\leqslant\frac{\delta}{\pi\cos\vartheta}.$$

即

$$|a_n|=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

即得所证.

定理 2 (Fejér). 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}n|a_n|^2$$

收敛,则由

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\theta}=s(\theta),\ (A) \tag{1}$$

可以推出

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{in\theta}=s(\theta). \tag{2}$$

并且如果 (1) 的收敛在某一区域内一致,则在同一区域内 (2) 也是一致收敛的.

证. 这定理对多项式显然正确. 命

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}n|a_n|^2=\varepsilon_\nu,$$

这儿 $\varepsilon_\nu>0$ 而且 $\varepsilon_\nu\to 0$. 取 ν 充分大,使

$$r_\nu=1-\frac{\sqrt{\varepsilon_\nu}}{\nu}>0,$$

则对所有的实数 φ

$$\left|\sum_{n=0}^{\nu}a_ne^{n\varphi i}-f(r_\nu e^{\varphi i})\right|=\left|\sum_{n=0}^{\nu}a_ne^{n\varphi i}(1-r_\nu^n)-\sum_{n=\nu+1}^{\infty}a_nr_\nu^ne^{n\varphi i}\right|$$
$$\leqslant(1-r_\nu)\sum_{n=0}^{\nu}n|a_n|+\sum_{n=\nu+1}^{\infty}|a_n|r_\nu^n,$$

右边与φ无关，因此如是证明右边$\to 0$（当$\nu\to\infty$），则定理已证。

由 Schwarz 不等式，上式右边

$$\leqslant (1-r_\nu)\sum_{n=0}^{\nu}\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\,|a_n| + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\sqrt{n}\,|a_n|\,r_\nu^n$$

$$\leqslant (1-r_\nu)\sqrt{\sum_{n=0}^{\nu} n\sum_{n=0}^{\nu} n|a_n|^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\sum_{n=\nu+1}^{\infty} n|a_n|^2\sum_{n=\nu+1}^{\infty} r_\nu^{2n}}$$

$$\leqslant (1-r_\nu)\sqrt{\nu^2\cdot\varepsilon_0} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\sqrt{\varepsilon_\nu\frac{1}{1-r_\nu}} = \sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_\nu} - \sqrt[4]{\varepsilon_\nu}\to 0.$$

即得所证。

由此推得

定理 3. 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2$$

收敛，而且$f(z)$在$|z|\leqslant 1$上连续，在$|z|<1$中有则，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$在圆周上一致收敛。

定理 4. 如果$f(z)$在圆$|z|\leqslant 1$上连续，而且在圆$|z|<1$是单叶的（即由$f(z_1)=f(z_2)$，$|z_1|<1$，$|z_2|<1$可推得$z_1=z_2$），则其幂级数在圆周$|z|=1$上一致收敛。

证．只需证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2<\infty$$

即足．圆$|z|=r(0<r<1)$所变成$w=f(z)$的图形的面积等于

$$\iint_{|z|\leqslant r}|f'(x+iy)|^2 dxdy = \int_0^r \rho d\rho\int_0^{2\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$=\int_0^r \rho d\rho\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} n a_n\rho^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\sum_{m=0}^{\infty} m\bar{a}_m\rho^{m-1}e^{-i(m-1)\theta}d\theta$$

$$=2\pi\int_0^r \rho\sum_{n=0}^{\infty} n^2|a_n|^2\rho^{2n-2}d\rho = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}.$$

即得所证。

§ 15. Borel 多 角 形

一个幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的B'和是

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(zt)^n}{n!}\,dt.$$

例如：取 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$，则

$$\int_0^\infty e^{-t}e^{zt}dt=\frac{1}{1-z}.$$

这个积分当 $\boldsymbol{R}z<1$ 时成立，因此 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的 B' 和得出的函数跑出了收敛圆，而变为在 $\boldsymbol{R}z<1$ 的半平面上也有解析表达式了． 因此 Borel 求和法可以作为解析拓展的工具，拓展范围如何？将是我们本节的内容．

定理 1. 如果幂级数在一点 P 可以 B' 求和，则在 OP 线段上的每一点都可以 B' 求和．如果 Q 是 O，P 间的一点，则级数在 QP 上可以一致求和．

证．我们并不假定 $f(z)$ 有无收敛圆，我们不妨假定 P 就是 $z=1$．命

$$a(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!}$$

及

$$J(z)=\int_0^\infty e^{-t}a(zt)dt. \tag{1}$$

我们现在求证：如果当 $z=1$ 时，(1) 收敛，则在 $0<z\leqslant 1$ 时也收敛，对任一 $\delta>0$，在 $\delta\leqslant z\leqslant 1$ 间一致收敛．命

$$J(z)=\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}}a(t)dt=\frac{K(z)}{z},\quad 0<z\leqslant 1. \tag{2}$$

命

$$s=\frac{1}{z}-1,$$

则

$$K(z)=\int_0^\infty e^{-st}e^{-t}a(t)dt=k(s).$$

这积分当 $s\geqslant 0$ 时一致收敛，即得定理．

定理 1 并不说明全部事实，实质上，$J(z)$ 在 $0\leqslant z\leqslant 1$ 上一致收敛．但以上的证明由于 (2) 式中有 $1/z$ 存在，故难以得此结论．

定理 2. 如果 $\sum a_n z^n$ 在 P 处 B' 可和，则在 OP 上一致可和．

证．仍旧和以前一样，可以假定 P 就是 $z=1$．并且也不妨假定 a_n 是实数．我们要证明的是：当 $H'>H\geqslant H_0(\varepsilon)$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 时，

$$|I|=|I(z,H,H')|=\left|\int_H^{H'}e^{-t}a(zt)dt\right|<\varepsilon.$$

由定理 1 已知在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上一致收敛．因此，我们可以假设 $0\leqslant z\leqslant\frac{1}{2}$．有三种情况：

$$\text{(i) } H'z\leqslant 1,\quad \text{(ii) } Hz<1<H'z\quad \text{或}\quad \text{(iii) } Hz\geqslant 1.$$

我们仅证 (ii)，因为 (i) 与 (iii) 都较简单．不妨假定 $H\geqslant 2$．命

$$M=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|a(t)|,\quad N=\max_{T>1}\left|\int_1^T e^{-t}a(t)dt\right|,$$

则

$$I=\int_H^{1/z}e^{-t}a(zt)dt+\int_{1/z}^{H'}e^{-t}a(zt)dt=I_1+I_2.$$

其中

$$|I_1| \leqslant M\int_H^{\infty} e^{-t}dt = Me^{-H},$$

$$I_2 = \frac{1}{z}\int_1^{H'z} e^{-t/z}a(t)dt = \frac{1}{z}\int_1^{H'z} e^{-tH}e^{-t}a(t)dt$$

$$= \frac{e^{-s}}{z}\int_1^{T} e^{-t}a(t)dt.\quad \left(s = \frac{1}{z} - 1\right)$$

此处 $1 < T < H'z$. 由 $0 < z \leqslant \frac{1}{2}$, $2 \leqslant H \leqslant \frac{1}{z}$, 可知

$$|I_2| \leqslant \frac{N}{z}e^{1-\frac{1}{z}} \leqslant \frac{N}{z}e^{-\frac{1}{2z}} \leqslant NHe^{-\frac{1}{2}H}$$

(当 $u > 2$ 时 $ue^{-\frac{1}{2}u}$ 是递减的). 因此,当 $H \geqslant H_0(\varepsilon)$ 时,

$$|I| \leqslant Me^{-H} + NHe^{-\frac{1}{2}H} < \varepsilon.$$

定理 3. 如果 $\sum a_n z^n$ 在 P 点可 B' 求和, 则其和在 OP 上是 z 的解析函数, 在以 OP 为直径的圆 C 内有则.

证. 仍旧假定 P 是 $z = 1$. 从

$$J(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}a(tz)dt = \frac{K(z)}{z}$$

考虑. 只要证明: 作任二过 OP 的与 OP 成锐角 η 的圆弧,在这样的区域 D 内, $J(z)$ 一致收敛. 写成为

$$z = re^{i\theta},\quad s = z^{-1} - 1 = \rho e^{i\varphi}.$$

由于 $k(s)$ 在 $s = 0$ 时收敛,因此在 $|\varphi| \leqslant \eta$ 中一致收敛. 夹此角的两边就对应于 D 的边界圆弧,其内部对应于 D 的内部,故 $K(z)$ 在 D 内一致收敛.

由

$$f(z) = (c - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c^{-n-1}z^n$$

的 Borel 和

$$J(z) = c^{-1}\int_0^{\infty} e^{-t(1-z/c)}dt$$

当 $R(z/c) < 1$ 收敛, 即当在 $z = c$ 作一垂直于 c 的向径的直线 L_c, 而 z 与 O 在 L_c 的同侧.

这建议以下的概念.

过 $f(z)$ 的奇点 $z = c$ 作 L_c, 所有的 L_c 给出以下的域 D: 对每一 L_c, D 内的点与 O 都在 L_c 的同侧,这样的区域称为函数 $f(z)$ 的 Borel 多边形.

由定理 3 不难推出

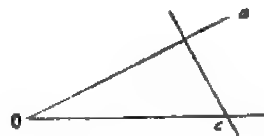


图 60

定理 4. 在 $f(z)$ 的 Borel 多边形中的任一点 $f(z)$ 都是 B' 可求和,而外面的点一定不可能.

前面部分的证明已经不成问题,现在证明后一部分. 如果 Q 是多角形外的一点,则 OQ 一定与某一 L_c 相交. 如果在 Q 点 B' 可求和,则由定理 3, 在 OQ 为直径的圆中也 B' 可求和. C 在此圆内, 即在 C 点 B' 可求和,这与 C 是奇点的假定相违背.

第十二章　适合各种边界条件的调和函数

§1. 引　　言

命 $\mathscr{D}$ 是一个域，以闭曲线 C 为其边界，在本章中我们常假定 $\mathscr{D}$ 是单连通的，并且，$\overline{\mathscr{D}}$ 代表 $\mathscr{D}$ 的闭包(即 $\mathscr{D}+C$)。为了简单起见我们还假定曲线 C 有参变数表达式

$$x=\varphi(t),\quad y=\phi(t),$$

并且 φ,ϕ 是有连续微商的函数，我们常用 ζ 表示 C 上的变数。

在 $\mathscr{D}$ 内适合于 Laplace 方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

的函数称为 $\mathscr{D}$ 内的调和函数。

关于调和函数的边值问题我们已经讨论过：

I Dirichlet 问题． 即寻求在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续在 $\mathscr{D}$ 内调和的函数 $u(z)$，使其在边界 C 上 $u(z)$ 等于一个给定的函数 $\varphi(\zeta)$。我们或简单地写成为

$$\Delta u=0,\quad u|_C=\varphi(\zeta). \tag{2}$$

以后常用这样的符号，切勿忘记 $\chi|_C$ 仅当 χ 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续时方有意义(关于边界值不连续的情况我们不深入讨论)。

这问题已经解决，并知道 Dirichlet 问题的解答是存在的，而且是唯一的。

II Neumann 问题．

$$\Delta u=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C=\phi(\zeta). \tag{3}$$

这问题的解答存在的必要且充分的条件是

$$\int_C \phi(\zeta)d\zeta=0. \tag{4}$$

$\left(\text{因为由 Green 公式 } \int_C \frac{\partial u}{\partial n}d\zeta=\iint_{\mathscr{D}}\Delta u dxdy=0.\right)$ 解答虽不唯一，但可能仅相差一常数项。

这两问题在数学物理上的应用最为广泛，但有时也会出现以下的种种混合边界问题。

III 在 C 上有些部分给出 u，而另一些部分给出 $\frac{\partial u}{\partial n}$，具体的说：在 C 上顺次取 $2n$ 个点

$$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n.$$

求适合于

$$u=\varphi(\zeta),\quad \text{如果 } \zeta\in(a_k,b_k), \tag{5}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}=\phi(\zeta),\quad \text{如果 } \zeta\in(b_k,a_{k+1}),$$

$k = 1, 2, \cdots, n$ 及 $a_{n+1} = a_1$ 的调和函数.

II 的另一推广是

IV 混合边界问题.

$$\Delta u = 0, \quad a(\zeta)\frac{\partial u}{\partial x} + b(\zeta)\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_C = C(\zeta). \tag{6}$$

第二式可能代之为

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(\zeta)(u - p(\zeta))|_C = 0. \tag{7}$$

本章中也顺便处理

V 双调和方程

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \tag{8}$$

$$u|_C = \varphi(\zeta), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = \psi(\zeta) \tag{9}$$

及

VI 混合型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \theta(y) = \begin{cases} 1, & 若\ y > 0, \\ -1, & 若\ y < 0. \end{cases}$$

由于 Laplace 方程经保角变换而不变，本章中有时仅处理 $\mathscr{D}$ 为单位圆、有时为上半平面的情况. 实质上,这并不失去普遍性.

本章将分为三部分：首先讲不采用新工具所能解决的问题,其次用 Canchy 型积分来处理的一些问题,再其次用 Келдыш-Седов 公式来处理的一些问题.

§ 2. Poisson 方程

Poisson 方程

$$\Delta u = \rho(x, y) \tag{1}$$

可以作为 Laplace 方程的推广,但实质上，如果知道 (1) 有一解 u_1，则问题立刻化为各种各样边界值的 Laplace 方程

$$\Delta(u - u_1) = 0$$

的求解问题. 我们将证明

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\log\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\,d\xi d\eta \tag{2}$$

就是 (1) 的一个解. 因此,今后不特别讨论 Poisson 方程了.

假定 $\rho(\xi, \eta)$ 是 (ξ, η) 的连续函数，所以 $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant C$，为简单起见，我们用符号 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. 注意 $\log\frac{1}{r}$ 是一个有奇点 $x = \xi$, $y = \eta$ 的函数,除此奇点外,不难证明

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r} = -\frac{x-\xi}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\log\frac{1}{r} = -\frac{y-\eta}{r^2},$$

$$\Delta \log \frac{1}{r} = 0. \tag{3}$$

因此如果 (x, y) 在 $\mathscr{D}$ 的外面，则可以积分号下求微商，因而得出

$$\Delta u(x, y) = 0.$$

当 (x, y) 在 $\mathscr{D}$ 内时，(2) 是瑕积分。

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}\,d\xi d\eta = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{x-\xi}{r^2}\,d\xi d\eta, \\ Y &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{1}{r}\,d\xi d\eta = -\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}} \rho(\xi, \eta)\frac{y-\eta}{r^2}\,d\xi d\eta, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

也是瑕积分，但不难证明它们都是收敛的。

1）今先证明

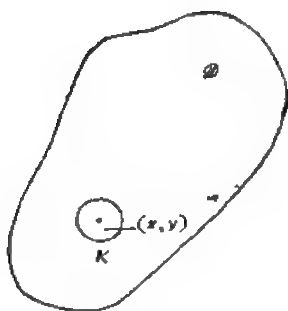


图 61

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

即证明：给了任一 $\varepsilon > 0$，可以取得 δ，使 $|\Delta x| < \delta$ 时，

$$\left|\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} - X\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

以 (x, y) 为中心，τ 为半径作一圆 K，取 τ 足够小使圆在 $\mathscr{D}$ 中。把积分 (2) 分拆为两部分：u_1 是过小圆 K 的积分，而 u_2 是过 $\mathscr{D} - K$ 的积分。同样定义 X_1, X_2.

我们来证明：可以取得 δ，使 $|\Delta x| < \varepsilon$ 时，由

$$\left|\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} - X\right| \leqslant \left|\frac{u_2(x+\Delta x, y) - u_2(x, y)}{\Delta x} - X_2\right|$$

$$+ |X_1| + \left|\frac{u_1(x+\Delta x, y) - u_1(x, y)}{\Delta x}\right| = J_1 + J_2 + J_3 \quad (\text{定义})$$

分成的 J_1, J_2, J_3 都小于 $\frac{\varepsilon}{3}$.

先看 J_2. 由于

$$|X_1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\iint_{r\leqslant\tau} \rho\frac{x-\xi}{r^2}\,d\xi d\eta\right| \leqslant \frac{C}{2\pi}\left|\iint_{r\leqslant\tau} \frac{x-\xi}{r^2}\,d\xi d\eta\right| \leqslant \frac{C}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau}\frac{d\xi d\eta}{r}$$

$$= \frac{C}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\tau} dr d\theta = \tau c,$$

故可取 τ，使 $|X_1| < \varepsilon/3$.

再看 J_3.

$$J_3 = \left|\frac{u_1(x+\Delta x, y) - u_1(x, y)}{\Delta x}\right|$$

$$= \frac{1}{|\Delta x| 2\pi}\left|\iint_K \rho\log\frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{\sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\,d\xi d\eta\right|,$$

由于三角形两边之差不大于第三边，所以

$$\left|\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - \sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right| < |\Delta x|.$$

而 $|\log(1+t)| \leqslant |t|$，因此

$$\left|-\log\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x+\Delta x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right| \leqslant \frac{|\Delta x|}{r}.$$

于是

$$J_3 \leqslant \frac{C}{2\pi}\iint_K \frac{d\xi d\eta}{r}$$

也是 τC，可以取 τ，使 $J_3 < \frac{\varepsilon}{3}$.

最后，当 τ 取定后，由于 (x, y) 在 K 内，即在 $\mathscr{D}-K$ 之外，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_2(x+\Delta x, y)-u_2(x, y)}{\Delta x} = X_2.$$

即可取 δ 使 $|\Delta x| < \delta$ 时，$|J_1| < \frac{\varepsilon}{3}$.

2）以上证明我们可用积分号下求微商法算出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. 但这方法并不能用来算二阶微商，其理由是

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}}\rho(\xi, \eta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log r\, d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathscr{D}}\rho(\xi, \eta)\frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r^4}d\xi d\eta$$

是并不收敛的.

依然把 u 分拆成为 u_1+u_2，

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau}\rho(\xi, \eta)\log\frac{1}{r}d\xi d\eta,$$

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\iint_{r>\tau}\rho(\xi, \eta)\log\frac{1}{r}d\xi d\eta.$$

在取定了 τ 之后，u_2 可以积分号下求微分，我们易证明 $\Delta u_2 = 0$.

现在看 u_1，由 1）已知

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau}\rho(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}d\xi d\eta = -\frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau}\rho(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial\xi}\log\frac{1}{r}d\xi d\eta$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\rho\log\frac{1}{r}\right)d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau}\log\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}d\xi d\eta.$$

由 Green 公式得出

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r=\tau}\rho\log\frac{1}{r}d\eta + \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau}\log\frac{\partial\rho}{\partial\xi}d\xi d\eta.$$

与 1）相仿可以证明，这个式子可以积分号下求微商，即得

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{r=\tau}\rho\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}d\eta + \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant\tau}\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\rho}{\partial\xi}d\xi d\eta = K_1 + K_2.$$

当 $\tau\to 0$ 时，

$$|K_2| \leqslant C_1\iint_{r\leqslant\tau}\frac{(x-\xi)}{r^2}d\xi d\eta \leqslant C_1\iint_{r\leqslant\tau}\frac{d\xi d\eta}{r} = 0(\tau).$$

在 K_1 中首先考虑 $\rho = 1$ 的情况：命 $\xi = x + r\cos\theta$，$\eta = y + r\sin\theta$，则

$$-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{1}{r}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x-\xi}{r^2}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}.$$

因此当 $\tau \to 0$ 时，

$$K \to \frac{1}{2}\rho(x, y).$$

于是证得，当 $\tau \to 0$ 时，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \to \rho(x, y).$$

所以积分 (2) 适合于

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y).$$

§3. 双调和方程

求 $u(x, y)$ 使其在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续而且有一阶连续法微商 $\frac{\partial u}{\partial n}$，并且

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \quad (\text{在 } \mathscr{D} \text{ 内}) \tag{1}$$

$$u|_C = g(s), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = h(s). \tag{2}$$

这儿 $g(s)$ 与 $h(s)$ 是 C 上用弧长 s 确定的函数.

1) 解的唯一性. 如果还有一解 u_1，则 $v = u - u_1$ 适合于

$$\Delta\Delta v = 0, \quad v|_C = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_C = 0. \tag{3}$$

把 Green 公式

$$\iint_{\mathscr{D}} (\phi\Delta\varphi - \varphi\Delta\phi)dxdy = \int_C \left(\phi\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)ds$$

用到 $\varphi = v$, $\phi = \Delta v$ 上，则得

$$\iint_{\mathscr{D}} (\Delta v)^2 ds = 0.$$

因此得出 $\Delta v = 0$.

再由 $v|_C = 0$, 可知 $v \equiv 0$, 即得 $u = u_1$.

2) 用调和函数表双调和函数.

如果 u_1, u_2 是 $\mathscr{D}$ 中的两个调和函数，则函数 $u = xu_1 + u_2$ 一定是 $\mathscr{D}$ 的双调和函数.

利用恒等式

$$\Delta(\varphi\phi) = \varphi\Delta\phi + \phi\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right),$$

可得

$$\Delta u = \Delta x u_1 = 2\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

再由 $\Delta u_1 = 0$, 可知

$$\Delta\Delta u = 0.$$

3）如果任一与 x 轴平行的直线不交 C 于两点以上，则有以下的逆定理．

$\mathscr{D}$ 的一个双调和函数 u 一定可以表成为 $u = xu_1 + u_2$，这儿 u_1, u_2 是 $\mathscr{D}$ 的调和函数．

证．显然只要证明，可以找到一个调和函数 u_1 使 $u - xu_1$ 也是调和函数，即

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u = \Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{4}$$

函数

$$u_1^*(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}\Delta u(\xi, y) d\xi$$

适合于 (4) 的第二式，又

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u_1^*(x, y) = \Delta\frac{\partial}{\partial x}u_1^*(x, y) = \frac{1}{2}\Delta\Delta u = 0,$$

即 Δu_1^* 与 x 无关，命之为

$$\Delta u_1^* = \nu(y).$$

显然可找到一个仅与 y 有关的函数 u_1^{**} 使

$$\Delta u_1^{**} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_1^{**} = -\nu(y).$$

合并起来 $u_1 = u_1^* + u_1^{**}$ 适合 (4) 式的前后两式，即得所证．

4）如果 $\mathscr{D}$ 是一星形区，即内有一点，不妨假定它就是原点．过这点的射线只交 C 于一点，则 $\mathscr{D}$ 上的双调和函数一定可以表成为

$$u = (r^2 - r_0^2)u_1 + u_2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \qquad r_0 \text{是常数}.$$

这儿 u_1, u_2 是调和函数，也就待证，有一调和函数 u_1 使

$$\Delta(u - (r^2 - r_0^2)u_1) = 0.$$

利用恒等式

$$\Delta(\varphi\phi) = \varphi\Delta\phi + \phi\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$

及

$$\Delta r^2 = 4, \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

如前法，可得所证．

§4. 单位圆的双调和方程

对单位圆来说，我们不妨假定所考虑的双调和函数是

$$u = (r^2 - 1)u_1 + u_2$$

的形式，由边界条件可知

$$u_2|_{r=1} = u|_{r=1} = g(\theta).$$

由 Poisson 公式可知

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1 - r^2)g(\phi)}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi. \tag{1}$$

第二个边界条件是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = 2u_1 + \left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=1} = h(\theta).$$

由于 $2u_1 + r\frac{\partial u_2}{\partial r}$ 也是调和函数，所以

$$2u_1 + r\frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)h(\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi. \tag{2}$$

将 (1) 式对 r 求微商代人 (2) 式可以找到 u_1，因此

$$u = (r^2-1)u_1 + u_2 = \frac{1}{2\pi}(r^2-1)\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{h(\phi)d\phi}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\right.$$
$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{1-r\cos(\theta-\phi)}{(1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2)^2}g(\phi)d\phi\right].$$

如果把单位圆变为以原点为中心，r_0 为半径的圆，则解答是

$$u = \frac{1}{2\pi r_0}(r^2-r_0^2)\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{h(\phi)d\phi}{r_0^2+r^2-2rr_0\cos(\theta-\phi)}\right.$$
$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{(r_0-r\cos(\theta-\phi))g(\phi)}{(1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2)^2}d\phi\right].$$

习题　作出以上半平面为 $\mathscr{D}$ 的双调和方程的解.

§5. Cauchy 型积分的背景

在第四章 §2 中已经定义了单位圆的 Cauchy 型积分，现在来看看它的意义，然后在下节中把它推广为任意的曲线.

在单位圆周上给了一个函数 $\varphi(\zeta)$，$\zeta = e^{i\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 作为 θ 的函数，它是一个以 2π 为周期的函数．积分

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\zeta \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}-z} \end{aligned} \tag{1}$$

称为一个 Cauchy 型积分.

假定 $\varphi(\zeta)$ 有 Fourier 展开式

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}, \tag{2}$$

则当 z 在单位圆内，有

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} z^m e^{-im\theta}.$$

由 $e^{-im\theta}$ 的正交性质，并假定可以逐项求积分，则得

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}\sum_{m=0}^{\infty} z^m e^{-im\theta}d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n. \end{aligned} \tag{3}$$

这是一个圆内的解析函数,并且有

$$\lim_{\rho\to 1-0} F(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\theta}. \tag{4}$$

这是由原 Founier 级数 (2) 的具非负指数诸项的和,以 $F^+(\xi)$ 表之.

如果 z 在单位圆外,则

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} = -\frac{\zeta}{z}\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-1} = -\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{l}.$$

因此

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}\sum_{l=1}^{\infty} z^{-l} e^{il\theta} d\theta$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{C-e}{z^l}. \tag{5}$$

这是一个圆外的解析函数(包括 ∞),而且

$$\lim_{\rho\to 1+0} F(\rho e^{i\theta}) = -\sum_{l=1}^{\infty} C_{-l} e^{-il\theta}. \tag{6}$$

这是由原级数 (2) 的具负指数诸项的和的反号,以 $F^-(\zeta)$ 表之.

显然易见

$$\varphi(\zeta) = F^+(\zeta) - F^-(\zeta). \tag{7}$$

再研究 $z = \zeta_0 = e^{i\theta_0}$ 是圆周上的一点的情况. 先算出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta-\zeta_0}d\theta = \begin{cases}\frac{1}{2}\zeta_0^n, & 若\ n \geqslant 0,\\ \frac{1}{2}\zeta_0^n, & 若\ n < 0.\end{cases} \tag{7'}$$

这积分是瑕积分. 瑕点在 $\theta = \theta_0$. 这积分应当理解为 0 到 $\theta_0 - \varepsilon$, 再从 $\theta_0 + \varepsilon$ 到 2π, 然后命 $\varepsilon \to 0$, 即所谓这积分取 Cauchy 主值.

当 $n = 0$ 时,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta}{\zeta-\zeta_0}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta}{\zeta-1}d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{e^{\frac{1}{2}i\theta}}{e^{\frac{1}{2}i\theta}-e^{-\frac{1}{2}i\theta}}d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{2i\sin\frac{1}{2}\theta}d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2i\pi}\log\frac{\sin\frac{1}{2}(2\pi-\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{1}{2}.$$

行归纳法,对 $n > 0$ 时,有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta-\zeta_0}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\zeta^n + \frac{\zeta_0\zeta^n}{\zeta-\zeta_0}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\zeta_0\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^n}{\zeta-\zeta_0}d\theta.$$

即得所证. 当 $n=-l<0$ 时,由

$$\overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{-l+1}}{\zeta-\zeta_0}d\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{l-1}}{\zeta^{-1}-\zeta_0^{-1}}d\theta$$

$$=\frac{\zeta_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^l}{\zeta_0-\zeta}d\theta=-\frac{1}{2}\zeta_0^l=-\frac{1}{2}(\zeta_0)^{-l},$$

取共轭虚数可得 (7′) 式当 $n<0$ 的部分.

现在来考虑当 $z=\zeta_0$ 时积分 (1) 的意义. 它也是瑕积分,也取 Cauchy 主值,把 (2) 式代入 (1),如果允许可以逐项积分,则

$$F(\zeta_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta^{n+1}}{\zeta-\zeta_0}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_n\zeta_0^n-\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n\zeta_0^{-n}$$

$$=\frac{1}{2}(F^+(\zeta_0)+F^-(\zeta_0)). \tag{8}$$

与 (6) 联合得出

$$\left.\begin{aligned}F^+(\zeta)=F(\zeta)+\frac{1}{2}\varphi(\zeta),\\ F^-(\zeta)=F(\zeta)-\frac{1}{2}\varphi(\zeta).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

这是 Cauchy 型积分的主要公式.

如果在圆周上一段弧 r 之外取 $\varphi(\zeta)=0$, 则 (9) 式对 r 的一内点也成立,因之如果 (1) 的积分在一般圆弧上,结论 (9) 也是正确的.

再由保角变换基本定理,我们可望 (9) 式对一条任意弧的积分也对. 但是 Cauchy 型积分不是经保角变换而不变的,因此我们还须用第四章所用过的方法,为了避免这些麻烦我们还是从头做起.

§6. Cauchy 型积分

假定 C 是一条曲线, 有参变数表达式 $x=\phi(t)$, $y=\chi(t)$, 而且 $\phi(t)$ 与 $\chi(t)$ 有连续微商, $\varphi(\zeta)$ 是 C 上定义的函数. Cauchy 型积分指



图 62

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{1}$$

关于 $\varphi(\zeta)$, 我们假定它适合 Hölder 条件

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)|\leqslant M|\zeta-\zeta_0|^\mu,\quad 0<\mu\leqslant 1.$$

如果 z 不在 C 上,则 (1) 显然存在而且代表 z 的解析函数,我们现在来说明 $z=\zeta_0$ 是 C 上的一点时,积分 (1) 的意义. 取定曲线 C 的方向,以 ζ_0 为中心 ε 为半径作圆交曲线 C 于两点 ζ', ζ''. 今往证明当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_a^{\zeta'}+\int_{\zeta''}^b\right)\frac{\zeta(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}$$

的极限存在(注意由 a 到 b 先经 ζ' 再经 ζ''). 由 Hölder条件易知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$$

是存在的. 再看

$$\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\left(\int_a^{\zeta'}+\int_{\zeta''}^b\right)\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\left(\log(\zeta-\zeta_0)|_a^{\zeta'}+\log(\zeta-\zeta_0)|_{\zeta''}^b\right)$$

$$=\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\left(\log\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}-\log\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0}\right),$$

在弧 $\widehat{a\zeta'}$ 与 $\widehat{\zeta''b}$ 上对数函数的分支如下法确定: $\log(\zeta-\zeta_0)$ 在 $\zeta=a$ 时确定后连续变到 $\zeta=\zeta'$, 然后沿 $|z-\zeta_0|=\varepsilon$ 在曲线 C 的左边的那段弧移动连续变化到 $\zeta=\zeta''$ 的数值,因此

$$|\zeta-\zeta_0|=|\zeta''-\zeta_0|,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\log\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0}=-i\pi. \tag{2}$$

(这是在 ζ_0 有切线的情况,如果在 ζ_0 处左右切线不同,这式子当有自然的改变.)于是,

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_C\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\varphi(\zeta_0)\log\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}+i\pi\varphi(\zeta_0)\right], \tag{3}$$

这称为积分的主值. 如果曲线是封闭的,即 $a=b$, 则 (2) 变为

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \tag{4}$$

附记. 如果曲线 C 在 ζ_0 处有一角点, 即左右二切线的夹角等于 α, 则不难证明公式 (2) 变为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\log\frac{\zeta''-\zeta_0}{\zeta'-\zeta_0}=-i\alpha,$$

因而公式 (3) 就变为

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_C\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\varphi(\zeta_0)\log\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0}\right]+\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(\zeta_0).$$



图 63

由此原则,不难处理有角点的情况.

§7. Сохоцкий 公式

引理. 假定 $\varphi(\zeta)$ 在 $\zeta=\zeta_0$ 处适合 Hölder 条件,则

$$\lim_{z\to\zeta_0}\int_C\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}d\zeta=\int_C\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta,$$

z 趋于 ζ_0 适合以下的条件: 命 $h=|z-\zeta_0|$, d 等于 z 到 C 上的点间的最短距离,比值 $\frac{h}{d}$ 有界.

证. 考虑这两积分的差额:

$$\Delta = \int_C (z-\zeta_0)\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{(\zeta-z)(\zeta-\zeta_0)}d\zeta.$$



图 64

把这积分分为两份,其一适合于 $|\zeta-\zeta_0|<\delta$, 它在此范围之外以 C' 表之. δ 是一待选的足够小的正数,命之为 $\Delta_1+\Delta_2$.

关于前一积分,利用 Hölder 条件及 $|\zeta-z|\geqslant d$ 可知

$$|\Delta_1|\leqslant\int_C \frac{h}{d}\frac{M|\zeta-\zeta_0|^\mu}{|\zeta-\zeta_0|}|d\zeta| = \frac{hM}{d}\int_C|\zeta-\zeta_0|^{\mu-1}|d\zeta|.$$

由于 $|d\zeta| = |\sqrt{\phi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt|\leqslant A\,dt$, 因此

$$|\Delta_1|\leqslant\frac{2h}{d}MA\int_0^\delta\frac{dt}{t^{1-\mu}} = O(\delta^\mu).$$

当 δ 足够小时, $|\Delta_r|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

其次 C' 中不包有 ζ_0, 当 δ 固定时,积分

$$\int_{C'}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}d\zeta$$

作为 z 的函数在 $z=\zeta_0$ 处连续,因此对足够小的 $h=|z-\zeta_0|$, $|\Delta_2|$ 也不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$, 即我们有

$$|\Delta|\leqslant|\Delta_1|+|\Delta_2|<\varepsilon.$$

引理证毕.

附记. $\frac{h}{d}$ 有界的意义如下: 以 ζ_0 为顶角,作二边,这两边都与切线留有角度(这样的角度在研究 Abel-Tauber 定理时已经用过, 习惯称为 Stolz 角). 实质不难证明在 Stolz 角中,以上的极限公式是一致收敛的公式.

定理 1 (Сохоцкий). 假定 ζ_0 是 C 上的一点, 但非端点; $\varphi(\zeta)$ 在 $\zeta=\zeta_0$ 处适合 Hölder 条件, 又当 $z\to\zeta_0$ 时常使比值 $\frac{h}{d}$ 有界, 则当 z 从 C 的左方或右方趋于 ζ_0 时, Cauchy 型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{1}$$

分别趋于

$$F^+(\zeta_0)=F(\zeta_0)+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0), \tag{2}$$

$$F^-(\zeta_0)=F(\zeta_0)-\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0). \tag{3}$$

式中 $F(\zeta_0)$ 是积分 (1) 的 Cauchy 主值.

证. 1) 假定 C 是封闭曲线,并且按定向进行,即依时针反向,则

$$\begin{aligned}F(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\int_C\frac{d\zeta}{\zeta-z}.\end{aligned}$$

由引理，为 $z\to\zeta_0$ 右端第一积分趋于 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta$，而第二积分等于 $\varphi(\zeta_0)$ 或 0，视 z 在 C 内或 C 外而定. 因此得极限公式

$$F^+(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\varphi(\zeta_0),$$

$$F^-(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta.$$

由§6公式(4)可得 Сохоцкий 公式.

2) 如果 C 不是闭曲线，我们可以添上一段 C'，使 $C+C'=C_0$ 成为一闭曲线，在 C' 上定义 $\varphi(\zeta)=0$. 注意，这样定义的曲线上函数可能不连续，但注意 1) 的讨论是局部性的，只要在 $\zeta=\zeta_0$ 附近适合 Hölder 条件即足. 于是

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

如果 ζ_0 不是 C 的端点，则由 1) 可以推出一般定理.

由 Сохоцкий 公式立刻推出

当在 $\zeta=\zeta_0$ 处越过积分曲线 C 时，Cauchy 积分 (1) 有一跃距

$$F^+(\zeta_0)-F^-(\zeta_0)=\varphi(\zeta_0). \tag{4}$$

附记. 如果 ζ_0 在曲线 C 上是一个角度为 α 的角点(注意右边角)，则 Сохоцкий 公式可以改为

$$F^+(\zeta_0)=F(\zeta_0)+\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\varphi(\zeta_0),\qquad 0<\alpha<2\pi,$$
$$F^-(\zeta_0)=F(\zeta_0)-\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(\zeta_0).$$

定理 2. 假定 C 是一条闭曲线，$\varphi(\zeta)$ 在 C 上适合 Hölder 条件，则 Cauchy 型积分成为 C 内的 Cauchy 积分的必要且充分条件是

$$\int_C \zeta^n\varphi(\zeta)d\zeta=0,\quad n=0,1,2,\cdots; \tag{5}$$

成为 C 的外部的 Cauchy 积分的必要且充分条件是

$$\int_C \zeta^{-m}\varphi(\zeta)d\zeta=0,\quad m=1,2,\cdots. \tag{6}$$

所谓 C 内 Cauchy 积分乃指 $\varphi(\zeta)$ 恰好等于 C 内的解析函数，$F(z)$ 趋于 C 上的边界值.

注. 我们仅证 C 内. C 外或可由 C 内推出，或可简捷模仿证明. 1) 充分性. 在无穷远点处有展式

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{z^{n+1}},$$

因此，在 $z=\infty$ 的附近

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\int_C\zeta^n\varphi(\zeta)d\zeta. \tag{7}$$

利用条件 (5) 可知在 $z=\infty$ 的一邻域内 $F(z)\equiv 0$，由于 $F(z)$ 的解析性所以在 C 外 $F(z)\equiv 0$，因此 $F^-(\zeta)\equiv 0$. 由定理 1 可知 $F(\zeta)=\frac{1}{2}\varphi(\zeta)$ 及 $F^+(\zeta)=\varphi(\zeta)$，即

在C的内部，Cauchy 型积分表一解析函数 $F(z)$. 当 z 趋于边界时,这函数就趋于积分号下出现的函数 $F^+(\zeta)=\varphi(\zeta)$.

2) 必要性. 如果 $F(z)$ 是一个 Cauchy 积分，对C外部的 z 来说，$\frac{\varphi(\omega)}{\omega-z}$ 是一个当 ω 在 C 内处处解析的函数,而且在 C 上是连续的,根据 Cauchy 定理

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0,\quad (z\text{ 在 }C\text{ 外})$$

因此 (7) 式所有的系数都等于 0，这便是条件 (6).

习题 1. 试把 Сохоцкий 的定理推广到单位正方形 $|x|=\frac{1}{2}$, $|y|=\frac{1}{2}$ 上，请特别注意在四角的情况.

习题 2. 假定 $\varphi(\zeta)$ 有有限个第一类间断点,对这些间断点定理应当如何修改? 注意 $\varphi(\theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$, $0<\theta<2\pi$, C是单位圆的情况.

§8. Hilbert-Привалов 问题

问题: 在封闭曲线C上给定两个复值函数 $a(\zeta)\neq 0$ 及 $b(\zeta)$ 都满足 Hölder 条件，求出两个函数 $f^+(z)$ 及 $f^-(z)$ 一个在C的内部另一在C的外部解析,并且在C上有

$$f^-(\zeta)=a(\zeta)f^+(\zeta)+b(\zeta).\tag{1}$$

这问题在数学物理中有各种重要应用.

在求解这问题前先试一下单位圆的情况: 假定 $a(\zeta)$ 与 $b(\zeta)$ 各有 Fourier 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n,\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\zeta^n,\tag{2}$$

而 $f^-(\zeta)$ 与 $f^+(\zeta)$ 的 Fourier 展式各为

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n\zeta^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}d_n\zeta^n,\tag{3}$$

因此问题一变而为求 C_n, d_n 的问题了.

一眼看出,这问题有时无解. 例如, $a(\zeta)$ 只有正指数项及 $b(\zeta)=0$, 这样 (1) 式右边只有正指数项不可能等于左边.

又，这问题的解答也可能不唯一，因为如果取 $a(\zeta)=\frac{1}{\zeta^n}$, $b(\zeta)=0$, 则对任意的 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 常有

$$\left(a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\cdots+\frac{a_n}{\zeta^n}\right)=\frac{1}{\zeta^n}(a_0\zeta^n+\cdots+a_n).$$

Hilbert 原问题是 $b(\zeta)\equiv 0$, 一般问题是 Привалов 推广的，现在介绍 Гахов 的解如下.

1) $a(\zeta)\equiv 1$. 这特例特别容易,但这是解法的主要部分,因由 Сохоцкий 公式可知

$$F^+(\zeta)-F^-(\zeta)=\varphi(\zeta).$$

取 $\varphi(\zeta)=-b(\zeta)$, 则 Cauchy 型积分

$$f(z)=F(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{b(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\tag{4}$$

就是原问题的一个解。

如果还有一解

$$g^+(\zeta)-g^-(\zeta)=\varphi(\zeta),$$

则得

$$f^+(\zeta)-g^+(\zeta)=f^-(\zeta)-g^-(\zeta).$$

即 $f^+(z)-g^+(z)$ 在 C 内代表一解析函数，$f^-(z)-g^-(z)$ 在 C 外代表一解析函数，而在 C 上完全吻合，因此二者构成整个平面上的解析函数(包括 ∞)。由 Liouville 定理可知它是一常数，即(4)加一常数是问题的一般解，而无其他解。

2) $b(\zeta)\equiv 0$。

21) 假定 $\log a(\zeta)$ 在 C 上是单值函数，则由

$$\log f^-(\zeta)=\log f^+(\zeta)+\log a(\zeta)$$

及1)可知这问题一定有以下的解

$$f^\pm(z)=Ae^{-F^\pm(z)},\quad F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\log a(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},\tag{5}$$

这儿 A 是一常数。

22) 如果 $\log a(\zeta)$ 非单值函数，由于 $a(\zeta)$ 是单值函数，所以当 ζ 绕 C 一周，$\log a(\zeta)$ 增加 2π 的一个整倍数。这整数称为指示数，也可以表成为

$$m=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg a(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C d\log a(\zeta).$$

不妨假定 C 是包有原点的，如是则

$$a_1(\zeta)=\zeta^{-m}a(\zeta)$$

的指示数为0。由21)已知有函数

$$g^\pm(z)=e^{-G^\pm(z)},\quad G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\log a_1(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

适合于

$$g^-(\zeta)=a_1(\zeta)g^+(\zeta).$$

因此求 $f^\pm$ 适合于

$$f^-(\zeta)=a(\zeta)f^+(\zeta)$$

的问题，一变而为求 $h^\pm$ 使

$$h^-(\zeta)=\zeta^m h^+(\zeta)\quad (f^\pm=g^\pm h^\pm)\tag{6}$$

的问题了。

221) 假定 $m=-n$ 是一负整数，则

$$h^+(z),\ z^n h^-(z)$$

是在 C 上相等的函数。因而它们相互是解析延拓。由于 $h^-(z)$ 在 ∞ 处有则，因此这函数是一在 ∞ 有 n 阶极点的函数，即

$$h^+(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,$$

而

$$h^-(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}.$$

因而

$$f^+(z) = (a_0 z^n + \cdots + a_n) e^{-G^+(z)},$$
$$f^-(z) = \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right) e^{-G^-(z)}, \tag{7}$$
而
$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\log(\zeta^{-m} a(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta. \tag{8}$$
其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是任意常数,并且 a_0 由 $f^-(\infty)$ 来决定.

不难证明,此外无其它解.

222) 指示数 $m > 0$ 时,证明 Hilbert 问题无解. 由 (6) 可知 $h^-(z)$, $z^m h^+(z)$ 构成一解析函数,在整平面内处处有则,它是常数,但在 $z = 0$ 时这函数为 0,因此这常数为 0. 即 $h^- = h^+ \equiv 0$.

总结出

定理 1 (Гахов). 如果边界函数 $a(\zeta)$ 的指示数 $-n$ 不是正的,则 Hilbert 问题 $f(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta)$ 有 $n + 1$ 个线性独立的解. 不然,则无解.

§9. 续

现在考虑更一般的 Привалов 问题
$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta) + b(\zeta). \tag{1}$$
仍命 $a(\zeta) = \zeta^m a_1(\zeta)$,
$$g^-(\zeta) = a_1(\zeta) g^+(\zeta), \tag{2}$$
$$g^\pm(z) = e^{-G^\pm(z)}, \quad G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\log(\zeta^{-m} a(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta.$$
命 $f^\pm = g^\pm h^\pm$, 则由 (1) 及 (2) 可知
$$h^-(\zeta) = \zeta^m h^+(\zeta) + b(\zeta)/g^-(\zeta). \tag{3}$$
当 $m = 0$ 时,这就是上节 1), 因而有解.
$$h^\pm(z) = A + H^\pm(z),$$
$$H(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{b(\zeta) e^{G^-(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta, \tag{4}$$
这儿 A 是一任意常数. 因此
$$f^\pm(z) = e^{-G^\pm(z)}\{A + H^\pm(z)\}. \tag{5}$$
也不难证明此外无它解.

当 $m = -n < 0$ 时,
$$h^-(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + H^-(z),$$
$$h^+(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n + z^n H^+(z),$$
即得
$$\left.\begin{aligned} f^-(z) &= \left\{a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z_n} + H^-(z)\right\} e^{-G^-(z)}, \\ f^+(z) &= \{a_0 z^n + \cdots + a_n + z^n H^+(z)\} e^{-G^+(z)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

也易于证明这是所有的解.

最后如果指示数 $m > 0$，则

$$h^-(\zeta) = \zeta^m h^+(\zeta) + b(\zeta)e^{G^-(\zeta)},$$

这方程为

$$h^-(z) = A + H^-(z), \quad h^+(z) = \frac{A + H^+(z)}{z^m}. \tag{7}$$

满足并且容易证明,仅有这两个函数才能适合 (7).

看怎样的 $H^+(z)$ 才使 $h^+(z)$ 有则,展开 $H^+(z)$，即

$$\begin{aligned} H^+(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C b(\zeta)e^{G^-(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C b(\zeta)e^{G^-(\zeta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{b(\zeta)e^{G^-(\zeta)}}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right)z^n. \end{aligned}$$

如果要使 $h^+(z)$ 有则,则 A 可以取为等于上式的常数值,而且必须有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{b(\zeta)e^{G^-(\zeta)}}{\zeta^{n+1}}d\zeta = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, m. \tag{8}$$

故当 $m > 0$ 时,只当 (8) 式满足，Привалов 问题才有解.

总之

定理 1 (Гахов). 如果边界函数的指示数 $-n \leqslant 0$，则 Привалов 问题 $f^-(\zeta) = a(\zeta)f^+(\zeta) + b(\zeta)$ 有带 $n+1$ 个参变数的解 (6). 如果 $a(\zeta)$ 的指示数 $m > 0$，则问题仅当适合 (8) 时才能有解.

习题 1. 读者试考虑 $a(\zeta)$, $b(\zeta)$ 可能有间断点的情况.

习题 2. 试考虑非闭曲线的情况.

§ 10. Riemann-Hilbert 问题

闭曲线 C 围绕一个域 $\mathscr{D}$；$a(\zeta)$, $b(\zeta)$, $c(\zeta)$ 是 C 上定义的实函数. 问题是：求一个在 $\mathscr{D}$ 内解析,在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续的函数

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

使在 C 上满足于

$$a(\zeta)u(\zeta) - b(\zeta)v(\zeta) = c(\zeta). \tag{1}$$

Мусхелишвили 的解法：假定 $\mathscr{D}$ 就是单位圆（这不失其普遍性）$|z| < 1$，并假定 $a(\zeta)$, $b(\zeta)$, $c(\zeta)$ 都适合于 Hölder 条件,并且假定在 C 上处处 $a^2(\zeta) + b^2(\zeta) \neq 0$，(1) 可以改写成为

$$2\mathscr{R}((a + ib)f(\zeta)) = (a + bi)f(\zeta) + (a - bi)\overline{f(\zeta)} = 2c. \tag{2}$$

通过 Привалов 问题，我们找出两个解析函数 $F^+(z)$, $F^-(z)$，一在圆内一在圆外，使

$$(a + bi)F^+(\zeta) + (a - bi)F^-(\zeta) = 2c. \tag{3}$$

再作

$$F_*^-(z) = \overline{F^-\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, \quad F_*^+(z) = \overline{F^+\left(\frac{1}{\bar z}\right)},$$

它们也是一个在圆内一个在圆外的解析函数，而且它们也适合于条件 (3). 其理由是：(3) 式的共轭式子是

$$(a - bi)\,\overline{F^+\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)} + (a + bi)\,\overline{F^-\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)} = 2c,$$

即得

$$(a + bi)F_*^+(z) + (a - bi)F_*^-(z) = 2c. \tag{4}$$

命 $f(z) = F^+(z) + F_*^+(z)$，则

$$\overline{f(\zeta)} = \overline{F^+\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)} + \overline{F_*^+\left(\frac{1}{\bar\zeta}\right)} = F_*^-(\zeta) + F^-(\zeta).$$

(3) 加 (4) 得出

$$(a + bi)f(\zeta) + (a - bc)\overline{f(\zeta)} = 2c.$$

附记. 命 $f_1(z)$ 是 $f(z)$ 的积分，即 $\dfrac{df_1}{dz} = f$，命 $f_1(z) = u_1 + iv_1$，则

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = v = -\frac{\partial u_1}{\partial y}.$$

因此 (1) 式可以改写为

$$a(\zeta)\frac{\partial u_1}{\partial x} + b(\zeta)\frac{\partial u_1}{\partial y}\Big|_c = c(\zeta). \tag{5}$$

因而 Riemann-Hilbert 问题可以看成为：求适合边界条件 (5) 的调和函数 u_1，这可以看成为 Neumann 问题的推广. 反之，也可以把广义 Neumann 问题化成为 Riemann-Hilbert 问题.

§ 11. 混合边界值问题解答的唯一性

混合边界值问题：闭曲线 C 包有一区域 $\mathscr{D}$，在 C 上依次取 $2n$ 点 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n$（为了方便起见定义 $a_{n+1} = a_1$），求出一个 $\mathscr{D}$ 内的解析函数，使其在由 a_k 到 b_k 的一段弧上，它的实部等于一给定函数 $\varphi_k(\zeta)$，在由 b_k 到 a_{k+1} 的一段弧上，它的虚部等于一给定函数 $\psi_k(\zeta)$，$k = 1, 2, \cdots, n$.

当然我们假定除去 a_k, b_k 诸点外，在 $\bar{\mathscr{D}}$ 上，这函数是连续的. 我们还常假定 $\varphi_k(\zeta)$, $\psi_k(\zeta)$ 在对应的区间上适合 Hölder 条件.

这问题也可作为 Riemann-Hilbert 问题的特例.

我们现在考虑 $\mathscr{D}$ 是上半平面的情况，而且假定

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n.$$

今后我们用 (b_n, a_{n+1}) 代表两区间 $b_n < x < \infty$, $-\infty < x < a_{n+1}$ 的总和. 命 $f(z) = u(z) + iv(z)$，则混合边界条件就是

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_k(x), \quad 当\ a_k < x < b_k, \\ v &= \psi_k(x), \quad 当\ b_k < x < a_{k+1}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这儿 $k=1, 2, \cdots, n$，且在 (b_n, a_{n+1}) 上 $v=0$.

1) 我们现在先研究一个特别重要的特例：$\varphi_k(x)=0$，$\psi_k(x)=0$.

在线段 (b_{k-1}, a_k) 上，由假定可知 $v(x)=0$，即 $f(z)$ 是实的，即 $W=f(z)$ 把实线段 (b_{k-1}, a_k) 变为实线段．因此函数 $f(z)$ 可以经过 (b_{k-1}, a_k) 解析拓展到下半平面．而且 $f(x-iy)=u(z)-iv(z)$．又在 (a_k, b_k) 上，$f(z)$ 是纯虚的，因此经过 (a_k, b_k) 也可以把 $f(z)$ 解析拓展到下半平面．而且 $f(x-iy)=-u(z)+iv(z)$．因此，绕点 a_k 一周，函数 $f(z)$ 变为 $-f(z)$.

函数

$$g(z)=\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_k}{z-b_k}} \tag{2}$$

与 $f(z)$ 有同前所述的性质．当 $x<a_1$ 时，我们取 $g(z)$ 是正的一分支，这函数显然有以下的性质

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{R}g(x)=0,\quad &\text{当 } a_k<x<b_k,\\ \mathscr{I}g(x)=0,\quad &\text{当 } b_k<x<a_{k+1}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

且绕 a_k 或 b_k 一周，$g(z)$ 变为 $-g(z)$.

函数

$$\frac{f(z)}{g(z)}=p(z) \tag{4}$$

在整个平面上是单值函数，而且除去 a_k, b_k 及 ∞ 外无处不解析．反之，给了一个有这样性质的 $p(z)$，则

$$f(z)=g(z)p(z)$$

就是问题的一般解，显然解不是唯一的.

为了唯一性，我们不得不加一些条件使 $p(z)$ 变为常数．我们加上如下条件

(i) $$f(z)=O(|z-a_k|^{-\frac{1}{2}}),\quad \text{当 } z\to a_k \text{ 时},$$

使 $p(z)$ 在孤立奇点 $z=a_k$ 处，

$$p(z)=O(|z-a_k|^{-1}),$$

即 $p(z)$ 在 $z=a_k$ 处有则.

同样加上

(ii) $$f(z)=O(|z-b_k|^{-\frac{1}{2}}),\quad \text{当 } z\to b_k \text{ 时},$$

使 $p(z)$ 在 $z=b_k$ 处有则.

再假定，当 $z\to\infty$ 时

(iii) $$f(z)\to C,$$

则 $p(z)$ 在 $z=\infty$ 也有则，因此它是一个常数 C[1]．即适合于条件 (i), (ii), (iii) 与混合边界条件 (3) 的问题有唯一解：

$$f(z)=Cg(z)=C\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{z-a_k}{z-b_k}}.$$

2) 一般问题的解的唯一性问题．假定有两个函数 $f(z)$, $f_1(z)$ 都适合于

---

1) 不难证明 $p(z)$ 在全平面上解析.

$$u_1(x)=u(x)=\varphi_k(x),\quad a_k<x<b_k,$$
$$v_1(x)=v(x)=\psi_k(x),\quad b_k<x<a_{k+1},$$
及条件 (i), (ii), (iii), 则 $f(z)-f_1(z)$ 就是所讨论过的问题. 而且条件 (iii) 变为
$$\lim_{z\to\infty}(f(z)-f_1(z))=0,$$
因此得出 $f(z)\equiv f_1(z)$.

§ 12. Келдыш-Седов 公式

1) 考虑函数
$$2\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}$$
在线段 $a_k<t<b_k$ 上的 Cauchy 型积分
$$\frac{f_k(z)}{g(z)}=\frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k}\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-z},\tag{1}$$
当 $z=t_1$, $b_l<t_1<a_{l+1}(l=1,2,\cdots,n)$ 时, $g(t_1)$ 是实的, $g(t)$ 是纯虚的, 所以 $f_k(t_1)$ 是实的,即
$$v_k(t_1)=\mathscr{I}f_k(t_1)=0.\tag{2}$$
其次, 当 $z=t_2$, $a_l<t_2<b_l(l=1,2,\cdots,n,\ l\neq k)$ 时, $g(t_2)$ 与 $g(t)$ 都是纯虚的, 因此 $f_k(t_2)$ 是纯虚的,即
$$u_k(t_2)=\mathscr{R}f_k(t_2)=0.\tag{3}$$
现在考虑 $a_k<t_0<b_k$. 当 z 由上半平面趋于 t_0 时, Cauchy 型积分的值等于 (Сохоцкий 公式)
$$\frac{f_k^+(t_0)}{g(t_0)}=\frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k}\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-t_0}.$$
这儿积分取 Cauchy 主值,由 § 6 (3) 可知它等于
$$\frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k}\left(\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}-\frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}\right)\frac{dt}{t-t_0}+\frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}$$
$$+\frac{1}{\pi i}\frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}\log\frac{b_k-t_0}{a_k-t_0}.$$
由于
$$\log\frac{b_k-t_0}{a_k-t_0}=\log\frac{b_k-t_0}{t_0-a_k}-i\pi,$$
所以
$$\frac{f_k^+(t_0)}{g(t_0)}=\frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_{a_k}^{b_k}\left(\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}-\frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}\right)\frac{dt}{t-t_0}$$
$$+\frac{1}{\pi i}\frac{\varphi_k(t_0)}{g(t_0)}\log\frac{b_k-t_0}{t_0-a_k},\tag{4}$$
乘以 $g(t_0)$, 立见
$$\mathscr{R}f_k^+(t_0)=\varphi_k(t_0).\tag{5}$$
也就是 (1) 所定义的 Caucky 积分 $f_k(z)$ 适合于混边界条件 (2), (3), (5).

2）现在来证明 $f_k(z)$ 适合于上面所提出的条件 (i), (ii), (iii), ($c=0$).

当 $z\to\infty$ 时,显然有 $f_k(z)\to 0$, 也不难证明当 $z\to a_l$ 或 $b_l(l\neq k)$ 时,

$$\frac{f_k(z)}{g(z)}=O(1).$$

即 $f_k(z)=O(|z-a_l|^{\frac{1}{2}})$, 及 $f_k(z)=O(|z-b_l|^{-\frac{1}{2}})$. 因此在 $z=a_l$, b_l附近,条件 (i), (ii) 是适合的.

由 (4) 可见,当 $t_0\to a_k$ 时,

$$\frac{f_k^+(t_0)}{g(t_0)}=O\left(|t_0-a_k|^{-\frac{1}{2}}\log\frac{1}{|t_0-a_k|}\right),$$

即

$$f_k^+(t_0)=O\left(\log\frac{1}{|t_0-a_k|}\right).$$

当 z 在上半平面趋于 a_k 时,问题较易,但由于没有与 (4) 相仿的公式,所以处理起来表面上更麻烦一些. 命 $c_K=\frac{1}{2}(a_k+b_K)$, 则当 $z\to a_k$ 时显然有

$$\int_{c_k}^{b_k}\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-z}=O(1).$$

并注意,当 $\varphi(t)$ 有界时

$$\int_{a_k}^{c_k}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t-a_k}}\frac{dt}{t-z}=\int_0^{c_k-a_k}\frac{\varphi(u+a_0)}{\sqrt{u}(u-w)}du\quad(w=z-a_k),$$

$$=\frac{1}{w^{1/2}}\int_0^{(c_k-a_k)/w}\frac{\varphi(\tau_w+a_k)}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau-1)}d\tau\quad(u=\tau w).$$

当 τ 在 0 附近,由于 $\int\frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{2}}}$ 的收敛性;当 τ 在 ∞ 附近,由于 $\int_\tau^{-3/2}d\tau$ 的收敛性; 由于 w 非实的,积分在 $\tau=1$ 附近可以得出 $O\left(\log\frac{1}{|w|}\right)$. 因此,我们仍然有

$$f_k(z)=O\left(\log\frac{1}{|z-a_k|}\right).$$

因此当 $z\to a_k$, $z\to b_k$ 时, 条件 (i), (ii) 都适合. (注意, 这函数可以适合比 (i), (ii) 更严紧的条件. 换言之,在较宽条件 (i), (ii) 之下,我们仍能得出唯一性解答.)

3）同样可以证明: Cauchy 型积分

$$f_k^*(z)=\frac{g(t)}{\pi}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{\psi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-z}$$

适合于 (i), (ii) 及 (iii) (其中 $c=0$) 及以下的边界条件:

$$\begin{aligned}\mathscr{R}f_k^*(z)&=0, &&\text{当 } a_l<t<b_l,\ l=1,2,\cdots,n,\\ \mathscr{I}f_k^*(z)&=\psi_k(t), &&\text{当 } b_k<t<a_{k+1},\\ &=0, &&\text{当 } b_l<t<a_{l+1},\ l\neq k.\end{aligned}$$

4）相加得 Келдыш-Седов 公式

$$f(z)=\sum_{k=1}^n f_k(z)+\sum_{k=1}^n f_k^*(z)+cg(z)$$

适合于 (i), (ii), (iii) 及所给的边界条件

因此得 Келдыш-Седов 公式.

定理 1. 上半平面的混合边值问题有且只有一个适合于以下三条件的解：(i) 当 $z \to a_k$ 时，$f(z) = O(|z - a_k|^{-\frac{1}{2}})$；(ii) 当 $z \to b_k$ 时，$f(z) = O(|z - b_k|^{-\frac{1}{2}})$；(iii) 当 z 在上半平面上趋向 ∞ 时，$f(z)$ 趋于一实数 C，这解由以下的公式给出

$$f(z) = \frac{g(z)}{\pi i}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\frac{\varphi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-z} + i\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{\psi_k(t)}{g(t)}\frac{dt}{t-z} + \pi i c\right).$$

§13. 其他域的 Келдыш-Седов 公式

1）利用保角变换

$$z = \frac{-iw}{w-1}$$

把上半平面 $\mathscr{I} z > 0$ 变为以 $\frac{1}{2}$ 为中心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆，它把 a_k, b_k 变为 α_k, β_k，则

$$\frac{z-a_k}{z-b_k} = \left(\frac{w}{w-1} - \frac{\alpha_k}{\alpha_k - 1}\right)\Big/\left(\frac{w}{w-1} - \frac{\beta_k}{\beta_k - 1}\right)$$

$$= \frac{w-\alpha_k}{w-\beta_k}\Big/\frac{1-\alpha_k}{1-\beta_k}.$$

代入 Келдыш-Седов 公式（为了简单起见我们假定 $f(\infty) = 0$），把符号 w, α_k, β_k 换成 z, a_k, b_k，则得公式

$$f(z) = \frac{g(z)}{\pi i}\int_C \frac{\tau(\zeta)}{g(\zeta)(\zeta - z)}\frac{z-1}{\zeta - 1}d\zeta.$$

这儿 C 代表圆周 $\left|\zeta - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$，$\tau(\zeta)$ 在弧 (a_k, b_k) 上等于 $\varphi_k(\zeta)$，在 (b_k, a_{k+1}) 上等于 $i\psi_k(\zeta)$.

2）读者试自己推出单位圆的情况．这时 Келдыш-Седов 公式的形状是

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)}\int_{|\zeta|=1} g(\zeta)\varphi(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{2\zeta}\right)d\zeta$$

$$+ \sqrt{\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{(z-a_k)(z-b_k)}}\,(C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \cdots + C_n).$$

这儿 $C_0, \cdots, C_n$ 是复常数.

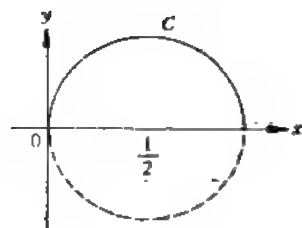


图 65

3）为了下面应用方便起见，我们处理一个半圆

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},$$

$y > 0$ 的问题，并且假定在半圆周上

$$u(z)|_C = \varphi(\zeta),$$

及在直径 $y = 0$ 上

$$u(z) + v(z)|_{y=0} = \chi(x),$$

并假定 $\varphi(\zeta)$, $\chi(x)$ 都适合 Hölder 条件.

这问题既可以用 §11，12 的方法从头处理，也可以直接应用以前的结果.

命 $f_1(z)$ 是适合于

$$u_1(z)|_C = \varphi(\zeta),\ u_1(z) + v_1(z)|_{y=0} = 0$$

的解. $w = f_1(z)$ 将实轴变为 $u + v = 0$. 由对称原理可知函数 $f_1(z)$ 可以解析延拓到下半圆 c^*:

$$f_1(x - iy) = -v_1(x, y) - iu_1(x, y). \tag{1}$$

因此在下半圆周上

$$\mathscr{I} f_1(z) = -\varphi(\zeta).$$

由 1) 可知

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i}\left\{\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right.$$

$$\left. - i\int_{C^*}\sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right\}. \tag{2}$$

圆 $x^2 + y^2 - x = 0$ 的极坐标写法是 $\rho = \cos\theta$, 即 $\zeta = \cos\theta e^{i\theta}$. 当 $0 < \theta < \pi$ 代表上半圆,而 $0 > \theta > -\pi$ 代表下半圆时,显见

$$1 - \zeta = -i\sin\theta e^{i\theta},\quad d\zeta = ie^{2i\theta}d\theta.$$

使用变换 $\theta = -\tau$ (并以 w 代 ζ), 则得

$$\int_{C^*} = i\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{w(1-w)}}\cdot\frac{\varphi(w)dw}{w - ze^{2i\tau}}.$$

再由 $e^{2i\tau} = 2\cos^2\tau - 1 + 2i\sin\tau\cos\tau = 2\cos\tau e^{i\tau} - 1 = 2w - 1$, 并将积分中的变数 w 换成为 ζ, 则 (2) 中的两个积分可以合而为一

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\zeta(1-\zeta)}}\left\{\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta + z - 2\zeta z}\right\}\varphi(\zeta)d\zeta. \tag{3}$$

命 $f_2(z)$ 适合于

$$u_2(z)|_C = 0,\ u_2(z) + v_2(z)|_{y=0} = \chi(x).$$

$w = f_2(z)$ 把上半圆周变虚轴,因此 $f_2(z)$ 可以通过 C 而解析拓展到整个上半平面. 按照对称原理,实轴上依圆 C 对称的两点 x, $\frac{x}{2x-1}$, $f_2(z)$ 所取的数值是依虚轴 ($u_2 = 0$) 对称的数值,即

$$f_2(x) = -u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + iv_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right).$$

我们已知,在 (0, 1) 上

$$\mathscr{R}\{(1-i)f_2(x)\} = u_2(x, 0) + v_2(x, 0) = \chi(x),$$

在 $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ 上

$$\mathscr{I}\{(1-i)f_2(x)\} = v_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right)$$

$$= \chi\left(\frac{x}{2x-1}\right),$$

所以可以把上半平面的 Келдыш-Седов 公式用到这问题上来. 经过简单变换得出

$$(1-i)f_2(z) = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t + z - 2tz}\right)\chi(t)dt. \tag{4}$$

一般问题的解等于

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

附记. 考虑 $\varphi(\zeta) = 0$, $\chi(x) = 0$ 的情况. 容易看出任意平面上对实轴求对称一次,对圆求对称一次,即在 z 平面上绕 $z = 0$ (或 $z = 1$) 转 $180°$. $w = f(z)$ 依 $u+v = 0$ 求对称一次,对虚轴求对称一次,即 w 在 z 平面上转 $90°$. 因此当 z 绕 0 (或 1) 一周 w 正好变号,因此函数

$$p(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{z(1-z)}}$$

是一个在全平面上的单值函数. 由条件可知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \rho(1-i)$, ρ 是实数,由对圆的对称关系可知 $f(\infty) = -\rho(1+i)$, 因此当 $z \to \infty$ 时, $p(z) \to 0$.

如果假定 $f(z) = o(|z|^{-\frac{1}{2}})$ 及 $f(z) = o(|1-z|^{-\frac{1}{2}})$, 即 $p(z) = o(|z|^{-1})$, 这说明单值函数不能在 $z = 0$ 外有奇点,同样,在 $z = 1$ 也不能有奇点,因此 $p(z)$ 是零. 即在这样的条件下,问题的解答是唯一的.

如果我们假定了

$$\frac{\partial u}{\partial x} = o(|z|^{-\frac{3}{2}}), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = o(|z|^{-\frac{3}{2}}),$$

则得

$$f'(z) = o(|z|^{-\frac{3}{2}}).$$

若 $u(0, 0) = u(1, 0) = 0$, 则推出 $f(z) = o(|z|^{-\frac{1}{2}})$.

§ 14. 一个混合型偏微分方程

我们现在来研究 Лаврентьев 偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

这儿 $\theta(y) = \pm 1$, 视 $y \gtrless 0$ 而定.

所考虑的区域 $\mathscr{D}$ 是被以下的线段所包围的:以 $z = \frac{1}{2}$ 为中心, $\frac{1}{2}$ 为半径的上半个圆

$$C: \qquad \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad y > 0,$$

图 66

从 0 及 1 所发出的两线段

$$L: \qquad x + y = 0,$$

$$L_1: \qquad x - y = 1.$$

在 C 上给一个函数 $\varphi(\zeta)$, 在 L 上给一函数 $\psi(x)$, 并且假定它们都适合 Hölder 条件,且 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

问题: 求出 $u(x, y)$, 使适合以下的一些要求:

(i) 在 $\pm\mathscr{D}$ 上当 $y \neq 0$ 时, u 适合于方程 (1);

(ii) 在闭域 $\overline{\mathscr{D}}$ 上连续, $u|_C = \varphi(\zeta)$, $u|_L = \psi(x)$;

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 在 $\mathscr{D}$ 内部连续；

(iv) 在 $z=0$ 及 $z=1$ 附近，$\frac{\partial u}{\partial x}=o(x^{-\frac{3}{2}})$，$\frac{\partial u}{\partial y}=0(x^{-\frac{3}{2}})$，$\frac{\partial u}{\partial x}=o(|x-1|^{-3/2})$，$\frac{\partial u}{\partial y}=o(|x-1|^{-3/2})$。

Бицадзе 的解法是：

1）在下半平面上，方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

的解可以表成为

$$u=\Phi(x+y)+\Psi(x-y). \tag{2}$$

这儿 Φ, Ψ 是任意两个函数，由条件 (ii) 知道

$$u|_L=\Phi(0)+\Psi(2x)=\psi(x).$$

因此

$$u=\Phi(x+y)-\Phi(0)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{3}$$

由 (ii) 可知

$$u(x,0)=\Phi(x)-\Phi(0)+\psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{4}$$

在上半平面 $u(x,y)$ 是调和函数．命 $v(x,y)$ 表它的共轭函数，而且 $v(0,0)=0$。由 (3) 已知在下半平面上

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\Phi'(x+y)-\frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

由 (iii)，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 的连续性可知，在 x 轴上

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\Phi'(x)+\frac{1}{2}\psi'\left(\frac{x}{2}\right),$$

积分之，得

$$v(x,0)=-\Phi(x)+\Phi(0)+\psi\left(\frac{x}{2}\right), \tag{5}$$

与 (4) 相加得

$$u(x,0)+v(x,0)=2\psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{6}$$

因此问题一变而为上节所讨论过的问题，即求适合于

$$u|_C=\varphi(\zeta),$$

$$u+v|_{y=0}=2\chi(x)=2\psi\left(\frac{x}{2}\right)$$

的调和函数的问题了．因而唯一性与存在性都在上节 3) 中讨论过了．

现在我们来证明解的唯一性．不妨假设函数 u 在 L 和 C 上为零．由 (6) 即得

$$u(x,0)+v(x,0)=0. \tag{6'}$$

设K是以$(\xi, 0)$为中心，ε为半径的且整个在$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$内的圆.令$C_K$和$\bar{C}_K$分别表示$K$的上半圆周和下半圆周. 于是圆$K$内函数$F(z)$的值是由它的实部分在$C_k$上的值唯一定义的，也就是求在圆$K$内是全纯的而在闭圆$\bar{K}$上是连续的函数$F(z)$，它具有边界条件

$$\begin{aligned} \mathscr{R} F(z) &= u(x, y), \qquad z \in C_K; \\ \mathscr{I} F(z) &= -u(x, -y), \qquad z \in \bar{C}_K. \end{aligned} \tag{7}$$

由 Келдыш-Седов 公式立得

$$\begin{aligned} F(z) = &\frac{1}{\pi i} \int_{C_K} \sqrt{\frac{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}} \frac{u(t)}{t-z} dt \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{\bar{C}_K} \sqrt{\frac{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}} \frac{u(\bar{t})}{t-z} dt. \end{aligned} \tag{8}$$

令 $z=\xi$，并作变换 $t=\xi+\varepsilon e^{i\theta}$，由 (8) 式立得

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{u(\xi+\varepsilon e^{i\theta})}{\sqrt{1-e^{2i\theta}}} d\theta - \frac{i}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{u(\xi+\varepsilon e^{-i\theta})}{\sqrt{1-e^{2i\theta}}} d\theta.$$

对后一积分作变换 $\theta=2\pi-\varphi$，且注意

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2i\varphi}}} = \frac{e^{i\varphi}}{i\sqrt{1-e^{2i\varphi}}},$$

即得

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(\xi+\varepsilon e^{i\theta}) \sqrt{\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}\, u(\xi+\varepsilon e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

由此立得

$$u(\xi, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}\, u(\theta) d\theta. \tag{9}$$

由 (9) 式我们可以证明$u(x, y)$在实轴上的线段$(0, 1)$上不可能取正的极大值或负的极小值. 否则，若u在点$(\xi, 0)$处达到正的极大值M，我们可找到在一个以$(\xi, 0)$为中心充分小的ε为半径的圆周C_K上的一点$\xi+\varepsilon e^{i\theta}$，使$|u(\xi+\varepsilon e^{i\theta})|<M$，由 (9)，且注意

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}\, d\theta = 1,$$

即有

$$u(\xi, 0) = M = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}\, u(\xi+\varepsilon e^{i\theta}) d\theta < \frac{1}{\pi} M \int_0^{M} \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}\, d\theta = M.$$

同样可以证明u不可能在线段$(0, 1)$上达到负的极小值. 又由于$u(0, 0)=u(1, 0)=0$，因此$u(x, 0)$在线段$(0, 1)$上为零，从而u在域$\mathscr{D}$内恒等于零.

第十三章　Weierstrass 的椭圆函数论

§1.　模

定义 1. 命M是一个数集，如果其中任意二数的和差都在这集中，这集称为模.

例 1. 所有的自然数成一模，同样

$$nw,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

也成一模.

例 2. 所有的有理数也成一模.

例 3. 所有的实数也成一模.

例 4. 所有的复数也成一模.

例 5. 所有形如

$$a+bi,\quad a,b=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

的数也成一模.

定义 2. 如果模M中有n个数 $w_1,\cdots,w_n$，使模中任一数w可以唯一地表成为

$$P_1w_1+\cdots+P_nw_n,\quad (P\text{ 是整数})$$

的形式，则 $w_1,\cdots,w_n$ 成为M的底. n称为模M的秩数.

例 1 的底是w，其秩是一.

例 5 的底是 $1,i$，其秩是二.

如果模M有另一底 $w_1',\cdots,w_m'$，则由定义可知

$$w_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}w_j',\quad w_j'=\sum_{k=1}^{n}b_{jk}w_k.$$

所以

$$w_i=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}b_{jk}w_k.$$

由定义可知表法是唯一的，因此

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}b_{jk}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=k;\\ 0, & \text{若 } i\neq k.\end{cases}$$

因此 (a_{ij}), (b_{jk}) 是二可求逆的矩阵，因此 $m=n$.

定理 1. 如果模M还有一底 $w_1',\cdots,w_m'$，则 $m=n$，而且其间的关系

$$w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j',\quad j=1,\cdots,n$$

可以一个行列式等于 ±1 的方阵 (a_{ij}) 表之.

定理 2. 没有有限聚点的实模的秩数是 1，也就是存在一个w，使这模就是

$$mw,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

所成的模.

假定 w 是 M 中最小的正数，如果 $nw(n=0,\pm1,\cdots)$ 之外另有一数 w'，则 $w'=(n+\vartheta)w$，$0<\vartheta<1$，而 $0<w'-nw<w$，这与假定相违背.

推广些有

定理 3. 没有有限聚点而每两数之比是实数的模一定是一秩模.

定理 4. 没有有限聚点的复数模的秩数只能是一或二.

证. 1) 在平面上记下这模的诸点. 假定 w 是最近于原点之一.通过 $0, w$ 作直线 L，在这直线上仅有 $mw(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 M 的点而无其它(定理 3)，如果此处无其它的点,则这模是一维的.

2) 假定不然,以原点为中心作一圆. 除 L 的点以外,在圆内无 M 的其它点,但在周界上有 M 的点. 由于无聚点,圆周上的点不能无穷,我们有一点 w'，它与 w 的圆心角最小. 现在证明,除

$$nw+mw'$$

之外,M 无其它的点.

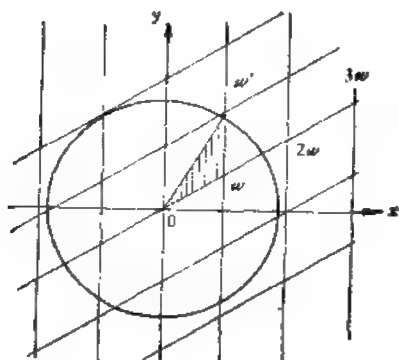


图 67

假定不然,而有一 r 可以表成为

$$r=(n+\vartheta)w+(m+\vartheta)'w',$$
$$0<\vartheta<1,\ 0<\vartheta'<1$$

的形式,因此

$$r_1=\vartheta w+\vartheta' w'$$

也属于 M. r_1 位于以 $0, w, w', w+w'$ 为顶点的平行四边形内，而且不与任何顶点重合. 由作图法它不能在有阴影的三角形内,因此,它在另一部分之中. 但此是

$$w+w'-r_1=(1-\vartheta)w+(1-\vartheta')w'$$

也属于 M，而它却在阴影的三角形中了. 这与作图原意违背. 因此得出本定理.

习题. n 维矢量所成的模的秩数 $\leqslant n$.

§2. 周 期 函 数

三角函数 $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\cdots$ 等的一个最重要的性质是周期性，即命 $f(z)$ 是其中的一个,则

$$f(z+2\pi)=f(z).$$

由此当然得出对任一整数 n 常有

$$f(z+2n\pi)=f(z).$$

这样的函数称为周期函数以 2π 为周期. 但为了区别起见，这称为单周期函数，而本章所要讨论的是双周期函数.

命 w_1, w_2 是任意二复数,其比非实数,适合于

$$f(z+2w_1)=f(z),\ f(z+2w_2)=f(z)$$

的函数称为双周期函数. 以 $2w_1$, $2w_2$ 为周期,双周期的亚纯函数称为椭圆函数.

如果亚纯函数的周期有一聚点，则它一定是常数. 因为如果有聚点 z_0，则在 z_0 附近有无穷点 z_k 都使 $f(z_k)=f(z_0)$，$k=1,2,\cdots$，由 Vitali 定理,可知其为常数.

与上节的结果合并言之,我们仅能讨论有一个周期、两个周期(其比是复数)的亚纯函数,而讨论比是实数的双周期函数及两个以上周期的函数是无意义的.

§3. 周期整函数的展开式

假定 $f(z)$ 是以 w 为周期的整函数，即适合于 $f(z+w)=f(z)$ 的整函数. 命 $z=wW/2\pi$ 及

$$f(z)=\varphi(W),$$

则

$$\varphi(W+2\pi)=f(z+w)=f(z)=\varphi(W).$$

即 $\varphi(W)$ 是 2π 为周期的函数. 要讨论 $\varphi(W)$ 在全平面上的性质，只要研究 $\varphi(W)$ 在长条 $0\leqslant x<2\pi$ 中的性质即足. 全平面可以分为无穷个长条

$$2\pi m\leqslant x<2\pi(m+1),\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

而每一长条中的性质都是一样的.

把 $\varphi(z)$ 展开为 Fourcer 级数得

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(y)e^{inx},$$

这儿

$$C_n(y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z)e^{-inx}dx.$$

由于 $\varphi(z)$ 适合于 Laplace 方程,所以

$$\begin{aligned}C_n''(y)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(z)e^{-inx}dx\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(z)e^{-inx}dx\\&=\frac{n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z)e^{-inx}dx=n^2C_n(y)\end{aligned}$$

(用两次部分积分及 $\varphi(z)$ 的周期性).

这微分方程的解答是 $a_ne^{-ny}+b_ne^{ny}$，因此得出

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{in(z)}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_ne^{in(\bar{z})}.$$

这是有周期的调和函数的一般形式,作为解析函数 $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}=0$，因此得出展式

$$\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{inz},$$

因此得出

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{\frac{2\pi in}{w}z}.$$

本节所涉及到的收敛性都是十分容易处理的,因此得

定理 1. 周期整函数 $f(z)$ 可以表为对所有 z 都收敛的 Fourier 级数.

对一般的 $f(z)$ 讲，过 0 与 w 作二平行线，这二平行线间的区间称为 $f(z)$ 的周期带。显然平面可以周期带经每次前移或后移 w 而得出的带子盖满，由 Liouville 定理显然推得

定理 2. 如果一个周期整函数在周期带中有则，则这函数是一常数.

定理 3. 如果在当 z 趋于周期带的两端时，$f(z)$ 是有限阶无穷大，则它一定是三角多项式.

更普遍地有以下的

定理 4. 命 $f(z)$ 是一个亚纯周期函数. 如果当 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 的无穷大阶是有限的，则它是两个三角多项式的比值.

§4. 基　　域

考虑由变形

$$z'=z+mw+m'w',\quad m,m'=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1}$$

所成的群. 如果有变形 (1) 把 z_0 变为 z，这两点称为相合.

如果 w/w' 非实数，这群有一特点，一点 z_0 与其相合点所成的集合是没有聚点的(除 $\pm\infty$ 外).

这个群的演出元素是

$$z=z+w,\quad z=z+w'.$$

我们不妨假定 $\vartheta(w/w')>0$. 对任一 m 作直线

$$z=mw+tw',\quad -\infty<t<\infty.$$

对任一 m' 作直线

$$z=m'w'+tw,\quad -\infty<t<\infty.$$

这些直线把平面分为无数个平行四边形，这些平行四边形是相合的，即给了任意两个四边形，我们有一个变形 (1)，把其一变为另一.



图 68

定义. 在平面上的一个域称为一个基域，如果它适合以下的条件：(i) 任何一点一定相合于这基域中的一点；(ii) 基域中任何一点都不相合.

例 1. 由 $o,w,w',w+w'$ 四点所成的平行四边形成一基域，但必须严格说明四边中只算两边 ow,ow'，四角点顶点只算一顶点 o.

例 2. 由图 68 的图形中一边附近挖去一块，补到对边上去也成一基域.

§5. 椭圆函数的一般性质

假定 $f(z)$ 是任一椭圆函数，即双周期的亚纯函数，具有周期 $2w$ 与 $2w'$，假定比值 w/w' 非实数，并且不妨假定 $\vartheta(w/w')>0$. 因此由四点 $0,2w,2w',2(w+w')$所形成的平行四边形非蜕化的，称为基域. 形如 $2(mw+m'w')$ (m,m' 是整数) 的点把平面分成为一些与基域全等的平行四边形. 每一平行四边形中 $f(z)$ 的性质，都同基域的性质是一致的.

定理 1. 如果双周期函数是整函数，则它一定是常数.

证明是十分简单的，在基域 $f(z)$ 有界，因此在全平面有界，故由 Liouville 定理立刻推出这一结论.

因此，在基域中或边界上 $f(z)$ 至少有一极点，在边界上的极点数的计算法是两个算一个，因为如果 z 是极点，则 $z\pm w$, $z\pm w'$ 也是极点. 如果 z 在边上，则 $z\pm w$, $z\pm w'$ 四点之一 z_0 也在边上. 如果绕 z 作半圆弧在区外，则所对应的绕 z_0 的半圆弧在区内. 在这样修改后的基域内，z 与 z_0 中只留下一点，同样角上如有极点，则四角全有，但只以一角入算. 基域中只能有有限个极点，把重数算进去，并且依以上的理解入算，则极点数称为椭圆函数的阶.

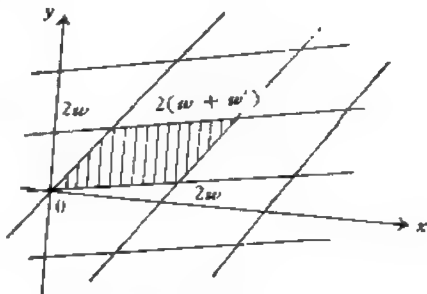


图 69

定理 2. 椭圆函数 $f(z)$ 在基域内所有的极点的留数之和定等于 0.

证. 只需证明沿基域的周界 C' 的积分等于 0 即足（但注意如果边(角)上有极点，需用以上所说的办法，避开之）.

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_0^{2w} + \int_{2w}^{2(w+w')} + \int_{2(w+w')}^{2w'} + \int_{2w'}^{0} f(z)\,dz \\ &= \int_0^{2w} f(z)dz + \int_0^{2w'} f(z+2w)dz + \int_{2w'}^{0} f(z+2w')dz \\ &\quad + \int_{2w'}^{0} f(z)dz = 0.\end{aligned}$$

由此立刻推得

定理 3. 设有一阶的椭圆函数存在.

定理 4. 椭圆函数在基域内取一复数值 a 的次数等于阶数，因此零点数等于阶数.

证. 在基域中 $f(z)=a$ 的解数与极点数之差等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz.$$

被积函数是椭圆函数，因此，此数是 θ，即得所证.

定理 5. 在一基域内，$f(z)=a$ 的解是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，而 $f(z)=\infty$ 的解是 $p_1, \cdots, p_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i$$

相合.

证. 已知

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} p_i &= \frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^{2w} + \int_{2w}^{2(w+w')} + \int_{2(w+w')}^{2w'} + \int_{2w'}^{0}\right) z\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^{2w} z\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz + \int_0^{2w'} (z+2w)\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz\right.\end{aligned}$$

$$+\int_{2w}^{0}(z+2w')\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz+\int_{2w'}^{0}z\frac{f'(z)}{f'(z)-a}dz\Big)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\Big(-2w'\int_0^{2w}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz+2w\int_0^{2w'}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz\Big).$$

积分

$$\int_0^{2w}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

等于 $\log(f(z)-a)$ 从 0 到 $2w$ 的变化，由于 $f(2w)-a=f(0)-a$，所以这变化等于 $2m\pi i$，而 m 是整数，故得出所证.

§6. 代数相关性

以 $2w$, $2w'$ 为周期的椭圆函数的集合 K 经加、减、乘、除（分母 $\neq 0$）而自封，这 K 称为一个代数函数域.

定理 1. 代数函数域 K 中任二函数 $f(z)$, $g(z)$ 都是代数相关的，也就是存在一个常系数的多项式 $P(Z、W)$ 使

$$P(f(z),\ g(z))=0.$$

证. 命 $a_1,\cdots,a_m$ 是基域内 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的极点的集合. $f(z)$ 在 $a_1,\cdots,a_m$ 的阶数各为 $p_1,\cdots,p_m$; $g(z)$ 的阶数各为 $q_1,\cdots,q_m$, 命

$$\sum_{i=1}^{n}\max(p_i,\ q_i)=P.$$

假定 $Q(Z,W)$ 是 Z 与 W 的某一 n 次多项式(系数待定). 将 $Z=f(z)$, $W=g(z)$ 代入这多项式，则它也是 K 中的函数. 如果能证明：我们能选取 Q 的系数使 $Q(f,g)=F(z)$ 是一常数 C，则定理就证明了. 因为取 $P=Q-C$ 即得，也就是如果选得 Q 使 $Q(f,g)=F(z)$ 在 $z=a_i$ 处的主要部分都等于 0，那也就够了.

对 $F(z)$ 来说，极点 a_k 的阶数 $\leqslant n\max(p_k,q_k)$. 因此，使 $F(z)$ 在 $z=a_k$ 的主要部分为零的条件数 $\leqslant n\max(p_k,q_k)$. 使 $F(z)$ 在所有的 $z=a_k$ 的主要部分为零的条件数

$$\leqslant n\sum_{k=1}^{m}\max(p_k,\ q_k)=nP.$$

这些条件对多项式 Q 的系数来说都是线性齐次的，而多项式 Q 总共有 $\frac{1}{2}(n+3)n$ 个待定系数（我们不计常数项）. 因此，选取 $n+3>2P$，则待定系数的个数多于方程的个数. 这方程组至少有一组异于 0 的解，因而所定出的 Q 就适合我们的要求.

由于 $f(z)$ 的微商与 $f'(z)$ 有相同的周期，因而推出

定理 2. 任一椭圆函数，都满足于如下形式的代数微分方程

$$P(f(z),\ f'(z))=0,$$

这儿 $P(Z,W)$ 是多项式.

附记. 命 $f(z)$ 是一奇椭圆函数，则 $f(w)=-f(-w)=-f(-w+2w)=-f(w)$，所以 $f(w)=0$. 即一个奇椭圆函数在半周处有一个 0 点或极点，这 0 点或极点的阶一定

是奇数，如果不然，$f(z)$ 有 $-2n$ 阶的零点，则 $f^{(2n)}(z)$ 是一个 $z=w$，不是 0 点的奇函数这是不可能的．同样，如果 $f(z)$ 有 $-2n$ 阶的极点，则考虑 $\left(\frac{1}{f(z)}\right)^{(2n)}$ 可得同样的结论。

§7. 椭圆函数的两种理论

前面已经讲过没有一阶的椭圆函数存在，因而我们从两阶的椭圆函数入手，希望从这些基本函数构造出所有的椭圆函数来．两阶的椭圆函数显然有两点：(i) 有一个重极点的椭圆函数；(ii) 有两个单极点的椭圆函数；这就是 Weierstrass 理论与 Jocobi 理论各个不同的出发点。

更切实些说：Weierstrass 从构造出在基域内仅有一二重极点的椭圆函数出发，然后发展成为一般理论．而 Jacobi 的理论则从两个单极点的情况出发．前者在理论上显得更方便些，但在实际问题中 Jacobi 函数更常遇到。

§8. Weierstrass ζ 函数

我们把原点放在基本平行四边形的中心，我们研究那种以 $z=0$ 为二重极点的椭圆函数．由于周期性，所以 $z=2mw+2m'w'$ 也都是极点，因此建议我们考虑函数

$$\sum_{m,m'=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2}.$$

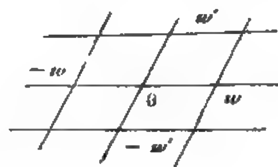


图 70

如果这级数收敛，则它就是适合我们所需要的函数了，因而我们不得不迂迴一下。

引理． 如果 $\vartheta(w/w')>0$，则级数

$$\sum_{m,m'=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(mw+m'w')^3}$$

是绝对收敛的，这儿 Σ' 表示由 Σ 中除去 $m=m'=0$ 的一项。

证．把 $mw+m'w$ 画在平面上，定义 π_n 是以 $n(w+w')$, $n(w-w)$, $n(-w+w)$, $n(-w-w')$ 为顶点的平行四边形的边框，在 π_n 上共有 $8n$ 点．命 l 等于 π_1 上的点与 0 的最短距离，则 π_n 上的点与 0 的距离是 nl，因此

$$\sum_{\pi_n}\frac{1}{(mw+m'w')^3}\leqslant\frac{8n}{(nl)^3},$$

由于 $\frac{8}{l^3}\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，所以引理得证。

由引理推得，级数

$$f(z)=\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^3}\tag{1}$$

是绝对收敛的（但 z 不等于 $2mw+2m'w$ 之一）．在任何一个圆 R 内除有在此圆内有极点的诸项外，这级数是一致收敛的．因而可以证明 (1) 代表一亚纯函数，而且以 $2w$, $2w'$ 为周期．这显然是一奇函数。

求 $f(z)$ 的积分，我们可以构造出偶的二阶椭圆函数。

取一条不碰上极点的由 z_0 到 z 的曲线，求积分得

$$\varphi(z) = C + \int_{z_0}^{z} f(z)dz = C - \frac{1}{2} \Sigma \left[\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2} - \frac{1}{(z_0-2mw-2m'w')^2}\right].$$

把 $m=m'=0$ 的项提出

$$\varphi(z) + \frac{1}{2z^2} = C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\Sigma'\left[\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2} - \frac{1}{(z_0-2mw-2m'w')^2}\right].$$

右端的函数在 $z=0$ 处有则，所以可选 C 使其在 $z=0$ 处的值 $=o$，即

$$o = C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\Sigma'\left[\frac{1}{(2mw+2m'w')^2} - \frac{1}{(z_0-2mw-2m'w')^2}\right].$$

因此

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z^2} - \Sigma'\left[\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2} - \frac{1}{(2mw+2m'w')^2}\right]\right\}.$$

花括弧内是 Weierstrass 函数，记之为 $\gamma(z)$，即

$$\gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \Sigma'\left[\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^2} - \frac{1}{(2mw+2m'w')^2}\right]. \tag{2}$$

这级数绝对收敛，因当 T 充分大时

$$\left|\frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{T^2}\right| = \left|\frac{(2T-z)z}{T^2(z-T)^2}\right| = o\left(\frac{1}{|T|^3}\right).$$

因此由引理可知级数 (2) 收敛.

并且容易证明 $\gamma(z)$ 是偶函数，即

$$\gamma(-z) = \gamma(z).$$

而

$$\gamma'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2\Sigma'\frac{2}{(z-2mw-2m'w')^3} = -2\Sigma\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^3} = -2f(z).$$

由此可见 $\gamma'(z)$ 是一椭圆函数，其周期是 $2w$，$2w'$，即

$$\gamma'(z+2w) - \gamma'(z) = 0,$$
$$\gamma'(z+2w') - \gamma'(z) = 0.$$

积分后得出

$$\gamma(z+2w)-\gamma(z)=C,$$
$$\gamma(z+2w')-\gamma(z)=C'.$$
以 $z=-w$ 及 $z=-w'$ 分别代入上式，并由于 $\gamma(z)$ 是偶函数，因此 $C=C'=0$。由此 $\gamma(z)$ 是椭圆函数，并且在平行四边形中有一二阶极点，在 $2mw+2m'w'$ 处的主要部分是 $\dfrac{1}{(z-2mw-2m'w')^2}$.

易知 $\gamma'(z)$ 是三阶的奇椭圆函数，由上节的附记可知在半周期处 $w, w', w+w'$ 为零点，因此这些点都是 $\gamma(z)$ 的二重点．即
$$\gamma(w)=e_1,\ \gamma(w+w')=e_2,$$
$$\gamma(w')=e_3.$$
即 $\gamma(z)=e_1, e_2, e_3$ 时有重根．如果 $e\neq e_1, e_2, e_3$，则 $\gamma(z)=e$ 决无重根，其理由是如有，则 $\gamma'(z)=0$ 又多了一根，这是不可能的．

$\gamma(z)$ 的 n 次微商是
$$\gamma^{(n)}(z)=(-1)^n\frac{(n+1)!}{z^{n+2}}+(-1)^n(n+1)!\Sigma'\frac{1}{(z-2mw-2m'w')^{n+2}}.$$

§9. $\gamma(z)$ 与 $\gamma'(z)$ 的代数关系

先求 $\gamma(z)$ 在 $z=0$ 处的 Laurent 展开式，由于
$$\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{T^2}=\frac{1}{T^2}\left[\left(1-\frac{z}{T}\right)^{-2}-1\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{T^{n+2}}z^n,$$
而 $\gamma(z)$ 是偶函数，由 §8(2) 可知
$$\gamma(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{g_2}{20}z^2+\frac{g_3}{28}z^4+\cdots. \tag{1}$$
这儿用通常的符号
$$g_2=60\Sigma'\frac{1}{(2mw+2m'w')^4},\quad g_3=140\Sigma'\frac{1}{(2mw+2m'w')^6}. \tag{2}$$
微分 (1) 式得
$$\gamma'(z)=-\frac{2}{z^3}+\frac{g_2}{10}z+\frac{g_3}{7}z^3+\cdots. \tag{3}$$
由 (1), (3) 可知
$$\gamma'^2(z)=\frac{4}{z^6}\left(1-\frac{g_2}{10}z^4-\frac{g_3}{7}z^6+\cdots\right),$$
$$\gamma^3(z)=\frac{1}{z^6}\left\{1+\frac{3g_2}{20}z^4+\frac{3g_3}{28}z^6+\cdots\right\},$$
因此
$$(\gamma'(z))^2-4(\gamma(z))^3+g_2\gamma(z)=-g_3+C_2z^2+C_3z^4+\cdots. \tag{4}$$
右边是一处处有则的双周期函数，所以是常数，即 $\gamma(z)$ 与 $\gamma'(z)$ 之间有代数关系
$$(\gamma'(z))^2=4\gamma^3(z)-g_2\gamma(z)-g_3. \tag{5}$$
$\gamma'(z)$ 的三个零点已经知道是 $z=w, w', w+w'$，因此得出

$$(\gamma'(z))^2 = 4(\gamma(z) - e_1)(\gamma(z) - e_2)(\gamma(z) - e_3). \tag{6}$$

这儿 $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}$, $e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}$, 判别式 $\frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2)$ 必须非 0.

命 $\gamma(z) = W$, 则得微分方程

$$\frac{dz}{dW} = \frac{1}{\sqrt{4W^3 - g_2W - g_3}}, \tag{7}$$

因此推出

$$z - z_0 = \int_{W_0}^{W} \frac{dW}{\sqrt{4W^3 - g_2W - g_3}}. \quad (W_0 = \gamma(z_0))$$

命 $z_0 \to 0$, 则 $W_0 \to \infty$, 因此得出

$$z = \int_{\infty}^{W} \frac{dW}{\sqrt{4W^3 - g_2W - g_3}}$$

的反函数是 $\gamma(z)$.

微分 (5) 式得出

$$2\gamma''(z) = 12\gamma^2(z) - g_2. \tag{8}$$

§10. 函 数 $\zeta(z)$

Weierstrass 再引进函数

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\gamma(z) - \frac{1}{z^2}\right) dz, \quad (\zeta'(z) = -\gamma(z)) \tag{1}$$

由 $\gamma(z)$ 的表达式可知

$$\int_0^z \left(\gamma(z) - \frac{1}{z^2}\right) dz = -\Sigma' \left[\frac{1}{z - 2mw - 2m'w'} + \frac{1}{2mw + 2m'w'} + \frac{z}{(2mw + 2m'w')^2}\right]. \tag{2}$$

这级数代表一个亚纯函数,以 $2mw + 2m'w'$ 为其单极的函数. 由于

$$(\zeta(z) + \zeta(-z))' = \zeta'(z) - \zeta'(-z) = \gamma(-z) - \gamma(z) = 0,$$

可知 $\zeta(z) + \zeta(-z) = C$, 当 $z \to 0$ 时, 由 (1) 可得 $C = 0$, 因此 $\zeta(z) = -\zeta(-z)$ 是一奇函数.

$\zeta(z)$ 仅有一单极点,所以不可能是椭圆函数. 现在研究当 $\zeta(z + 2w)$, $\zeta(z + 2w')$ 改变时的情况.

$$(\zeta(z + 2w) - \zeta(z))' = -\gamma(z + 2w) + \gamma(z) = 0,$$

因此

$$\zeta(z + 2w) - \zeta(z) = 2\eta. \tag{3}$$

同样

$$\zeta(z + 2w') - \zeta(z) = 2\eta'. \tag{4}$$

数值 w, w', η, η' 间有简单的关系式存在. 我们为着顶点是 $\pm w \pm w'$ 的平行四边形求 $\zeta(z)$ 的积分. 在这平行四边形中, $\zeta(z)$ 有一留数为 1 的极点 $z = 0$, 故这积分等于

$2\pi i$. 即

$$2\pi i=\left(\int_{\omega-\omega'}^{\omega+\omega'}+\int_{\omega+\omega'}^{-\omega+\omega'}+\int_{-\omega+\omega'}^{-\omega-\omega'}+\int_{-\omega-\omega'}^{\omega-\omega'}\right)\zeta(z)dz$$
$$=\int_{-\omega-\omega'}^{-\omega+\omega'}\zeta(z+2\omega)dz+\int_{\omega-\omega'}^{-\omega-\omega'}\zeta(z+2\omega')dz$$
$$+\int_{-\omega+\omega'}^{-\omega-\omega'}\zeta(z)dz+\int_{-\omega-\omega'}^{\omega-\omega'}\zeta(z)dz$$
$$=\int_{-\omega-\omega'}^{-\omega+\omega'}(\zeta(z+2\omega)-\zeta(z))dz+\int_{\omega-\omega'}^{-\omega-\omega'}(\zeta(z+2\omega')-\zeta(z))dz$$
$$=4\eta\omega'-4\eta'\omega.$$

即得 Legendre 关系式

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{1}{2}\pi i. \tag{5}$$

§11. $\sigma(z)$ 函数

Weierstrass 的 $\sigma(z)$ 函数由下法引入

$$\sigma(z)=z\exp\left(\int_0^z\left(\zeta(z)-\frac{1}{z}\right)dz\right), \tag{1}$$

即

$$(\log\sigma(z))'=\zeta(z). \tag{2}$$

将 $\zeta(z)$ 的展式 §10(2) 表之

$$\zeta(z)-\frac{1}{z}=\Sigma'\left(\frac{1}{z-T}+\frac{1}{T}+\frac{z}{T^2}\right),$$

以 T 表 $2m\omega+2m'\omega'$ 逐项求积,而且取指数后,得出 $\sigma(z)$ 的无穷乘积表示式

$$\sigma(z)=z\exp\left(\Sigma'\left(\log\left(1-\frac{z}{T}\right)+\frac{z}{T}+\frac{z^2}{2T^2}\right)\right)$$
$$=z\pi'\left(1-\frac{z}{T}\right)e^{\frac{z}{T}+\frac{z^2}{2T^2}}, \tag{3}$$

这显示出 $\sigma(z)$ 是有零点 $z=T$ 的整函数.

由

$$\sigma(-z)=-z\exp\left(\int_0^{-z}\left(\zeta(u)-\frac{1}{u}\right)du\right)$$
$$=-z\exp\left(-\int_0^z\left(\zeta(-v)+\frac{1}{v}\right)dv\right)$$
$$=-z\exp\left(\int_0^z\left(\zeta(v)-\frac{1}{v}\right)dv\right)=-\sigma(z),$$

可知 $\sigma(z)$ 是奇函数.

从 (2) 可知

$$\frac{\sigma'(z+2\omega)}{\sigma(z+2\omega)}\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=2\eta,$$

求积分且取指数后得出

$$\sigma(z+2w)=\sigma(z)e^{2\eta z+\gamma},$$

以 $z=-w$ 代入此式，则得 $-1=e^{-2\eta w+\gamma}$，即得

$$\sigma(z+2w)=-\sigma(z)e^{2\eta(z+w)}.$$

同样得出

$$\sigma(z+2w')=-\sigma(z)e^{2\eta'(z+w')}.$$

除 $\sigma(z)$ 外，我们还有三个 σ 函数

$$\sigma_1(z)=-\frac{e^{2\eta z}}{\sigma(w)}\sigma(z-w),$$

$$\sigma_2(z)=-\frac{e^{2\eta' z}}{\sigma(w')}\sigma(z-w'),$$

$$\sigma_3(z)=-\frac{e^{2\eta'' z}}{\sigma(w'')}\sigma(z-w''),$$

这儿 $w''=w+w'$，而 η'' 是 $\zeta(z+2w'')-\zeta(z)=2\eta''$. 取负号为的是使 $\sigma_k(0)=1$，编号也是通用的习惯.

§ 12. 椭圆函数的一般表达式

一般的椭圆函数可以有下列三种的表达方式：(i) 由 $\sigma(z)$ 表出（因子分解法），(ii) 由 $\zeta(z)$ 表出（分项分数法），(iii) 由 $\gamma(z)$ 及 $\gamma'(z)$ 表出.

(i) 假定 $f(z)$ 在基域内有零点 $a_1,\cdots,a_n$ 及极点 $b_1\cdots,b_n$（重根重算，边界上的算法见前），我们早已（在 § 5）证过

$$\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}b_i=2\Omega,$$

2Ω 是一周期.

作函数

$$\varphi(z)=\frac{\sigma(z-a_1)\cdots\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\cdots\sigma(z-b_{n-1})\sigma(z-b_n-2\Omega)},$$

此函数与 $f(z)$ 有同样的零点与极点，并且

$$\varphi(z+2w)=e^{2\eta(b_1+\cdots+b_n-a_1\cdots a_n+2\Omega)}\varphi(z)=\varphi(z),$$

故 $f(z)/\varphi(z)$ 是一无极点的椭圆函数，因此

$$f(z)=C\varphi(z).$$

(ii) 假定 $f(z)$ 在极点 $z=b_k(k=1,2,\cdots m)$ 有主要部分

$$g_k(z)=\frac{C_{k1}}{z-b_k}+\frac{C_{k2}}{(z-b_k)^2}+\cdots+\frac{C_{kn_k}}{(z-b_k)^{n_k}},$$

则差额

$$f(z)-\sum_{k=1}^{m}\Big\{C_{k1}\zeta(z-b_k)-C_{k2}\zeta'(z-b_k)+\cdots$$

$$+(-1)^{n_k-1}\frac{C_{kn_k}}{(n_k-1)!}\zeta^{(n_k-1)}(z-b_k)\Big\}$$

是一个全平面上解析的函数．由于这是椭圆函数，当 z 变为 $z+2\omega$ 时，这函数增加

$$-2\eta\sum_{k=1}^{m}C_{k1},$$

因此，一定要有 $\sum\limits_{k=1}^{m}C_{k1}=0$．上式表椭圆函数，该差额应当是常数，因此得 Hermite 表达式

$$f(z)=C+\sum_{k=1}^{m}\Big\{C_{k1}\zeta(z-b_k)-C_{k2}\zeta'(z-b_k)+\cdots$$

$$+(-1)^{n_k-1}\frac{C_{kn_k}}{(n_k-1)}\zeta^{(n_k-1)}(z-b_k)\Big\}.$$

(iii) 先证恒等式

$$\zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v)=\frac{1}{2}\,\frac{\gamma'(u)-\gamma'(v)}{\gamma(u)\gamma(v)}. \tag{1}$$

把

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}$$

作为 u 的函数，它与 $\gamma(u)-\gamma(v)$ 有相同的零点与极点，因此

$$\gamma(u)-\gamma(v)=C\,\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}.$$

乘以 $\sigma^2(u)$ 并命 $u\to0$，则得出 $1=-C\sigma^2(v)$，因此得出

$$\gamma(u)-\gamma(v)=-\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}. \tag{2}$$

对 u, v 各求对数微商，得

$$\frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-\gamma(v)}=\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta(u),$$

$$\frac{-\gamma'(v)}{\gamma(u)-\gamma(v)}=\zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta(v),$$

由此立刻推出 (1) 式．

在 (1) 中取 $u=z-a$, $v=a-b$，则得

$$\zeta(z-b)-\zeta(z-a)=\zeta(a-b)+\frac{1}{2}\,\frac{\gamma'(z-a)-\gamma'(a-b)}{\gamma(z-a)\gamma(a-b)}.$$

因此，如果 $\sum\limits_{k=1}^{m}C_{k1}=0$，则

$$\sum_{k=1}^{n}C_{k1}\zeta(z-b_k)$$

可以表成为 γ 与 γ' 的函数，ζ', ζ'', $\cdots$，当然可以表成为 γ, γ' 的函数．因此任何一个椭圆函数一定可以表为 γ, γ' 的函数．

(iv) 先假定 $f(z)$ 是偶函数．

我们已经知道如果 $a\neq w,\ w',\ w+w''$，则

$$\gamma(z)-\gamma(a)=0$$

有两个根 $z=\pm a$，而都不是重根．而

$$\gamma(z)-\gamma(w)=0$$

则有重根 $z=w$．如果 $f(z)$ 是偶函数，则 $z=w$ 一定是偶重的零点(或极点)，不然，$f'(z)$ 是奇函数就有偶重根了，这是不可能的（§6附记）．

把 $f(z)$ 在 $\pm w\pm w'$ 为顶点的平行四边形内的零点排好：

$$\pm a_1,\ \pm a_2,\ \cdots,\ \pm a_k$$

依重数排列，但如果是 $w,\ w',\ w+w'$，则依重数之半排列．作函数

$$(\gamma(z)-\gamma(a_1))(\gamma(z)-\gamma(a_2))\cdots(\gamma(z)-\gamma(a_n)),$$

它是与 $f(z)$ 有相同的零点的函数，同样作出

$$\frac{1}{(\gamma(z)-\gamma(b_1))\cdots(\gamma(z)-\gamma(b_n))}$$

是与 $f(z)$ 有相同的极点的函数表达式，而

$$\varphi(z)=\frac{(\gamma(z)-\gamma(a_1))(\gamma(z)-\gamma(a_2))\cdots(\gamma(z)-\gamma(a_n))}{(\gamma(z)-\gamma(b_1))(\gamma(z)-\gamma(b_2))\cdots(\gamma(z)-\gamma(b_n))}$$

与 $f(z)$ 有相同的零点与极点，而并未添出新的零点与极点．因此

$$f(z)=C\varphi(z).$$

命 $f(z)$ 是任意函数，则可分为奇偶部分

$$F(z)=\frac{F(z)+F(-z)}{2}+\frac{F(z)-F(-z)}{2},$$

因此显然可以表成为

$$F(z)=R(\gamma(z))+\gamma'(z)R_1(\gamma(z)),$$

这些 $R(Z)$，$R_1(Z)$ 是 Z 的有理函数．

§13. 加 法 公 式

1）考虑函数

$$\gamma'(z)-A\gamma(z)-B.$$

它是一个在 $z=0$ 有三重极点的函数，因此它有三个根．这三个根之和是一个周期（§5定理5），即如果 u,v 是它的根，则 $-u-v$ 也是它的根，即得

$$\begin{aligned}&\gamma'(u)-A\gamma(u)-B=0,\\&\gamma'(v)-A\gamma(v)-B=0,\\&\gamma'(-u-v)-A\gamma(u+v)-B=0.\end{aligned}\tag{1}$$

消去 A,B 得

$$\begin{vmatrix}\gamma(u), & \gamma'(u), & 1\\ \gamma(v), & \gamma'(v), & 1\\ \gamma(u+v), & -\gamma'(u+v), & 1\end{vmatrix}=0\tag{2}$$

2）$\gamma'(z)^2-\{A\gamma(z)+B\}^2$ 也当 $z=u,\ v,\ -u-v$ 时为零．这函数等于

$$4\gamma^3(z)-A^2\gamma^2(z)-(2AB+g_2)\gamma(z)-(B^2+g_3).$$

这里 $\gamma(z)$ 的三次方程对一般的 $u,\ v,\ \gamma(u),\ \gamma(v),\ \gamma(u+v)$ 是不等的，它们是三次

方程

$$4Z^3 - A^2Z^2 - (2AB + g_2)Z - (B^2 + g_3) = 0$$

的三个根，因此

$$\gamma(u) + \gamma(v) + \gamma(u+v) = \frac{1}{4}A^2.$$

而由 (1)

$$A = \frac{\gamma'(u) - \gamma'(v)}{\gamma(u) - \gamma(v)},$$

因此得出

$$\gamma(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma'(u) - \gamma'(v)}{\gamma(u) - \gamma(v)}\right)^2 - \gamma(u) - \gamma(v). \tag{3}$$

命 $u \to v$，则得

$$\gamma(2u) = \frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\gamma'(u) - \gamma'(u-h)}{\gamma(u) - \gamma(u-h)}\right)^2 - 2\gamma(u)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\gamma''(u)}{\gamma'(u)} - 2\gamma(u). \tag{4}$$

§14. 椭圆函数的积分

1) 由 Hermite 公式我们可以立刻推出以下的积分公式

$$\int f(z)dz = Cz + \sum_{k=1}^{m}\Big\{C_{k1}\log[\sigma(z-b_k)] - C_{k2}\zeta(z-b_k)$$

$$+ \cdots (-1)^{n_k-1}\frac{C_{kn_k}}{(n_k-1)!}\zeta^{(n_k-2)}(z-b_k)\Big\}.$$

因此可见一个椭圆函数的积分可以表为 σ, ζ, γ 的函数，但 σ 在 log 之下出现。

为了使椭圆函数的积分仍然是椭圆函数，必须使这积分无对数歧点，即留数 C_{k1} 都是 0，还要有

$$2C\omega - 2\eta\sum_k C_{k2} = 0, \quad 2C\omega' - 2\eta'\sum_k C_{k2} = 0,$$

由此解得 $C=0$，$\Sigma C_{k2} = 0$。

反之，如果这些条件适合，则 $f(z)$ 的积分是椭圆函数。

2) 在初等微积分上我们会求

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})dx$$

的积分。这儿 $R(u, v)$ 是 u, v 的有理函数，但是略进一步，积分

$$\int R(x, \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3})dx$$

就不是初等函数所能表出的了。但是如果我们命 $x = \gamma(z)$，则这一积分就变为

$$\gamma(z), \ \gamma'(z)$$

的有理函数了。

我们知道 $\gamma(z)$，$\gamma'(z)$ 的有理函数可以表成为

$$R(\gamma(z)) + R_1(\gamma(z))\gamma'(z).$$

这儿 $R(Z)R_1(Z)$ 是 Z 的有理函数. $R_1(\gamma(z))\gamma'(z)$ 的积分是易于求出的，因此现在留待解决的是

$$\int R(\gamma(z))dz.$$

先研究

$$I_n = \int (\gamma(z))^n dz,$$

由关系式

$$\frac{d}{dz}(\gamma(z)^{n-1}\gamma'(z)) = (n-1)\gamma(z)^{n-2}\gamma'^2(z) + \gamma(z)^{n-1}\gamma''(z),$$

此处 $\gamma'^2(z)$ 与 $\gamma''(z)$ 各以 $4\gamma^3(z) - g_2\gamma(z) - g_3$, $6\gamma^2(z) - \frac{1}{2}g_2$ 代之，则得

$$\frac{d}{dz}(\gamma(z)^{n-1}\gamma'(z)) = (4n+2)\gamma(z)^{n+1}$$
$$-\left(n-\frac{1}{2}\right)g_2(\gamma(w))^{n-1} - (n-1)g_3(\gamma(u))^{n-2}.$$

积分之得

$$\gamma(z)^{n-1}\gamma'(z) = (4n+2)I_{n+1} - \left(n-\frac{1}{2}\right)g_2 I_{n-1} - (n-1)g_3 I_{n-2}.$$

如果知道 I_0, I_1, 则由此递归公式 $n = 1, 2, \cdots$ 可以算出所有的 I_n 来. 但已知

$$I_0 = \int dt = z, \quad I_1 = \int \gamma(z)dz = -\zeta(z),$$

所以 I_n 都能以 $\gamma(z)$, $\gamma'(z)$, $\zeta(z)$ 表出.

如果 $R(z)$ 是真分数 $\frac{Q(z)}{P(z)}$, 用分项分数法. 但我们这儿仅说明怎样求

$$\int \frac{du}{\gamma(u) - \gamma(v)}.$$

这儿 v 不等于 w, w', w'', 或 $\gamma(v) \neq e_1, e_2, e_3$.

在 §12 中已证得

$$\frac{-\gamma'(v)}{\gamma(u) - \gamma(v)} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v),$$

因此

$$\int \frac{du}{\gamma(u) - \gamma(v)} = \frac{-1}{\gamma'(v)}(\log\sigma(u+v) - \log\sigma(u-v) - 2u\zeta(v)) + C.$$

§15. 代数函数域

上节的 (iii) 解决了一个重要问题:

定理 1. 以 $2w$, $2w'$ 为周期的函数所成的域 K 可以找到两个函数 $\gamma(z)$, $\gamma'(z)$, 适合于

$$\gamma'^2(z) = 4\gamma^3(z) - g_2\gamma(z) - g_3,$$

使K的任一函数都可以表成为 $\gamma(z)$, $\gamma'(z)$ 的有理函数.

如果任给两个适合于 $g_2^3-27g_3^2\neq 0$ 的数 g_2, g_3, 我们一定有椭圆函数 $\gamma(z)$ 存在, 则我们就得出以下的结论:

所有形如 $R(z, W)$, $(W^2=4z^3-g_2z-g_3)$ 的函数对四则运算而自封. 这儿 $R(z, W)$ 是 z, W 的有理函数,如果用参变数表示法 $z=\gamma(u)$, $W=\gamma'(u)$, 则 $R(z, W)$ 变成为 u 的椭圆函数的整体.

退回一步看 $R(z, \sqrt{az^2+bz+c})$, 甚至于较一般些看 $R(z, W)$, 此处 Z, W 适合于关系

$$az^2+2bzW+cW^2+2dz+2eW+f=0.$$

以往(第一卷第9章第7节)我们知道存在参变数 t 使

$$z=R_1(t),\quad W=R_2(t).$$

这儿 R_1, R_2 是 t 的有理函数, 代入后使 $R(z, W)$ 成为 t 的有理函数所成的集合. 将来我们将证明 $R(z, \sqrt{4z^3-g_2z-g_3})$ 不能有参数 t 表示法使它变为 t 的有理函数的集合.

看了这个例子, 也许认为我们应当考虑 $R(z, W)$ 之中 z, W 适合于三次多项式的域. 这种企图看来不大, 但是实际上, 还是太大了. 最简单的特例 $W^2=4z^3-g_2z-g_3$ 就是椭圆函数的理论. 而一般的三次关系,却超过了椭圆函数的理论.

但是 $R(z, \sqrt{a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4})$ 却并不超过椭圆函数的理论,其理由是命 z_0 是 $a_0z^4+a_1z^3+a_2z+a_3=0$ 的一根. 用变换 $z-z_0=u$, 故不妨假定 $a_4=0$, 再利用变形 $z=\frac{1}{v}$, 则

$$\sqrt{a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z}=\frac{1}{v^2}\sqrt{a_3v^3+a_2v^2+a_1v+a_0}.$$

化为以上的情况.

一般地讲,研究域 $R(x, y)$, 其中 x, y 有关系

$$f(x, y)=0$$

是代数函数论及代数几何的问题,由此启发出来的函数论称为自型函数,它当然概括了椭圆函数论为其一例.

§16. 反　问　题

命 w, w' 是一对适合于 $\vartheta(w'/w)>0$ 的复数. 我们已经知道有一个椭圆函数 $\gamma(Z; w, w')$存在,它有两个不变量 g_2, g_3. 这 g_2, g_3 的定义是:

$$\begin{aligned} g_2(w, w')&=60\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(mw+m'w')^4},\\ g_3(w, w')&=140\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(mw+m'w')^6}. \end{aligned}\tag{1}$$

这儿 Σ' 代表在和号中省去 $m=m'=0$ 的一项. 我们已经证明过 $g_2^3-27g_3^2\neq 0$.

现在提出反问题: 给了任意两个 a, b, 它们适合于 $a^3-27b^2\neq 0$, 我们能否找出

w, w'，使 $g_2(w, w') = a$，$g_3(w, w') = b$？

为了解决这个重要问题，我们引进了一个函数 $J(\tau)$，它的定义如下：

命 $\Delta(w, w') = g_2^3 - 27g_3^2$，命 $\tau = w'/w$，则 $g_2(w, w') = w^{-4}g_2(1, \tau)$．$g_3(w, w') = w^{-6}g_3(1, \tau)$．$\Delta(w, w') = w^{-12}\Delta(1, \tau)$．因此命

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(1, \tau)}{\Delta(1, \tau)} = \frac{g_2^3(w, w')}{\Delta(w, w')},$$

则

$$J(\tau) - 1 = \frac{27g_3^2(1, \tau)}{\Delta(1, \tau)}. \tag{2}$$

这函数 $J(\tau)$ 有以下的重要性质：

定理 1．在上半平面 $\vartheta(\tau) > 0$ 上，函数 $J(\tau)$ 是解析的，对任意适合于

$$ad - bc = 1$$

的整数常有

$$J\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = J(\tau). \tag{3}$$

证．1）先证在上半平面 $\vartheta\tau > 0$．级数

$$g_2(1, \tau) = 60 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(m + n\tau)^4}$$

代表一解析函数．由于每一项都是解析函数，因此如能证明在任一带形区域 S：

$$-a \leqslant R\tau \leqslant a, \quad \vartheta_\tau \geqslant b,$$

级数一致收敛即可．这儿 a、b 是任意二正数．

命 h 等于平行四边形 $(0, 1, 1 + \tau, \tau)$ 的两个高的较小的一个．如果 τ 在 S 中，则一定存在一个 $\varepsilon > 0$ 使 $h \geqslant \varepsilon$．用 §8 已经用过的方法可证级数的一致收敛性，故在上半平面 $g_2(1, \tau)$ 是 τ 的解析函数．

同法证明 $g_3(1, \tau)$，$\Delta(1, \tau)$ 都是．由于 $\Delta(1, \tau) \neq 0$，因此，$J(\tau)$ 也是上半平面的解析函数．

2）命 $W' = aw' + bw$，$W = cw' + dw$，$ad - bc = 1$，而 a, b, c, d 是整数，则

$$T = W'/W = (aw' + bw)/(cw' + dw)$$
$$= (a\tau + b)/(c\tau + d).$$

由于 $ad - bc > 0$，它把 τ 的上半平面变为 T 的上半平面，并且有

$$g_2(w, w') = g_2(W, W'),$$
$$g_3(w, w') = g_3(W, W'),$$

因此

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(w, w')}{\Delta(w, w')} = \frac{g_2^3(W, W')}{\Delta(W, W')} = J\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right),$$

适合于关系 (3) 的函数称为模函数．变形 $\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d)$ 称为模群．在研究 $J(\tau)$ 之前我们先讲模群和模函数的一般性质．

§17. 模变换

我们来研究出模变换

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

所组成的模群．这里，a, b, c, d 为满足 $ad - bc = 1$ 的整数． 一般来说，每个模变换均有二个不同的定点(即 $z' = z$)，即二次方程

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

之二根．

若 z_1，z_2 为式之二根,则该变换可以写成标准形式

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

取 $z = \infty$，则 $z' = a/c$，故

$$\lambda = \frac{a - cz_1}{a - cz_2}.$$

若 $|\lambda| = 1$，$\lambda \neq 1$，此变换称为椭圆的．

若 λ 是实数,而 $\neq \pm 1$，则称为双曲的．

若 λ 是复数，$|\lambda| \neq 1$，则称为等纬角的 (Loxodromic)．

若二定点相吻合,则称为抛物的．

若有一变换连续用若干次而成为单位变换 E，则称为有限次变换． 最小之次数使其成为单位变换者,称为该变换之周期． 仅当椭圆变换且 $\lambda^n = 1$ 时有周期，其周期即为最小的使 $\lambda^n = 1$ 的正整数 n． 当 $n = 2$ 时,则 $\lambda = -1$，周期为 2 之变换称为对合．

容易证明 λ 适合二次方程．

$$\lambda + \lambda^{-1} = a^2 + d^2 + 2bc = (a + d)^2 - 2.$$

此二次方程之判别式为

$$[(a + d)^2 - 2]^2 - 4 = (a + d)^2[(a + d)^2 - 4].$$

在讨论中,不妨假定 $a + d \geqslant 0$，若不然可将 a, b, c, d 换成 $-a, -b, -c, -d$．

1） 若 $a + d > 2$，则得双曲变换,有二个实数定点,此二定点乃二次方程

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

之根．此二次方程有有理根的条件为

$$(d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4 = u^2.$$

u 为一整数．因为 $x^2 - y^2 = 4$ 的整数解只有 $u = \pm 2$，$y = 0$，而无其他，故双曲模变换的定点一定是有理系数二次方程的根，而非有理数．这种数称为二次代数数．

2） 若 $a + d = 2$，则 $\lambda = 1$，得到抛物变形

$$\frac{1}{z' - (a - 1)/c} = \frac{1}{z - (a - 1)/c} + c.$$

若 $c = 0$，则 $a = d = 1$，而得

$$z' = z + b.$$

前者以有理数 $(a - 1)/c$ 为定点,后者以∞为定点．

3） 若 $a + d = 1$，则

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

于是 λ 为 $\rho = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$，或 ρ^2，而固定点为

$$z_1 = \frac{a+\rho^2}{c}, \quad z_2 = \frac{a+\rho}{c}.$$

标准形式为

$$\frac{z'-(a+\rho^2)/c}{z'-(a+\rho)/c} = \rho\frac{z-(a+\rho^2)/c}{z-(a+\rho)/c}.$$

此为一椭圆变换，周期为 3. 若 ρ 换成 ρ^2，则得另一周期为 3 的椭圆变换.

4) $a+d=0$，则 λ 之方程为 $(\lambda+1)^2=0$，即 $\lambda=-1$. 而定点为

$$cz^2-2az-b=0$$

之根. 即

$$z=\frac{a\pm i}{c}.$$

而标准形式为

$$\frac{z'-(a+i)/c}{z'-(a-i)/c} = -\frac{z-(a+i)/c}{z-(a-i)/c}.$$

这是一椭圆变换，周期是 2.

总之，若 $a+d=0$，则模变换代表一对合；若 $a+d=\pm1$，则代表一周期为 3 之变换；若 $a+d=\pm2$，则得抛物变换，其定点是有理数或无穷；若 $|a+d|>2$，则得双曲变换，其定点在实轴上，并且是二次代数数.

§18. 基　　域

定义 1. 上半平面的两点 z，z'，如能有一模变换将 z 变成 z'，则此二点称为相似. 以 $z\sim z'$ 表示之.

显然有

(i) $z\sim z$;

(ii) 若 $z\sim z'$，则 $z'\sim z$;

(iii) 若 $z\sim z'$，$z'\sim z''$，则 $z\sim z''$.

作在上半平面的域

$$D:\begin{cases}-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2},\\ x^2+y^2>1, \quad 当\ x>0\ 时,\\ x^2+y^2\geqslant 1, \quad 当\ x\leqslant 0\ 时.\end{cases}$$

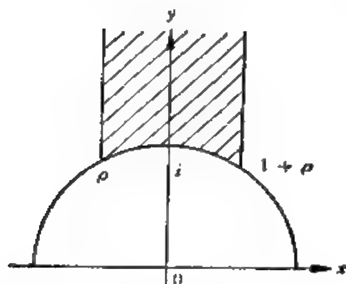


图 71

定义 2. 在 D 上的点称为既约点，D 称为基域，故 D 为一三角形，其三角的度数为 $\left(0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

定理 1. 无二既约点可以彼此相似.

证. 若 z，z' 为二不同的既约点，且

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}.$$

若命 $z=x+iy$，$z'=x'+iy'$，于是

$$y' = \frac{y}{|cz+d|^2}.$$

今有

$$|cz+d|^2 = c^2 z\bar{z} + cd(z+\bar{z}) + d^2 = c^2(x^2+y^2)$$
$$+ 2cdx + d^2 \geqslant c^2 - |cd| + d^2 > 1.$$

但是须除去可能的例外：$c = \pm 1$, $d = 0$，或 $c = 0$, $d = \pm 1$，或 $c = d = 1$. 故将可能的例外情况除去后常有

$$y' < y.$$

当 $c = d = 1$ 时，仅当 $z = \rho$ 时，有 $|cz+d|^2 = 1$. 由于 $a - b = 1$ 及 $\rho^2 + \rho + 1 = 0$，则

$$z' = \frac{a\rho + b}{\rho + 1} = -\frac{a\rho + b}{\rho^2} = -a\rho^2 - b\rho = -\rho^2 + b.$$

故 $\vartheta(z') = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 若 $z' \in D$，则 $z' = \rho$，而与 $z' \neq \rho$ 矛盾.

但

$$z = \frac{dz' - b}{-cz' + d},$$

故常有

$$y < y'.$$

同样须除去可能的例外：$c = \pm 1$, $a = 0$；或 $c = 0$, $a = \pm 1$.

不可能同时有 $y > y'$ 及 $y' > y$. 故仅须研究以下的情况：

(i) $c = 0$, $a = d = 1$;

(ii) $c = 1$, $a = d = 0$.

在第一种情况下

$$z' = z + b, \quad b \neq 0.$$

即 $x' = x + b$. $|x' - x| \geqslant 1$，故 z, z' 不能都在 D 中.

在第二种情况下，$b = -1$，即

$$z' = -\frac{1}{z},$$

$$|z'| \cdot |z| = 1.$$

即若 $|z| > 1$，则 $|z'| < 1$，即 z' 不能为既约点. 若 $|z'| > 1$，则 z 不能为既约点. 若 $|z| = 1$，则 z 仅能在由 ρ 到 i 的圆弧上，而 $z'(= -1/z)$ 在由 $\rho + 1$ 到 i 的圆弧上. 若 $z \neq i$，则 z' 并非既约点；若 $z = i$，则 $z' = i = z$，此与假设矛盾.

定理 2. 在长方形 $-\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}$, $y \geqslant \gamma (\gamma > 0)$ 中，相似于一定点的点数有限. 亦即将长方形中诸点分为相似点组，则每组中点数有限.

证. 假定 $z = x + yi$,

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

则已知

$$y' = \frac{y}{|cz+d|^2} = \frac{y}{c^2(x^2+y^2) + 2cdx + d^2}.$$

若 $y'\geqslant r$，则

$$c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2\leqslant y/r,$$

即

$$(cx+d)^2+c^2y^2\leqslant y/r.$$

显然只能有有限对整数 c, d 适合此式.

假定 (c', d') 是这样的一对,且 $(c', d')=1$，则适合于

$$ad'-bc'=1$$

的所有解答 (a, b) 可以表成

$$a=a'+mc',\quad b=b'+md',$$

此处 a', b' 为一固定解,即 $a'd'-b'c'=1$，而 m 为任一整数,故

$$z'=\frac{az+b}{c'z+d'}=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+m.$$

仅有唯一的 m，使 $-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}$. 故对一对 $(c', d')[(c', d')=1]$,仅有一组 a, b 使 $-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}$，故在长方形中相似于 z 的点数有限.

定理 3. 上半平面的任一点相似于唯一的既约点.

证. 命 $z=x_0+y_0i$, $y_0>0$.

取唯一的整数 m，使

$$-\frac{1}{2}\leqslant x_0+m<\frac{1}{2}.$$

命

$$z'=z+m.$$

若 $|z'|>1$，则 z' 是既约点. 无须证明，若 $|z'|=1$，在 ρ 到 i 的弧上，即为既约点. 若在 $1+\rho$ 到 i 的弧上,则可用 $-\frac{1}{z}$ 变为上述情况. 若 $|z'|<1$，则使

$$z''=-\frac{1}{z'},$$

而

$$y''=\frac{y_0}{|z'|^2}>y_0.$$

取 m'，使

$$z'''=z''+m',\quad -\frac{1}{2}\leqslant x'''<\frac{1}{2}.$$

若 z''' 还不是既约点,用同样方法,做出 $z''''=-\frac{1}{z'''}$. 于是得出 $z', z''', \cdots$ 等都在长方形

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2},\quad y>y_0$$

内. 由定理 2，已知其个数仅能有限.

故任一点一定与一既约点相似. 又由定理 1 已知,不能有二既约点相似,这就证明了定理.

习题 1. 凡

$$z=\frac{a+i}{c},\quad a^2+bc+1=0$$

皆相似于 i.

习题 2. 凡

$$z=\frac{a+\rho}{c},\quad a(1-a)-bc=1$$

皆相似于 ρ.

§19. 基 域 纲

定理 1. 若 z 非模变换的定点之一,而 U, V 为二不同的模变换,则

$$Uz\neq Vz.$$

Uz 代表变换 U 将 z 变成的点.

证. 若 $Uz=Vz$, 则

$$z=U^{-1}Vz.$$

而得出 z 是定点.

定理 2. 作基域之所有的映象,所得出的诸三角形填满上半平面,且无重复部分.

证. 上半部分可由上节定理 3 知之. 若 U 及 V 为二不同的模变换,将基域 D 变为有公共部分的二三角形,则 $U^{-1}V$ 必变 D 为一与 D 有公共部分之三角形. 命 z 为公共部分中的一点,则 D 中必有一点与之相似,故其都在 D 中是不可能的.

这定理可以以堆砖为喻. 在普通空间中,可以用等大的正方形的砖填满空间. 而所谓等大的意义是,可以将一砖"搬"占到另一砖的地位.

现在的"基域"乃砖的模形. "搬动"乃模变换. 上述定理就是说,这样的砖可以填满上半平面,此乃非欧几何学的说法.

基域的定义作如下的更动: 具有下列性质的上半平面的一个域称为基域:

(i) 任一点必与其中之一点相似;

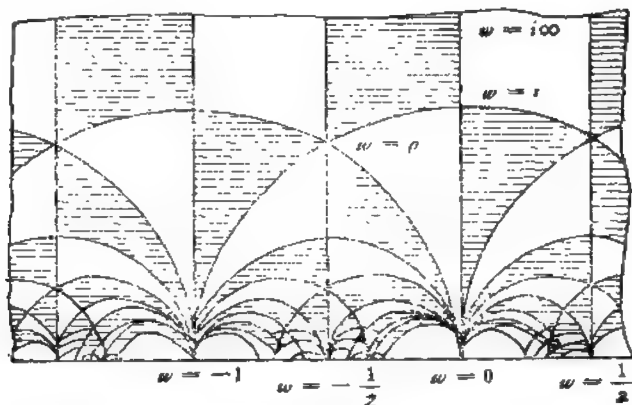


图 72

(ii) 其中任二点不相似.

在上半平面中任取一点 z，非一模变换的定点，在平面上作此点的相似点

$$z_1, z_2\cdots.$$

作 (z, z_i) 的垂直平分线，即其上的点与 z 及 z_i 的非欧距离相等者，舍弃在 z_i 的一面的那部分. 所剩下的部分，成一基域（读者试补出其证明. 并试求出取 $z = z_i$ 时所得出的基域).

这说明了，Лобачевский 几何在函数论中有其实际的意义.

周期为 2 的椭圆变换的定点在角度为 $\frac{\pi}{3}$ 的二角所夹的边上. 周期为 3 的椭圆变换的定点有六个三角形以之为公顶. 有无数个边经过抛物定点. 双曲定点不能为三角形的顶点(不能在边上更为明显).

§20. 模群三构造

今以 S 代表 $z' = z + 1$，T 代表 $z' = -\frac{1}{z}$，则 S^{-1} 代表 $z' = z - 1$. 此三变换将基域变为其相邻之三域，反之，将基域变为基域之变换必为 S, T 或 S^{-1} 之一.

命 M 为任一模变换，z 为基域 D 内部之任一点. 以曲线连接 z 与 M_z，使此曲线不过顶点. 假定所过之域依次名为：

$$D, D_1, D_2, \cdots, D_n(=MD).$$

又命将 D 变为 D_i 的模变换为 M_i. 则 $M_1 = S, T$, 或 S^{-1}. 假定 M_k 可由 S 及 T 的乘方之积表出，因为 M_k^{-1} 将 D_k 变为 D, D_{k+1} 是 D_k 的邻域，故 M_k^{-1} 将 D_{k+1} 变为 D 的邻域 D'_{k+1}. 但 D'_{k+1} 经过 $M'^{-1}(=S, T$ 或 $S^{-1})$ 变为 D. 即

$$M'^{-1}M_k^{-1}D_{k+1} = M'^{-1}D'_{k+1} = D,$$

亦即

$$M_kM'D = D_{k+1}.$$

故 $M_{k+1} = M_kM'$ 可由 S 及 T 的乘方之积表出，而 M 亦然，由此已证明了

定理 1. 任一模变换可由 S 及 T 的乘方之积表出.

定理 1 的具体意义为：若

$$M = S^{m_1}TS^{m_2}TS^{m_3}\cdots TS^{m_\nu},$$

则

$$z' = m_1 - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_4} - \cdots - \frac{1}{m_\nu + z}.$$

此显出模变换与连分数的关系.

易知 $T^2 = E$, $(ST)^3 = E$.

若扩大模变换的定义

$$z' = (az + b)/(cz + d), \quad ad - bc = \pm 1,$$

则可得类似的结果

$$z' = m_1 + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} + \cdots + \frac{1}{m_\nu + z}.$$

§ 21. 模函数的定义和性质

定义 1. 一个在上半平面纯的函数如果经过模变换而不变，则称为模函数.

由模群的性质可知，研究模函数的性质可以归结为研究它在基域中的性质. ∞ 点称为基域的抛物顶点，$i, \rho, 1+\rho$ 称为椭圆顶点，$\tau=-\frac{1}{2}$, $\tau=\frac{1}{2}$ 所定义的两边称为对边，由 ρ 到 i 及由 i 到 $1+\rho$ 的两段圆弧也称为对边. 抛物顶点是模变换 $\tau'=\tau+1$ 的不动点. 而 i 是 $\tau'=-\frac{1}{\tau}$ 的不动点. ρ 及 $1+\rho$ 是 $\tau'=-\frac{1}{\tau+1}$ 及 $\tau'=1-\frac{1}{\tau}$ 的不动点.

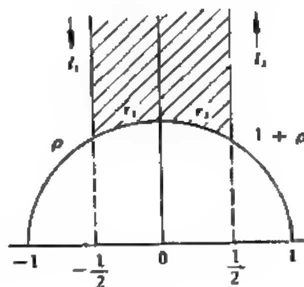


图 73

定理 1. 模函数 $f(\tau)$ 在 $\tau=i$ 处的零点和极点都是偶重的.

证. 假定 $\tau=i$ 处有 k 阶的零点，则

$$f(\tau)=(\tau-i)^k\varphi(\tau),$$
$$\varphi(i)=a\neq 0.$$

由于

$$f(\tau)=f\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\left(-\frac{1}{\tau}-i\right)^k\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right)=(\tau-i)^k\varphi(\tau),$$

所以，

$$\varphi(\tau)=\left(\frac{-i}{\tau}\right)^k\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right),$$

由于

$$\varphi(i)=(-1)^k\varphi(i)=\varphi(i),$$

可知 k 是偶数.

考虑 $\frac{1}{f(\tau)}$，可以同样得出 $\tau=i$ 是极点的情况.

定理 2. 模函数 $f(\tau)$ 在 $\tau=\rho$ (及 $1+\rho$) 处的零点或极点的重数是三的倍数.

与定理 1 的证法相同，但现在用关系式

$$f\left(-\frac{1}{\tau+1}\right)=f(\tau)$$

即得.

定理 3. 模函数 $f(\tau)$ 有展开式

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}a_ne^{2\pi in\tau}, \tag{1}$$

换言之，如以 $t=e^{2\pi i\tau}$ 为变数，把 $f(\tau)$ 作为 t 的函数，则它是以 $t=0$ 为孤立奇点的函数.

证. 由 $f(\tau+1)=f(\tau)$ 可知 $f(x+1+iy)=f(x+iy)$，即它是一个以 1 为周期的函数. 因此，即任一固定的 y，如果在 $x+iy(-\infty<x<\infty)$ 上 $f(\tau)$ 无极点，则

$f(\tau)$ 有 Fourier 展开式

$$f(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n(y)e^{2\pi inx},\quad P_n(y)=\int_0^1 f(\tau)e^{-2\pi inx}dx,$$

当 y 在任一有限区域时，这级数是一致收敛的.

由解析性 $\frac{d}{dx}f(\tau)=-i\frac{d}{dy}f(\tau)$ 可知

$$2\pi inP_n(y)=-iP_n'(y),$$

故得

$$P_n(y)=a_ne^{-2\pi ny},$$

即得所证.

定义 2. 模函数的展开式 (1) 仅有有限个负项的称为简单模函数.

定义 3. 在基域内简单模函数的零点(或极点)数的计算方法如下:

(i) 在基域内点，依个数及重数计算;

(ii) 在对边上算了左边的不算右边的;

(iii) 在 $\tau=i$, 算一半;

(iv) 在 $\tau=\rho,\ 1+\rho$ 算 1/3;

(v) 在 $\tau=\infty$, 依大的重数算.

定理 4. 一个简单模函数 $f(\tau)$ 在基域内的零点数与极点数相等.

证. 1) 先假定在周界上既无零点又无极点. 考虑绕基域的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{r_1}+\int_{r_2}+\int_{l_2}+\int_{l_1}\right)d(\log f(\tau)).$$

它等于 $f(\tau)$ 的零点数减去 $f(\tau)$ 的极点数, $\tau'=\tau+1$ 把 l_1 反向地变为 l_2, 故

$$\int_{l_2}+\int_{l_1}d\log f(\tau)=0.$$

又 $\tau'=\frac{-1}{\tau}$ 把 r_1 反向地变为 r_2, 故也互相消去了. 即得所证.

2) 如果在边上有零点或极点, 例如, 在 $x=-\frac{1}{2}$ 上有一零点 z_0, 则 $x=\frac{1}{2}$ 有一同样的零点 $1+z_0$. 在 z_0 作一外向的半圆(很小), 在 $1+z_0$ 作一内向的半圆, 这样就可以避免边上有零点的困难.

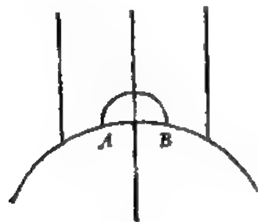


图 74

3) 如果在 $\tau=i$ 处有零点，则它是偶阶的 $(=2h)$, 以之为中心, ε 为半径作一圆, 交 r_1 于 A, 交 r_2 于 B, 沿圆弧从 A 到 B 求积分(线路取在基域内). 命 $f(\tau)=(\tau-i)^{2h}\varphi(\tau)$, 则

$$\int_A^B d\log f(\tau)=2k\int_A^B d\log(\tau-i)+\int_A^B\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)}d\tau.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时, 最后一项趋于 0, 其前一项当 $\varepsilon\to 0$ 时的积分趋于 πi, 因此得出在该点的零点的重数之半.

同法处理 $\tau=\rho$ 及 $1+\rho$.

4) 考虑 $\tau=\infty$ 处的情况. 当 y_0 充分大时, 作一直线 $x+iy_0$, $|x|\leqslant\frac{1}{2}$, 沿此线段积分, 就是绕 $t=0$ 沿圆积分, 故得所云.

§ 22. $J(\tau)$

定理 1. $J(\tau)$ 在抛物顶点有一单极点，也就是如果命 $t = e^{2\pi i\tau}$，则 $J(\tau)$ 是 t 的函数，在 $t = 0$ 处有一单极点.

证. 1) 由 $\operatorname{ctg} \pi\tau$ 的展开式

$$\pi \operatorname{ctg} \pi\tau = \frac{1}{\tau} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{\tau - n} + \frac{1}{n}\right), \tag{1}$$

及

$$\pi \operatorname{ctg} \pi\tau = -\pi i(1 + 2t + 2t^2 + \cdots), \quad t = e^{2\pi i\tau}$$

出发，对 τ 微商三、五次，并注意 $dt/d\tau = 2\pi i t$，则得

$$\left.\begin{aligned} -6 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+\tau)^4} &= -16\pi^4(t + 8t^2 + \cdots), \\ -120 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+\tau)^6} &= 64\pi^6(t + 32t^2 \cdots), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

更由 (1) 式求微商可推出

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{45}, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{m^6} = \frac{2\pi^6}{945}, \tag{3}$$

2) 由此可推出

$$\begin{aligned} g_2(1, \tau) &= 60 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{m^4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^4}\right) \\ &= 60 \left(\frac{\pi^4}{45} + \frac{16\pi^4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (t^n + 8t^{2n} + \cdots)\right), \end{aligned}$$

注意当 τ 换为 $n\tau$ 时，t 换为 t^n. 因此

$$g_2(1, \tau) = \pi^4\left(\frac{4}{3} + 320t + \cdots\right).$$

同法证明

$$\begin{aligned} g_3(1, \tau) &= 140 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{m^6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^6}\right) \\ &= 140 \left(\frac{2\pi^6}{945} - \frac{16\pi^6}{15} \sum_{n=1}^{\infty} (t^n + 32t^{2n} + \cdots)\right) \\ &= \pi^6\left(\frac{8}{27} - \frac{448}{3} t + \cdots\right). \end{aligned}$$

由此推得

$$\Delta(1, \tau) = g_2^3(1, \tau) - 27g_3^2(1, \tau) = \pi^{12}(4096t + \cdots).$$

因此得

$$J(\tau) = \frac{(4/3 + 320t + \cdots)^3}{4096t + \cdots} = \frac{1}{1728t} + C_0 + C_1 t + \cdots.$$

定理 1 已经证明. 由此可推出，当 $t \to +\infty$ 时，$J(\tau) = \infty$.

定理 2. 对任一C方程

$$J(\tau)=C$$

在基域中有一解且有唯一解.

这是§6定理4与本节定理1的直接推论.

由于

$$\frac{1}{140}g_3(1,i)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m+in)^6}=-\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-im)^6}$$
$$=-\frac{1}{140}g_3(1,i),$$

所以 $g_3(1,i)=0$，因此 $J(i)=1$.

又

$$\frac{1}{60}g_2(1,\rho)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m+\rho n)^4}=\frac{1}{\rho}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(m\rho^2+n)^4}$$
$$=\frac{1}{\rho}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{((m-n)-m\rho)^4}$$
$$=\frac{1}{\rho}\frac{1}{60}g_2(1,\rho),$$

所以 $g_2(1,\rho)=0$，即 $J(\rho)=0$. 因此得

定理 3. $J(\infty)=\infty$，$J(i)=1$，$J(\rho)=0$.

再看何时 $J(\tau)$ 是实数. 以虚轴为对称轴的变形是 $\tau'=-\bar{\tau}$，易见

$$g_2(1,\tau')=60\Sigma'\frac{1}{(m-n\bar{\tau})^4}=60\Sigma\frac{1}{(m+n\bar{\tau})^4}=\overline{g_2(1,\tau)}.$$

同样得 $g_3(1,\tau')=\overline{g_3(1,\tau)}$. 因此

$$J(\tau')=\bar{J}(\tau).\tag{4}$$

首先适合于 $\tau'=\tau$ 的点，在虚轴上，$J(\tau)=\bar{J}(\tau)$ 即 $J(\tau)$ 取实值，其次 $J(\tau'+1)=J(\tau')=\bar{J}(\tau)$，而 $\tau'+1=\tau$，即 $x=\frac{1}{2}$ 上，$J(\tau)$ 取实值，又由 $J\left(-\frac{1}{\tau'}\right)=\bar{J}(\tau)$，可知当 $\tau=e^{i\theta}$ 时，$-\frac{1}{\tau'}=e^{i\theta}$，即在圆周上，$J(\tau)$ 也取实值，即在基域的边上及虚轴上，$J(\tau)$ 取实值.

无其它的点，$J(\tau)$ 取实值，不然，τ_0 及 $-\frac{1}{\tau_0}$ 都是基域的内点，而 $J(-\bar{\tau}_0)=\bar{J}(\tau_0)=J(\tau_0)$，即有两点 τ_0，$-\bar{\tau}_0$ 取同一数值，这是不可能的.

由此可知，$J(\tau)=u+iv$ 在基域的两半，v 各取一定号，若不然 τ_1，τ_2 都在同一半中而 $v(\tau_1)>0$，$v(\tau_2)<0$，在这半域中可作一线联上 τ_1，τ_2，而因此有一点使 $v(\tau)=0$，此不可能.

今进而研究在那一半，$v>0$. 当 τ 由 ρ 到 i 基域在左边，$J(\tau)$ 由 0 变到 1，而所对应于基域的点在左边，因此在 J 平面上，是上半平面，即得.

定理 1 中 $z=J(\tau)$ 定义一个保角变换，把基域变为全平面，左半基域对应于上半平面，而边界及虚轴对应于实轴. 当 τ 沿虚轴从 i 到 ∞，z 由 1 到 $+\infty$，基域内部对应于

z 平面带上一条由 $z=1$ 沿 x 轴到 $z=-\infty$ 的裂缝.

定理 4. 模函数 J 的反函数 J^{-1} 是一个 ∞ 多值的解析函数，仅有 $0, 1, \infty$ 作为其奇点，其数值在上半平面上.

如果 $F(z)$ 是一亚纯函数但不取 a, b, c 三值，则函数 $G(z)=\frac{F-a}{F-c}\Big/\frac{b-a}{b-c}$ 是一不取 $0, 1, \infty$ 的亚纯函数。函数 $J^{-1}(G(z))$ 是一处处解析的函数，因此是一常数. 因此得:

定理 5. 不取三个值的亚纯函数是常数.

定理 6. 不取二个值的整函数是常数.

§23. 方程 $g_2(w, w')=a$, $g_3(w, w')=b$ 的求解

定理 1. 如果 a, b 是任意二有限数,且适合于 $a^3-27b^2\neq 0$，则有一对复数 w, w'，其商非实数,使

$$g_2(w, w')=a, \quad g_3(w, w')=b. \tag{1}$$

假定 $a\neq 0$, $b\neq 0$, 由 (1) 可知

$$\frac{g_2^3(w, w')}{g_2^3(w, w')-27g_3^2(w, w')}=\frac{a^3}{a^3-27b^2},$$
$$\frac{g_2(w, w')}{g_3(w, w')}=\frac{a}{b}. \tag{2}$$

反之,如果 g_2, g_3 适合于 (2), 则也可推出 (1) 来.

命 $w'/w=\tau$, (2)的第一式是 $J(\tau)=a^3/(a^3-27b^2)$, 由从 §6 定理 2 可知在 τ 的上半平面有一解, τ 已知,则由 (2) 的第二式

$$\frac{w^2g_2(1, \tau)}{g_3(1, \tau)}=\frac{a}{b}$$

可以得出 w 来,而 $w'=w\tau$.

如果 $a=0$, 则问题等价于求 $J(\tau)=0$, $w^{-6}g_3(1, \tau)=b$ 的解. 由此求出 $\tau=\rho$, 而且 $w=(g_3(1, \rho)/b)^{1/6}$.

同法处理 $b=0$ 的情况.

§24. 任一模函数是 $J(\tau)$ 的有理函数

任一简单模函数 $f(\tau)$ 在基域中只有有限个零点及极点 (如果不然，则无穷远点必然是 t 的孤立奇点了),命 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为其零点，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为其极点作函数

$$F(\tau)=\frac{(J(\tau)-J(a_1))\cdots(J(\tau)-J(a_n))}{(J(\tau)-J(b_1))\cdots(J(\tau)-J(b_n))},$$

如此，$J(\tau)/F(\tau)$ 在基域内既无零点又无极点，因此它是一常数. 但注意，如果 i 是零点，则它一定是 $2k$ 重零点，我们所用的因子是 $(J(i)-1)^k$. 同样处理 $\tau=\rho$ 时的情况.

公式汇编* (weierstrass)

I 背 景

$$\sin \pi u = \pi u \prod_{n}{}' \left\{ \left(1 - \frac{u}{n}\right) e^{\frac{u}{n}} \right\}. \tag{1}$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi u = \frac{1}{u} + \sum_{n}{}' \left\{ \frac{1}{u-n} + \frac{1}{n} \right\}. \tag{2}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi u} = \sum_{n} \frac{1}{(u-n)^2}. \tag{3}$$

$$\prod_{n} \left\{ \left(1 - \frac{u}{n-a}\right) e^{\frac{u}{n-a}} \right\} = \frac{\sin \pi(u+a)}{\sin \pi a} e^{-u\pi \operatorname{ctg} \pi a}. \tag{4}$$

$$\sum_{n} \left\{ \frac{1}{u+a-n} + \frac{1}{n-a} \right\} = \pi \left[\operatorname{ctg} \pi(u+a) - \operatorname{ctg} \pi a \right]. \tag{5}$$

II

$$\sigma(u) = u \prod_{S}{}' \left\{ \left(1 - \frac{u}{S}\right) e^{\frac{u}{S} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{S^2}} \right\}. \tag{1}$$

这儿 $S = 2mw + 2m'w'$, $\vartheta(w/w') > 0$, $\prod_{S}{}'$ 代表 m, m' 过所有的整数的乘积,但 $m = m' = 0$ 的一项除外.

$$\zeta(u) = \frac{d}{du} \log \sigma(u) = \frac{1}{u} + \sum_{S}{}' \left\{ \frac{1}{u-S} + \frac{1}{S} + \frac{u}{S^2} \right\}. \tag{2}$$

$$\gamma(u) = -\zeta'(u) = -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{S}{}' \left\{ \frac{1}{(u-S)^2} - \frac{1}{S^2} \right\}. \tag{3}$$

$$-\frac{1}{2} \gamma(u) = \sum_{S} \frac{1}{(u-S)^3}. \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(-u) = -\sigma(u), \quad \gamma(-u) = \gamma(u), \\ &\zeta(-u) = -\zeta(u), \quad \gamma^{(n)}(-u) = (-1)^n \gamma^{(n)}(u). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

III

$$\sigma(\lambda u \,|\, \lambda w, \lambda w') = \lambda \sigma(u \,|\, w, w'). \tag{1}$$

$$\zeta(\lambda u \,|\, \lambda w, \lambda w') = \frac{1}{\lambda} \zeta(u \,|\, w, w'). \tag{2}$$

$$\gamma(\lambda u \,|\, \lambda w, \lambda w') = \frac{1}{\lambda^2} \gamma(u \,|\, w, w'). \tag{3}$$

$$\gamma^{(n)}(\lambda u \,|\, \lambda w, \lambda w') = \frac{1}{\lambda^{n+2}} \gamma^{(n)}(u \,|\, w, w'). \tag{4}$$

---

* 本汇编中的公式,有些是本章所有的,有些是不难推得的. 读者可自证之.

IV

$$\left.\begin{aligned}&g_2 = 60\sum_S{}' \frac{1}{S^4},\quad g_3 = 140\sum_S{}' \frac{1}{S^6},\\&g_2(\lambda w, \lambda w') = \lambda^{-4} g_2(w, w'),\\&g_3(\lambda w, \lambda w') = \lambda^{-6} g_3(w, w').\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\sigma(u) = u - \frac{g_2 u^5}{2^4\cdot 3\cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7} + \cdots. \tag{2}$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{2^2\cdot 3\cdot 5} - \frac{g_3 u^5}{2^2\cdot 5\cdot 7} - \frac{g_2^2 u^7}{2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7} + \cdots. \tag{3}$$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{2^2\cdot 5} + \frac{g_3 u^4}{2^2\cdot 7} + \frac{g_2^2 u^6}{2^4\cdot 3\cdot 5^2} + \cdots. \tag{4}$$

V

$$\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(a)} e^{-u\zeta(a)+\frac{1}{2}u^2\wp(a)} = \prod_S \left\{\left(1 - \frac{u}{S-a}\right) e^{\frac{u}{S-a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{(S-a)^2}}\right\}. \tag{1}$$

$$\zeta(u+a) - \zeta(a) - u\wp(u) = \sum_S \left\{\frac{1}{u+a-S} - \frac{1}{a-S} + \frac{u}{(a-S)^2}\right\}. \tag{2}$$

$$\wp(u+a) - \wp(a) = \sum_S \left\{\frac{1}{(u+a-S)^2} - \frac{1}{(a-S)^2}\right\}. \tag{3}$$

VI

$$\sigma(u+2w) = -e^{2\eta(u+w)}\sigma(u). \tag{1}$$

$$\sigma(u+2w') = -e^{2\eta'(u+w')}\sigma(u). \tag{2}$$

$$\eta w' - \eta' w = \frac{\pi i}{2}. \tag{3}$$

$$\sigma(u+2mw+2nw') = (-1)^{mn+m+n} e^{(2m\eta+2n\eta')(\eta+mw+nw')}\sigma(u). \tag{4}$$

$$\zeta(u+2mw+2nw') = \zeta(u) + 2m\eta + 2n\eta'. \tag{5}$$

$$\zeta(w) = \eta,\ \zeta(w') = \eta',\ \zeta(w+w') = \eta+\eta'. \tag{6}$$

$$\wp(u+2mw+2nw') = \wp(w). \tag{7}$$

$$\wp'(u+2mw+2nw') = \wp'(u). \tag{8}$$

$$\wp'(w) = \wp'(w') = \wp'(w+w') = 0. \tag{9}$$

VII

$$\wp(w) - \wp(v) = -\sigma(u+v)\cdot\sigma(u-v)/\sigma^2(u)\sigma^2(v). \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\wp(w_1) = e_1,\ \wp(w_2) = e_2,\ \wp(w_1+w_2) = e_3,\\&e_1 + e_2 + e_3 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\wp'^2(u) = 4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3),\\&g_2 = -4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1) = 2(e_1^2+e_2^2+e_3^2),\\&g_3 = 4e_1e_2e_3.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\gamma''(u) = 6\gamma^2(u) - \frac{1}{2} g_2. \tag{4}$$

$$\gamma'''(u) = 12\gamma(u)\gamma'(u). \tag{5}$$

VIII

$$J(\tau) = \frac{27g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} + 1, \quad \tau = w'/w. \tag{1}$$

$$J(\tau + 1) = J(\tau). \tag{2}$$

$$J\left(-\frac{1}{\tau}\right) = J(\tau). \tag{3}$$

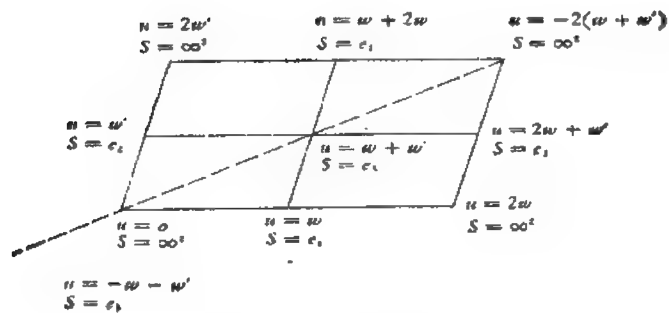


图 75 $S = p(u)$

第十四章 Jacobi 的椭圆函数

§1. ϑ 函数

以上所说的一些椭圆函数的表达式收敛速度都是很缓慢的，在计算数值时很不方便。这一缺点可由 Jacobi 的 Theta 函数来弥补，它们有迅速的收敛表达式，而且通过它们可以表示出椭圆函数来。

我们现在用符号

$$q = e^{\pi i \tau}, \quad \vartheta\tau > 0,$$

因此 $|q| < 1$.

定义.

$$\vartheta(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz}, \tag{1}$$

当 $|z| < A$ 时

$$|q^{n^2} e^{2niz}| \leqslant |q|^{n^2} e^{2nA},$$

由于当 $n \to \infty$ 时

$$|q|^{n^2} e^{2nA} / |q|^{(n-1)^2} e^{2(n-1)A} = |q|^{2n+1} A^2 \to 0,$$

故级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |q|^{n^2} e^{2nA}$$

是收敛的．因此 (1) 在任何一有限域内一致收敛．所以，$\vartheta(z, q)$ 是 z 的整函数．

显然有

$$\vartheta(z, q) = +2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nz. \tag{2}$$

因此立刻推得

$$\vartheta(z + \pi, q) = \vartheta(z, q). \tag{3}$$

再则

$$\vartheta(z + \pi\tau, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{2n} e^{2niz}$$

$$= -q^{-1} e^{-2iz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz},$$

即得

$$\vartheta(z + \pi\tau, q) = -q^{-1} e^{-2iz} \vartheta(z, q). \tag{4}$$

我们定义因子 $-q^{-1}e^{-2iz}$ 为周期 $\pi\tau$ 的乘子．因此 $\vartheta(z, q)$ 是以 $1, -q^{-1}e^{-2iz}$ 为乘子，以 $\pi, \pi\tau$ 为周期的函数．

按照通常惯例，用 $\vartheta_4(z, q)$ 表这 $\vartheta(z, q)$，其它三个 ϑ 函数的定义如下：

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi, q\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z, q) &= -ie^{iz+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau, q\right)\\ &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)iz}\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z,\end{aligned} \tag{6}$$

及

$$\begin{aligned}\vartheta_2(z, q) &= \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi, q\right)\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z.\end{aligned} \tag{7}$$

显然 $\vartheta_1(z, q)$ 是 z 的奇函数，而其它是 z 的偶函数。

为简单起见，以后用 $\vartheta_\nu(z)$ 来代表 $\vartheta_\nu(z, q)$。 有时为了突出 τ，也用 $\vartheta_\nu(z|\tau)$ 来表之。ϑ_ν 也用来表 $\vartheta(0)$，ϑ_1' 代表 $\vartheta_1(z)$ 的微商，代以 $z=0$ 的数值。

易于证明 ϑ 函数的乘子如下表：

	$\vartheta_1(z)$	$\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$
π	-1	-1	1	1
$\pi\tau$	$-N$	N	N	$-N$

(8)

这儿 $N = q^{-1}e^{-2iz}$。

由此立刻推得对任一 ϑ 都有

$$\frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)} = \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}. \tag{9}$$

求对数微商立得

$$\frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)} = -2i + \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}. \tag{10}$$

习题 1. 试证

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) + \vartheta_2(2z, q^4),$$
$$\vartheta_4(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) - \vartheta_2(2z, q^4).$$

习题 2.

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z) &= -\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = -iM\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right)\\ &= -iM\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right),\end{aligned}$$

$$\vartheta_2(z) = M\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = M\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right)$$
$$= \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\right),$$
$$\vartheta_3(z) = \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = M\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right)$$
$$= M\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right),$$
$$\vartheta_4(z) = -iM\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = iM\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right)$$
$$= \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi\right),$$

这儿 $M = q^{\frac{1}{4}}e^{iz}$.

§ 2. ϑ 函数的零点与无穷乘积的表达式

如果 z_0 是一个 $\vartheta(z)$ 的零点，则

$$z_0 + m\pi + n\pi\tau$$

也都是．这儿 m，n 是任意整数，这些点称为与 z_0 相合的点．

定理 1. 对任一 t，在以

$$t,\ t+\pi,\ t+\pi+\pi\tau,\ t+\pi\tau$$

为顶点的平行四边形 C 中，ϑ 只有一个单零点．

证．由于 $\vartheta(z)$ 是整函数，所以 C 中 ϑ 的零点的个数等于

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi}\left[\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} - \frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)}\right]dz$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi\tau}\left[\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} - \frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)}\right]dz.$$

由 § 1, (9), (10) 可知

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} 2i\,dz = 1.$$

$\vartheta_1(z)$ 显然以 0 为零点，因而 $\vartheta_1(z)$，$\vartheta_2(z)$，$\vartheta_3(z)$，$\vartheta_4(z)$ 各有 0，$\frac{1}{2}\pi$，$\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau$，$\frac{1}{2}\pi\tau$ 及其相合的点为零点．

定理 2. 关于 ϑ 函数有下列无穷乘积表达式．

$$\vartheta_1(z) = 2Gq^{\frac{1}{4}}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}),$$
$$\vartheta_2(z) = 2Gq^{\frac{1}{4}}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}(1 + 2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}),$$

$$\vartheta_3(z) = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}),$$

$$\vartheta_4(z) = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}).$$

这儿 $G = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$ 将在下节中证明.

证. 以 $\vartheta_4(z)$ 为出发点,已知它的零点是

$$\frac{1}{2}\pi\tau + m\pi + n\pi\tau. \qquad (m, n \text{ 是整数})$$

显然

$$1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2} = (1 - q^{2n-1}e^{2iz})(1 - q^{2n-1}e^{-2iz})$$

有零点

$$z = -\frac{1}{2}\pi\tau - \pi m + \pi\tau n, \quad -\infty < m < \infty,$$

$$z = \frac{1}{2}\pi\tau + \pi m - \pi\tau n.$$

因此乘积.

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2})$$

与 $\vartheta_4(z)$ 有相同的零点.

又显然有 $f(z + \pi) = f(z)$ 及

$$\begin{aligned} f(z + \pi\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n+1}e^{2iz})(1 - q^{2n-3}e^{-2iz}) \\ &= f(z)(1 - q^{-1}e^{-2iz})/(1 - qe^{2iz}) \\ &= -q^{-1}e^{-2iz}f(z). \end{aligned}$$

因此 $\vartheta_4(z)/f(z)$ 是一无零点的函数,且以 π, $\pi\tau$ 为其周期,因此它是一常数,以 G 表之.

以 $z + \frac{1}{2}\pi$ 代 (z),即得 $\vartheta_3(z)$ 的表达式. 再由 $\vartheta_1(z) = -iq^{\frac{1}{4}}e^{iz}\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right)$, $\vartheta_2(z) = \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\right)$ 可得其它二式.

§ 3. $G = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})$

定理 1. $\vartheta_1'(0) = \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)$.

证. 1) 把上节的无穷乘积求 z 的对数微商,得

$$\vartheta_3'(z) = \vartheta_3(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1 + q^{2n-1}e^{2iz}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1 + q^{2n-1}e^{-2iz}}\right].$$

再求微商

$$\vartheta_3''(z) = \vartheta_3'(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1 + q^{2n-1}e^{2iz}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1 + q^{2n-1}e^{-2iz}}\right]$$

$$+\vartheta_3(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{2iz})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{-2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{-2iz})^2}\right].$$

命 $z\to 0$，则得

$$\vartheta_3'(0)=0,\quad \vartheta_3''(0)=-8\vartheta_3(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}.$$

同法得出

$$\vartheta_4'(0)=0,\quad \vartheta_4''(0)=8\vartheta_4(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2},$$

$$\vartheta_2'(0)=0,\quad \vartheta_2''(0)=\vartheta_2(0)\left[-1-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right];$$

又写成 $\vartheta_1(z)=\sin z\cdot\phi(z)$，则同法

$$\phi'(0)=0\quad \phi''(0)=8\phi(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

把 $\vartheta_1(z)=\sin z\cdot\phi(z)$ 微分三次，得

$$\vartheta_1'(0)=\phi(0),\quad \vartheta_1'''(0)=3\phi''(0)-\phi(0).$$

故得

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}-1.$$

因此

$$\begin{aligned}
1&+\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}\\
&=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right]\\
&=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1+q^{n})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1-q^{n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right]\\
&=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}q^n\frac{(1-q^n)^2-q^n(1+q^n)^2}{(1-q^{2n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right]\\
&=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}=1+\frac{\vartheta_1''(0)}{\vartheta_1(0)}.
\end{aligned}$$

即得恒等式

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}.\tag{1}$$

2) 引理：$\Phi=\vartheta_i(z/\tau)(i=1,2,3,4)$ 适合于以下的偏微分方程

$$\frac{\pi i}{4}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=0.\tag{2}$$

这可以从 ϑ 的级数表达式直接求微商得之.

例如

$$\frac{\partial^2\vartheta_3(z/\tau)}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{n^2\pi i\tau}\cos 2nz\right)$$

$$= -8\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{n^2\pi i\tau}\cos 2nz = -\frac{4}{\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\vartheta_3(z/\tau).$$

3）利用微分方程 (2)，把 (1) 改写成为

$$\frac{1}{\vartheta_1'(0/\tau)}\frac{d}{d\tau}\vartheta_1'(0/\tau) = \frac{1}{\vartheta_2(0/\tau)}\frac{d\vartheta_2(0/\tau)}{d\tau} + \frac{1}{\vartheta_3(0/\tau)}\frac{d\vartheta_3(0/\tau)}{d\tau} + \frac{1}{\vartheta_4(0/\tau)}\frac{d\vartheta_4(0/\tau)}{d\tau}.$$

对 τ 求积分得

$$\vartheta_1'(0/\tau) = C\vartheta_2(0/\tau)\vartheta_3(0/\tau)\vartheta_4(0/\tau).$$

C 是一常数．命 $q\to 0$，则

$$q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1'\to 2,\quad q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4\to 2,\quad \vartheta_3\to 4,\quad \vartheta_4\to 1.$$

因此定出 $C=1$，即得恒等式

$$\vartheta_1' = \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4.$$

定理 2. $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.

证．由 § 2 的无穷乘积公式可知

$$\vartheta_1' = \phi(0) = 2q^{\frac{1}{4}}G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}G\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_3 = G\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2,$$

$$\vartheta_4 = G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2.$$

代入定理 1 中得出

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2 = G^2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2.$$

这些乘积都是绝对收敛的，因此可以任意变换次序．由

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2\right)$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2,$$

可知

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2 = G^2,$$

即

$$G = \pm\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}).$$

当 $q\to 0$ 时由 $\vartheta_3(z)$ 的级数及乘积两种表达法可以看出 $G\to 1$，因此得出本定理．

注意，便中我们证明了一个恒等式：当 $|q|<1$ 时，

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})=1.$$

（读者试从 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2})=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{4n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n-4})=\cdots$ 证明之.）

§4. 用 ϑ 函数表椭圆函数

假定 $f(z)$ 是以 $2w, 2w'$ 为周期的椭圆函数. 命 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为其基本零点，$\beta_1, \cdots, \beta_n$ 为其基本极点，并假定已经使

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_r=\sum_{r=1}^{n}\beta_r$$

（从第十三章 §5 定理 5，知这是一定可能的），我们可以证明函数

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\alpha_r)}{2w}\middle|\tau\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\pi(z-\beta_r)}{2w}\middle|\tau\right)}$$

就是一个与 $f(z)$ 有相同的零，有相同的极点及相同的周期 $2w, 2w'$ 的函数. 因此任一椭圆函数 $f(z)$ 可以表成为

$$f(z)=A\prod_{r=1}^{n}\frac{\vartheta_1(\pi(z-\alpha_r)/2w\,|\,\tau)}{\vartheta_1(\pi(z-\beta_r)/2w\,|\,\tau)}.$$

这样的表示法比上章所述的 σ 函数表示法的优点在于：(i) ϑ 函数的表达式的收敛速度较快，便于数值计算；(ii) 在应用椭圆函数处理应用数学上的问题的时候，实周期往往特别重要，而 ϑ 函数对实周期的性质显示得特别简明.

再则，如果 $f(z)$ 在极点 β_r 处的主要部分是

$$\sum_{m=1}^{m_r}A_{m,r}(z-\beta_r)^{-m},$$

则

$$f(z)=A+\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{m_r}\frac{(-1)^{m-1}A_{m,r}}{(m-1)!}\frac{d^m}{dz^m}\log\vartheta_1\left(\frac{\pi(z-\beta_r)}{2w}\middle|\tau\right)\right\}.$$

最后证明

$$\sigma(z)=\frac{2w}{\pi}\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}\right)\cdot\frac{1}{2}q^{-\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}\middle|\tau\right). \tag{1}$$

先比较

$$\sigma(z)\ \text{与}\ f(z)=\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}\right)\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}\middle|\tau\right).$$

首先它们有相同的零点.

$$2mw+2m'w',\quad m, m'\ \text{是整数}.$$

其次

$$f(z+2w)=\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}+2\eta(z+w)\right)$$

$$\cdot\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}+\pi\middle|\tau\right)=-e^{2\eta(z+w)}f(z).$$

最后

$$f(z+2w')=\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}+2\tau\eta(z+w')\right)$$

$$\cdot\vartheta\left(\frac{\pi z}{2w}+\pi\tau\middle|\tau\right)=-e^{2\tau\eta(z+w')}\exp\left(\frac{\eta z^2}{2w}\right)\cdot q^{-1}$$

$$\cdot e^{-i\pi z/w}\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}\middle|\tau\right)=-e^{2\eta'(z+w')}f(z).$$

这儿用了 $\eta w'-\eta' w=\frac{1}{2}\pi i$，即 $\eta\tau-\frac{1}{2}(\pi i/w)=\eta'$，因此 $\sigma(z)/f(z)$ 是一无零点的椭圆函数．它是一常数 C．决定这个常数可以利用

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}=1,$$

及

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2w}\middle|\tau\right)}{z}=\frac{\pi}{2w}\cdot 2Gq^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2$$

$$=\frac{\pi}{2w}\cdot 2q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3,$$

即得所求证的公式．

公式(1)中的 η 也可以用 ϑ 函数表出，取(1)的对数并且两次微分，得

$$-\gamma(z)=\frac{\eta}{w}-\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2\csc^2\left(\frac{\pi z}{2w}\right)+\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2\left[\frac{\phi''(v)}{\phi(v)}-\left\{\frac{\phi'(v)}{\phi(v)}\right\}^2\right]$$

这儿 $v=\frac{1}{2}\pi z/w$，而 $\phi(z)=\vartheta_1(z)/\sin z$．

展为 z 的升幂，并且比较 z 的系数得

$$0=\frac{\eta}{w}-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2w}\right)^2\frac{\phi''(0)}{\phi(0)},$$

因此

$$\eta=-\frac{\pi^2}{16w}\frac{\vartheta_1''}{\vartheta_1'}.$$

最后得

$$\sigma(z)=\frac{2w}{\pi\vartheta_1'}\exp\left(-\frac{v^2\vartheta_1'''}{6\vartheta_1'}\right)\vartheta_1(v|\tau).$$

这儿 $v=\frac{1}{2}\pi z/w$．

习题．求证

$$\eta'=-\left(\frac{\pi^2 w'\vartheta_1'''}{12w^2 w_1'}+\frac{\pi i}{2w'}\right).$$

§5. 诸 ϑ 函数的平方的关系式

定理 1.

$$\vartheta_1^2(z)\vartheta_3^2 = \vartheta_4^2(z)\vartheta_2^2 - \vartheta_2^2(z)\vartheta_4^2, \tag{1}$$

$$\vartheta_1^2(z)\vartheta_2^2 = \vartheta_4^2(z)\vartheta_3^2 - \vartheta_3^2(z)\vartheta_4^2, \tag{2}$$

$$\vartheta_1^2(z)\vartheta_4^2 = \vartheta_3^2(z)\vartheta_2^2 - \vartheta_2^2(z)\vartheta_3^2, \tag{3}$$

$$\vartheta_4^2(z)\vartheta_4^2 = \vartheta_3^2(z)\vartheta_3^2 - \vartheta_2^2(z)\vartheta_2^2. \tag{4}$$

证. $\vartheta_1^2(z), \vartheta_2^2(z), \vartheta_3^2(z), \vartheta_4^2(z)$ 都是以 1, $q^{-2}e^{-4iz}$ 为乘子,以 $\pi, \pi\tau$ 为周期的函数,因此即所有的 a, b, a', b'

$$\frac{a\vartheta_1^2(z) + b\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_2^2(z)}, \quad \frac{a'\vartheta_1^2(z) + b'\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_3^2(z)}$$

都是以 $\pi, \pi\tau$ 为周期的椭圆函数. 一般讲来,它有一个二重极点,但可以取 a, b, a', b' 使分子以此点为零点. 即能选得 a, b, a', b' 使上式仅有一单零点. 因此它是一常数. 因此有以下的关系式存在

$$\vartheta_2^2(z) = a\vartheta_1^2(z) + b\vartheta_4^2(z),$$

$$\vartheta_3^2(z) = a'\vartheta_1^2(z) + b'\vartheta_4^2(z).$$

取 $z = \frac{1}{2}\pi\tau$ 及 0, 并利用

$$\vartheta_2\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right) = q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3, \quad \vartheta_4\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right) = 0,$$

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right) = iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4,$$

可以算出

$$\vartheta_3^2 = -a\vartheta_4^2, \quad \vartheta_2^2 = b\vartheta_4^2, \quad \vartheta_2^2 = a'\vartheta_4^2, \quad \vartheta_3^2 = b'\vartheta_4^2.$$

即得出 (1), (2).

再以 $z + \frac{1}{2}\pi$ 代 z, 则得 (3), (4).

在 (4) 中取 $z = 0$, 则得

$$\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4 = \vartheta_3^4.$$

把它写成级数形式有

$$16q(1 + q^{1\cdot 2} + q^{2\cdot 3} + q^{3\cdot 4} + \cdots)^4 + (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots)^4 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9)^4. \tag{5}$$

把它写成为乘积形式

$$\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n-1})\right\}^8 + 16q\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1 + q^{2n})\right\}^8 = \left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1 + q^{2n-1})\right\}^8. \tag{6}$$

习题. 求证

$$\vartheta_1^4(z) + \vartheta_3^4(z) = \vartheta_2^4(z) + \vartheta_4^4(z). \tag{7}$$

§6. 和差公式

现在推导出一批包有 $\vartheta_k(x+y)$ 与 $\vartheta_k(x-y)$ 的公式,其证明技巧与 §5 大同小异.

例如,我们要找一表 $\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)$ 的公式,固定 x,这作为 y 的函数

$$D_{11}(y) = \vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y).$$

由 §1(8) 可知

$$\begin{aligned} D_{11}(y+\pi) &= \vartheta_1(x+y+\pi)\vartheta_1(x-y-\pi) \\ &= \vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y) = \vartheta_{11}(y), \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} D_{11}(y+\pi\tau) &= \vartheta_1(x+y+\pi\tau)\vartheta_1(x-y-\pi\tau) \\ &= -q^{-1}e^{-2i(x+y)}\vartheta_1(x+y)\cdot(-q^{-1})e^{2i(x+y)}\vartheta_1(x-y) \\ &= q^{-2}e^{-4iy}D_{11}(y). \end{aligned}$$

这是以 1, $q^{-2}e^{-4iy}$ 为乘子, π, $\pi\tau$ 为周期的函数.

这和

$$A\vartheta_1^2(y) + B\vartheta_2^2(y) \tag{1}$$

有同样的变化公式. 因此

$$\frac{A\vartheta_1^2(y) + B\vartheta_2^2(y)}{\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)}$$

是一个椭圆函数. $D_{11}(y)$ 有两个单零点 $y=x$, $y=-x$. 如果取 $A=\vartheta_2^2(x)$, $B=-\vartheta_1^2(x)$, 则分子有零点 $y=x$. 因此, 这椭圆函数最多只能有一单极点 $y=-x$, 因而它是一常数,即得关系式

$$\vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y) = C\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y).$$

这儿 C 是一个可能与 x 有关,但与 y 无关的数. 取 $y=0$, 得

$$-\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2 = C\vartheta_1^2(x), \quad C = -\vartheta_2^2,$$

因此得出公式

$$\vartheta_2^2\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y) = \vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y). \tag{2}$$

利用上节定理 1 的结果可以将 $\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y)$ 表为其它 ϑ 函数的平方. 例如, 用

$$\vartheta_4^2\vartheta_1^2(z) + \vartheta_3^2\vartheta_2^2(z) = \vartheta_2^2\vartheta_3^2(z).$$

由 (2) 可知

$$\begin{aligned} \vartheta_4^2\vartheta_2^2\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y) &= \vartheta_2^2(y)(\vartheta_2^2\vartheta_3^2(x) - \vartheta_3^2\vartheta_2^2(x)) \\ &\quad - \vartheta_2^2(x)(\vartheta_2^2\vartheta_3^2(y) - \vartheta_3^2\vartheta_2^2(y)) = \vartheta_2^2\vartheta_2^2(y)\vartheta_3^2(x) - \vartheta_2^2\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y), \end{aligned}$$

即得

$$\vartheta_4^2\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y) = \vartheta_2^2(y)\vartheta_3^2(x) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y). \tag{3}$$

当然这也可以用证明 (2) 的方法直接证明 (3) 式.

总之可得

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y) &= \vartheta_2^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\ &= \vartheta_2^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(y)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(y)) \\
&= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y)).
\end{aligned}
$$

由 $\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=\vartheta_2(z)$, $\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_4(z)$ 等公式可以推得以下的三组公式:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_1(x+y)\vartheta_2(x-y) &= \vartheta_2^{-1}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_2^{-1}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y)) \\
&= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(y)) \\
&= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(y)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_3(x+y)\vartheta_3(x-y) &= \vartheta_2^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_2^{-2}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(y)) \\
&= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y)) \\
&= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_4(x+y)\vartheta_4(x-y) &= \vartheta_2^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_2^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(y)) \\
&= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_3^{-2}(\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(y) - \vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(y)) \\
&= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y)) \\
&= \vartheta_4^{-2}(\vartheta_3^2(x)\vartheta_3^2(y) - \vartheta_2^2(x)\vartheta_2^2(y)).
\end{aligned}
$$

再考虑 $D_{ij}(y)=\vartheta_i(x+y)\vartheta_j(x-y)$ 也可得出一批公式. 例如, 命 $D_{14}(y)=\vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y)$, 则

$$
\begin{aligned}
D_{14}(y+\pi) &= -D_{14}(y), \\
D_{14}(y+\pi\tau) &= q^{-2}e^{-4iy}D_{14}(y).
\end{aligned}
$$

因而推出

$$
\frac{A\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)+B\vartheta_1(y)\vartheta_4(y)}{\vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y)}
$$

是一以 y 为变数,以 π, $\pi\tau$ 为周期的椭圆函数. 分母当 $x+y=0$, $x-y=\frac{1}{2}\pi\tau$ 有两个单零点,取 $A=\vartheta_1(x)\vartheta_4(x)$ 及 $B=\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)$, 可使分子在 $y=-x$ 处有一零点. 因此得出

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x)+\vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_4(y) \\
&\qquad = C\vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y).
\end{aligned}
$$

命 $y=0$ 可以断定 $C=\vartheta_2\vartheta_3$, 因而有一个恒等式. 现在把同样的一些公式列在下面:

$$
\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_1(x+y)\vartheta_2(x-y)=\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_4(y)+\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(x)\vartheta_4(x),
$$

$$\vartheta_2\vartheta_4\vartheta_1(x+y)\vartheta_3(x-y)=\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(x)\vartheta_4(y)+\vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x),$$
$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y)=\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x)+\vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_4(y),$$
$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_2(x+y)\vartheta_3(x-y)=\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)-\vartheta_1(x)\vartheta_4(x)\vartheta_1(y)\vartheta_4(y),$$
$$\vartheta_2\vartheta_4\vartheta_2(x+y)\vartheta_4(x-y)=\vartheta_2(x)\vartheta_4(x)\vartheta_2(y)\vartheta_4(y)-\vartheta_1(x)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_3(y),$$
$$\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_3(x+y)\vartheta_4(x-y)=\vartheta_3(x)\vartheta_4(x)\vartheta_3(y)\vartheta_4(y)-\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_2(y).$$

从此不难推出加倍公式

$$\vartheta_2^3\vartheta_2(2x)=\vartheta_2^4(x)-\vartheta_1^4(x)=\vartheta_3^4(x)-\vartheta_4^4(x),$$
$$\vartheta_3^3\vartheta_3(2x)=\vartheta_1^4(x)+\vartheta_3^4(x)=\vartheta_2^4(x)+\vartheta_4^4(x),$$
$$\vartheta_4^3\vartheta_4(2x)=\vartheta_4^4(x)-\vartheta_1^4(x)=\vartheta_3^4(x)-\vartheta_2^4(x),$$
$$\vartheta_3^2\vartheta_2\vartheta_2(2x)=\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(x)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(x),$$
$$\vartheta_4^2\vartheta_2\vartheta_2(2x)=\vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(x)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(x),$$
$$\vartheta_2^2\vartheta_3\vartheta_3(2x)=\vartheta_2^2(x)\vartheta_3^2(x)+\vartheta_1^2(x)\vartheta_4^2(x),$$
$$\vartheta_4^2\vartheta_3\vartheta_3(2x)=\vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(x)-\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(x),$$
$$\vartheta_2^2\vartheta_4\vartheta_4(2x)=\vartheta_1^2(x)\vartheta_3^2(x)+\vartheta_2^2(x)\vartheta_4^2(x),$$
$$\vartheta_3^2\vartheta_4\vartheta_4(2x)=\vartheta_1^2(x)\vartheta_2^2(x)+\vartheta_3^2(x)\vartheta_4^2(x).$$

§7. ϑ函数的商所适合的微分方程

函数

$$\vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$$

是以 -1, $+1$ 为乘子，π, $\pi\tau$ 为周期的函数，因此它的微商

$$\{\vartheta_1'(z)\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\vartheta_1(z)\}/\vartheta_4^2(z)$$

也有此性质．又函数

$$\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)/\vartheta_4^2(z)$$

也是以 -1, 1 为乘子，π, $\pi\tau$ 为周期的函数，因此

$$\phi(z)=\frac{\vartheta_1'(z)\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\vartheta_1(z)}{\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}$$

是一以 π, $\pi\tau$ 为周期的函数，当且仅当

$$z=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$$

及其相合点时，$\phi(z)$ 才可能有极点(单)．

现在考虑 $\phi\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)$，由§1 习题 2 可知

$$\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_4(z),$$

$$\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_1(z),$$

$$\vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_3(z),$$

$$\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_2(z),$$

因此

$$\phi\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=\frac{\{-\vartheta_4'(z)\vartheta_1(z)+\vartheta_1'(z)\vartheta_4(z)\}}{\vartheta_3(z)\vartheta_2(z)}=\phi(z).$$

即 $\phi(z)$ 是以 π 从 $\frac{1}{2}\pi\tau$ 为周期的椭圆函数，而在基域内只有一单极点 $\frac{1}{2}\pi$，因此它是一常数。命 $z\to 0$，定出这常数是

$$\vartheta_1'\vartheta_4/\vartheta_2\vartheta_3=\vartheta_4^2.$$

因此得出重要的微分方程

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\right\}=\vartheta_4^2\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}. \tag{1}$$

命 $\xi=\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$，由 § 5(1)，(2) 可得

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2=(\vartheta_2^2-\xi^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2-\xi^2\vartheta_2^2). \tag{2}$$

这微分方程有一特解 $\vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$，其通解是 $\pm\vartheta_1(z+2)/\vartheta_4(z+2)$。

与(1)相仿，我们还有

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}\right\}=-\vartheta_3^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}\right)=-\vartheta_2^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}. \tag{4}$$

§ 8. Jacobi 的椭圆函数

Jacobi 的三个重要的椭圆函数可以用 ϑ 函数来定义如下：

$$\mathrm{sn}\,u=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})}, \tag{1}$$

$$\mathrm{cn}\,u=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})}, \tag{2}$$

$$\mathrm{dn}\,u=\frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})}. \tag{3}$$

由 § 5 定理 1 可知

$$\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{cn}^2 u=1, \tag{4}$$

$$k^2\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{dn}^2 u=1, \tag{5}$$

这儿

$$k^{\frac{1}{2}}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}. \tag{6}$$

由(2)，(3)，(4)可得

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du}=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \tag{7}$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{du}=-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \tag{8}$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}\,u}{du}=-k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u. \tag{9}$$

再由 (4),(5) 可知 $y=\mathrm{sn}\,u$ 适合于微分方程

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2), \tag{10}$$

同样 $y=\mathrm{cn}\,u$ 适合于

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(k'^2+k^2\mathrm{cn}^2\,u), \tag{11}$$

这儿

$$k'^2=1-k^2. \tag{12}$$

$y=\mathrm{dn}\,u$ 适合于

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(y^2-k'^2). \tag{13}$$

由 (6) 所定义的 k 称为椭圆函数 sn 的模. 有时为了明确起见,以 $\mathrm{sn}(u,k)$ 表示 $\mathrm{sn}\,u$. 由 (12) 所定义的 k' 称为补模,但由 (12) 不能唯一决定 k'. 我们的 k' 的确切定义是

$$k'^{\frac{1}{2}}=\vartheta_4/\vartheta_3. \tag{14}$$

由关系式 $\vartheta_2^4+\vartheta_4^4=\vartheta_3^4$ 显然可见 (12) 式成立.

§9. 周 期 性

由 §1 习题 2 的公式可知

$$\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=\vartheta_2(z),\qquad \vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_4(z),$$

$$\vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=-\vartheta_1(z),\qquad \vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_3(z),$$

$$\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=\vartheta_4(z),\qquad \vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_2(z),$$

$$\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=\vartheta_3(z),\qquad \vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_1(z).$$

由此推得: 命 $\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2=K$ 及 $-\frac{1}{2}i\pi\tau\vartheta_3^2=K'$,

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,(u+K)&=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(u\vartheta_3^{-2}+\frac{1}{2}\pi\right)}{\vartheta_4\left(u\vartheta_3^{-2}+\frac{1}{2}\pi\right)}\\&=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_3(u\vartheta_3^{-2})}=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\end{aligned} \tag{1}$$

及

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,(u+iK')&=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1\left(u\vartheta_3^{-2}+\frac{1}{2}\pi\tau\right)}{\vartheta_4\left(u\vartheta_3^{-2}+\frac{1}{2}\pi\tau\right)}\\&=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_4(u\vartheta_2^{-2})}{\vartheta_1(u\vartheta_3^{-2})}=\frac{1}{k\mathrm{sn}\,u}.\end{aligned} \tag{2}$$

仿此证得

$$\operatorname{cn}(u+K)=-k\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u},\ \operatorname{cn}(u+iK')=-\frac{i}{k}\frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u},\tag{3}$$

$$\operatorname{dn}(u+K)=k'\frac{1}{\operatorname{dn}u},\quad \operatorname{dn}(u+\ K')=-i\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}.\tag{4}$$

由此推得

$$\operatorname{sn}(u+2K)=-\operatorname{sn}u,\quad \operatorname{sn}(u+2iK')=\operatorname{sn}u,\tag{5}$$

$$\operatorname{cn}(u+2K)=-\operatorname{cn}u,\quad \operatorname{cn}(u+2iK')=-\operatorname{cn}u,\tag{6}$$

$$\operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn}u,\quad \operatorname{dn}(u+2iK')=-\operatorname{dn}u.\tag{7}$$

因而得出周期性

$$\operatorname{sn}(u+4K)=\operatorname{sn}(u+2iK')=\operatorname{sn}u,\tag{8}$$

$$\operatorname{cn}(u+4K)=\operatorname{cn}(u+2iK')=\operatorname{cn}u,\tag{9}$$

$$\operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn}(u+4iK')=\operatorname{dn}u.\tag{10}$$

由于 $\vartheta_1(0)=0$, $\vartheta_4(0)\neq 0$,由(1)可知 $\operatorname{sn}0=0$. 又由(2),(3)可知 $\operatorname{cn}0=\operatorname{dn}0=1$. 由(1)可知

$$\operatorname{sn}K=1,\ \operatorname{cn}K=0,\ \operatorname{dn}K=k',\tag{11}$$

并有

$$\operatorname{sn}K'=\infty,\ \operatorname{cn}K'=\infty,\ \operatorname{dn}K'=\infty,\tag{12}$$

§10. 解析性质

由于 $\vartheta_1(z)$ 的零点是 $m\pi+n\tau\pi$ (m, n 是整数),所以 $\operatorname{sn}u$ 有 $(m\pi+n\tau\pi)\vartheta_3^2=2mK+2niK'$ 为其零点. $\operatorname{sn}u$ 是以 $4K$, $2iK'$ 为周期的函数,因此在基域内有两个零点

$$u=0,\ 2K.$$

又由于 $\vartheta_4(z)$ 的零点是 $\frac{1}{2}\pi\tau+m\pi+n\tau\pi$ (m, n 是整数),因此 $\operatorname{sn}u$ 有 $iK'+2mK+2niK'$ 为其极点,即在基域内有两个极点

$$iK',\ 2K+iK'.$$

由于 $\operatorname{sn}u$ 是奇函数及

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn}u=\operatorname{cn}u\ \operatorname{dn}u,$$

$$\frac{d^3}{du^3}\operatorname{sn}u=4k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u-\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u(\operatorname{dn}^2u+k^2\operatorname{cn}^2u),$$

可知

$$\operatorname{sn}u=u-\frac{1}{6}(1+k^2)u^3+O(|u|^5),\quad (u\to 0)$$

同法

$$\operatorname{cn}u=1-\frac{1}{2}u^2+O(|u|^4),$$

$$\operatorname{dn}u=1-\frac{1}{2}k^2u^2+O(|u|^4).$$

因此可得

$$\operatorname{sn}(u+iK)=\frac{1}{k\operatorname{sn}u}=\frac{1}{ku}\left(1-\frac{1}{6}(1+k^2)u^2+O(|u|^4)\right)^{-1}$$
$$=\frac{1}{ku}+\frac{1+k^2}{6k}u+O(|u|^3),$$

同法

$$\operatorname{cn}(u+iK')=\frac{-i}{ku}+\frac{2k^2-1}{6k}ui+O(|u|^3),$$
$$\operatorname{dn}(u+iK')=-\frac{i}{u}+\frac{2-k^2}{6}iu+O(|u|^3).$$

因此 $\operatorname{sn}u$ 以 iK' 为极点其留数等于 k^{-1}. 由于两极点的留数之和为零,因此得出结论:

$\operatorname{sn}u$ 以 $4K$, $2iK'$ 为周期,除去

$$z\equiv iK',\ 2K+iK'\pmod{4K,\ 2iK'}$$

诸单极点外, $\operatorname{sn}u$ 处处解析. 在这两组极点的留数各为 k^{-1} 与 $-k^{-1}$.

同法, $\operatorname{cn}u$ 是以 $4K$, $2K+2iK'$ 为周期的函数,除去

$$z\equiv iK',\ 2K+iK\pmod{4K,\ 2K+2iK'}$$

诸单极点外, 无处不解析. 在这两组极点的留数各为 $-ik^{-1}$ 与 ik^{-1}, 并且以 $K\pmod{2K,\ 2iK'}$ 诸点为零点.

又 $\operatorname{dn}u$ 是以 $2K$, $4iK$ 为周期的函数,除去

$$z\equiv iK',\ 3iK'\pmod{2K,\ 4iK'}$$

诸单极点外无处不解析. 在这两组极点的留数各为 $-i$, i, 且在 $\equiv K+iK'\pmod{2K,\ 2iK'}$ 处有单零点.

§11. Weierstrass 函数与 Jacobi 函数之间的关系

命 e_1, e_2, e_3 是三个数, $e_1+e_2+e_3=0$, 则变化

$$y=e_3+\frac{e_1-e_3}{\operatorname{sn}^2(\lambda u,k)}$$

适合于

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=4(e_1-e_3)^2\lambda^2\frac{1}{\operatorname{sn}^2\lambda u}\frac{\operatorname{cn}^2\lambda u}{\operatorname{sn}^2\lambda u}\frac{\operatorname{dn}^2\lambda u}{\operatorname{sn}^2\lambda u}$$
$$=4(e_1-e_3)^2\lambda^2\frac{1}{\operatorname{sn}^2\lambda u}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2\lambda u}-1\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2\lambda u}-k^2\right)$$
$$=4\lambda^2(e_1-e_3)^{-1}(y-e_3)(y-e_1)\{y-k^2(e_1-e_3)-e_3\}.$$

取 $\lambda^2=e_1-e_3$ 及 $k^2=(e_2-e_3)/(e_1-e_3)$, 因此

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=4y^3-g_2y-g_3.$$

因此

$$e_3+(e_1-e_3)/\operatorname{sn}^2\left\{u(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}\right\}=\wp(u+\alpha;\ g_2,g_3).$$

这儿 α 是一常数，命 $u \to 0$，可见 α 就是一周期. 因此得出关系式：

$$\wp(u; g_2, g_3) = e_3 + (e_1 - e_3)/\mathrm{sn}^2\{u(e_1 - e_2)^{\frac{1}{2}}\},$$

这 Jacobi 函数的模等于

$$k^2 = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3).$$

§12. 加 法 公 式

定理 1.

$$\mathrm{sn}\,(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$\mathrm{cn}\,(u+v) = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v},$$

$$\mathrm{dn}\,(u+v) = \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

证. 在 §6 中有公式

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(x+y)\vartheta_4(x-y) = \vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x) + \vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_4(y),$$

$$\vartheta_4^2\vartheta_4(x+y)\vartheta_4(x-y) = \vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y).$$

其商是

$$\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{\vartheta_4^2}\,\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta_4(x+y)} = \frac{\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(x) + \vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta_4(y)}{\vartheta_4^2(x)\vartheta_4^2(y) - \vartheta_1^2(x)\vartheta_1^2(y)}$$

$$= \frac{\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}\,\dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta_4(y)}\,\dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta_4(y)} + \dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta_4(y)}\,\dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_4(x)}\,\dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_4(x)}}{1 - \left(\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_4(x)}\right)^2\left(\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta_4(y)}\right)^2}.$$

命 $x = \vartheta_3^{-2}u$，$y = \vartheta_3^{-2}v$. 由 sn, cn, dn 的定义可知

$$\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_4^2}\,\mathrm{sn}\,(u+v) = \frac{\dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta_4^2}(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v - \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)}{1 - \dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}.$$

因此得出定理 1.

同法可证其它二式.

§13. 把 K, K' 表为 k, k' 的函数

假定 τ 是纯虚数，则 $q = e^{\pi i\tau}$，$0 < q < 1$. 又

$$k^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3},\quad k'^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3},\quad (k^2 + k'^2 = 1)$$

是实数，而且 $k^2 + k'^2 = \dfrac{\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4}{\vartheta_3^4} = 1$，可知 $0 < k < 1$，$0 < k' < 1$. 并由

$$K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2,\quad K' = -\frac{1}{2}i\pi\tau\vartheta_3^2$$

也可知它们是正数.

由 §8(10) 立刻推出 $y=\operatorname{sn} u$ 是

$$u=\int_0^y(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{\frac{1}{2}}dt \tag{1}$$

的反函数. 由 $\operatorname{sn} K=1$, 可以推出

$$K\equiv\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt \quad (\operatorname{mod} 4K,\ 2iK') \tag{2}$$

假定这积分路线是由 0 沿实轴到 1, 则可知仅能有

$$(1+4m)K=\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

这儿 m 是一整数,右边是正的, 所以 m 不能为负. 如果 $m\neq 0$, 则由积分的递增性, 必有一 α 使

$$K=\int_0^\alpha(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

即 $\alpha=\operatorname{su} K<1$, 这是不可能的,因此证明了

$$K=\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{3}$$

再在 §9 中取 $u=K$, 则得

$$\operatorname{su}(K+iK')=\frac{1}{k}.$$

因此

$$K+iK'\equiv\int_0^{\frac{1}{k}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt \quad (\operatorname{mod} 4K,\ 2iK').$$

由 (3) 可知

$$iK'\equiv i\int_1^{\frac{1}{k}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt \quad (\operatorname{mod} 4K,\ 2iK').$$

同法可证

$$K'=\int_1^{\frac{1}{k}}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{4}$$

换变数

$$t=(1-k'^2s^2)^{-\frac{1}{2}},$$

由

$$t^2-1=\frac{k'^2s^2}{1-k'^2s^2},\quad 1-k^2t^2=\frac{k'^2(1-s^2)}{1-k'^2s^2},$$
$$dt=(1-k'^2s^2)^{-\frac{3}{2}}k'^2s\,ds,$$

可知

$$K'=\int_0^1(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k'^2s^2)^{-\frac{1}{2}}ds.$$

当 $|k|<1$ 时, $(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}$ 可以展开为对 k^2 一致收敛的幂级数,因此

$$K=\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}k^{2n}t^{2n}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) n!} k^{2n} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{n-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!}\right)^2 k^{2n}.$$

如果把 $k^2 = c$ 作为复变数看，则在单位圆 $|c| < 1$ 内，K 是 $k^2 = c$ 的解析函数．我们可以证明，这函数可以解析拓展到全 c 平面上，而且如果由 1 到 ∞ 作一切口，则 K 是 c 的单值函数．

§ 14. Jacobi 椭圆函数的一些表达式

由 ϑ 函数的结果立刻推出以下的无穷乘积表达式：命 $u = 2Kx/\pi$，

$$\operatorname{sn} u = 2q^{\frac{1}{4}} k^{-\frac{1}{2}} \sin x \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x + q^{4n-2}}\right], \tag{1}$$

$$\operatorname{cn} u = 2q^{\frac{1}{4}} k'^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \cos x \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1+2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x + q^{4n-2}}\right\}, \tag{2}$$

$$\operatorname{dn} u = k'^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2x + q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x + q^{4n-2}}\right\}. \tag{3}$$

又将 $\operatorname{sn} u$ 作为 x 的函数来看它以 2π 为周期的奇函数，因此有 Fourier 展开式

$$\operatorname{sn} u = \prod_{n=1}^{\infty} bn \sin nx,$$

这儿

$$bn = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sn} u \sin nx dx = \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sn} u e^{inx} dx.$$

作绕以 $-\pi, \pi, \pi\tau, -2\pi+\pi\tau$ 为顶点的平行四边形的围道积分

$$\int \operatorname{sn} u e^{inx} dx.$$

由于 $\operatorname{sn} u e^{inx}$ 的周期性，$\int_{\pi}^{\pi\tau}$ 与 $\int_{-2\pi+\pi\tau}^{-\pi}$ 对消． 在积分区域内仅有二极点 $-\pi + \frac{1}{2}\pi\tau$，$\frac{1}{2}\pi\tau$． 其留数各为

$$-k^{-1}\left(\frac{\pi}{2K}\right)\exp\left(-ni\pi + \frac{1}{2} n\pi i\tau\right),$$

$$k^{-1}\left(\frac{\pi}{2K}\right)\exp\left(\frac{1}{2} n\pi i\tau\right).$$

因此得出

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} - \int_{-2\pi+\pi\tau}^{\pi\tau}\right) \operatorname{sn} u e^{nix} dx = \frac{\pi^2 i}{Kk} q^{\frac{1}{2}n}\{1-(-1)^n\}.$$

在第二积分中 x 换成 $x - \pi + \pi\tau$，则得

$$\{1+(-1)^n q^n\} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sn} u e^{nix} dx = \frac{\pi^2 i}{Kk} q^{\frac{1}{2}n}\{1-(-1)^n\}.$$

因此得出 $bn=0$. 当 n 是偶数,又当 n 是奇数时,有

$$bn=\frac{2\pi}{Kk}\frac{q^{\frac{1}{2}n}}{1-q^n}.$$

由此推出

$$\operatorname{sn} u=\frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}\sin(2n+1)x}{1-q^{2n+1}}. \tag{4}$$

当 x 是实数时, 由于当 $n\to\infty$ 时, $q^{\frac{1}{2}n}e^{nix}$, $q^{\frac{1}{2}n}e^{-nix}$ 都 $\to 0$, 不难证明, 此式在长条 $|\vartheta x|<\frac{1}{2}\pi\vartheta\tau$ 中仍成立.

读者自证: 当 $|\vartheta x|<\frac{1}{2}\pi\vartheta\tau$ 时有

$$\operatorname{cn} u=\frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}\cos(2n+1)x}{1+q^{2n+1}}, \tag{5}$$

$$\operatorname{dn} u=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos 2nx}{1+q^{2n}}. \tag{6}$$

§ 15. 附　　记

我们并未象上章那样考虑椭圆函数 $\operatorname{sn}(u,k)$ 的反问题,即给了 $c=k^2$, 我们有没有一个 τ, 能使

$$c=\frac{\vartheta_2^4(o/\tau)}{\vartheta_3^4(o/\tau)}.$$

这问题的回答也是和上章一样,要用模函数论方法,我们不在此赘述了。

公式汇编 (Jacobi)

I

$$\vartheta_1(z,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z. \tag{1}$$

$$\vartheta_2(z,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z. \tag{2}$$

$$\vartheta_3(z,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2nz. \tag{3}$$

$$\vartheta_4(z,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz. \tag{4}$$

$$\vartheta_1(z,q)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\sin z\pi\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}). \tag{5}$$

$$\vartheta_2(z,q)=2q_0q^{\frac{1}{4}}\cos z\pi\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}). \tag{6}$$

$$\vartheta_3(z, q) = q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}). \quad (7)$$

$$\vartheta_4(z, q) = q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}). \quad (8)$$

$$q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}).$$

II

零点 (mod π, $\tau\pi$)

ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
0	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1+\tau}{2}\pi$	$\frac{\tau}{2}\pi$

(1)

$$\vartheta_1(-z) = -\vartheta_1(z), \ \vartheta_{\nu+1}(-z) = \vartheta_{\nu+1}(z), \qquad \nu = 1, 2, 3. \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta_1(z+\pi) = -\vartheta_1(z), \ \vartheta_2(z+\pi) = -\vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z+\pi) = \vartheta_3(z), \quad \vartheta_4(z+\pi) = \vartheta_4(z).\end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_2(z), \quad \vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = -\vartheta_1(z), \\ \vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_4(z), \quad \vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_3(z).\end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta_1(z+\tau\pi) = -A\vartheta_1(z), \ \vartheta_2(z+\tau\pi) = A\vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z+\tau\pi) = A\vartheta_3(z), \quad \vartheta_4(z+\tau\pi) = -A\vartheta_4(z).\end{array}\right\} \quad (5)$$

$$A = q^{-1}e^{-2iz}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta_1\left(z+\frac{\tau}{2}\pi\right) = iB\vartheta_4(z), \quad \vartheta_2\left(z+\frac{\tau}{2}\pi\right) = B\vartheta_3(z), \\ \vartheta_3\left(z+\frac{\tau}{2}\pi\right) = B\vartheta_2(z), \quad \vartheta_4\left(z+\frac{\tau}{2}\pi\right) = iB\vartheta_1(z).\end{array}\right\} \quad (6)$$

$$B = q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}.$$

III

$$\vartheta_1' = \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4. \quad (1)$$

$$\vartheta_2^4 + \vartheta_4^4 = \vartheta_3^4. \quad (2)$$

IV

$$k^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}. \quad (1)$$

$$k'^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}. \quad (2)$$

$$k^2 + k'^2 = 1. \quad (3)$$

$$K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2. \tag{4}$$

$$K' = -\frac{1}{2}i\pi\tau\vartheta_3^2. \tag{5}$$

$$K = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{6}$$

$$K' = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{7}$$

V

$$\operatorname{sn} u = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} = -\operatorname{sn}(-u). \tag{1}$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} = \operatorname{cn}(-u). \tag{2}$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})} = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} = \operatorname{dn}(-u). \tag{3}$$

$$q = e^{\pi i\tau} = \exp(-\pi K'/K). \tag{4}$$

VI

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1. \tag{1}$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2\operatorname{sn}^2 u = 1. \tag{2}$$

VII

$$\operatorname{sn}' u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u. \tag{1}$$

$$\operatorname{cn}' u = -\sin u \operatorname{dn} u. \tag{2}$$

$$\operatorname{dn}' u = -k^2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \tag{3}$$

$$\operatorname{sn}'^2 u = (1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u). \tag{4}$$

$$\operatorname{cn}'^2 u = (1-\operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2\operatorname{cn}^2 u). \tag{5}$$

$$\operatorname{dn}'^2 u = (1-\operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u - k'^2). \tag{6}$$

VIII

$$\gamma(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_2}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_2})}. \tag{1}$$

$$\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1 - e_2}) = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\gamma(u) - e_3}}. \tag{2}$$

$$\text{cn}\,(u\sqrt{e_1 - e_2}) = \frac{\sqrt{\gamma(u) - e_1}}{\sqrt{\gamma(u) - e_2}}. \tag{3}$$

$$\text{dn}\,(u\sqrt{e_1 - e_2}) = \frac{\sqrt{\gamma(u) - e_3}}{\sqrt{\gamma(u) - e_2}}. \tag{4}$$

IX

$$\text{sn}\,(u + K) = \frac{\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}. \tag{1}$$

$$\text{cn}\,(u + K) = -k'\,\frac{\text{sn}\,u}{\text{dn}\,u}. \tag{2}$$

$$\text{dn}\,(u + K) = k'\,\frac{1}{\text{dn}\,u}. \tag{3}$$

$$\text{sn}\,(u + iK') = \frac{1}{k}\,\frac{1}{\text{sn}\,u}. \tag{4}$$

$$\text{cn}\,(u + iK') = -\frac{i}{k}\,\frac{\text{dn}\,u}{\text{sn}\,u}. \tag{5}$$

$$\text{dn}\,(u + iK') = -i\,\frac{\text{cn}\,u}{\text{sn}\,u}. \tag{6}$$

$$\text{sn}\,(u + K + iK') = \frac{1}{k}\,\frac{\text{dn}\,u}{\text{cn}\,u}. \tag{7}$$

$$\text{cn}\,(u + K + iK') = -i\,\frac{k'}{k}\,\frac{1}{\text{cn}\,u}. \tag{8}$$

$$\text{dn}\,(u + K + iK') = ik'\,\frac{\text{sn}\,u}{\text{cn}\,u}. \tag{9}$$

$$\text{sn}\,(u + 2K) = -\text{sn}\,u. \tag{10}$$

$$\text{cn}\,(u + 2K) = -\text{cn}\,u. \tag{11}$$

$$\text{dn}\,(u + 2K) = \text{dn}\,u. \tag{12}$$

$$\text{sn}\,(u + 2iK') = \text{sn}\,u. \tag{13}$$

$$\text{cn}\,(u + 2iK') = -\text{cn}\,u. \tag{14}$$

$$\text{dn}\,(u + 2iK') = -\text{dn}\,u. \tag{15}$$

$$\text{sn}\,(u + 2K + 2iK') = -\text{sn}\,u. \tag{16}$$

$$\text{cn}\,(u + 2K + 2iK) = \text{cn}\,u. \tag{17}$$

$$\text{dn}\,(u + 2K + 2iK) = -\text{dn}\,u. \tag{18}$$

X

$$\text{sn}\,(u + v) = \frac{\text{sn}\,u\,\text{cn}\,v\,\text{dn}\,v + \text{sn}\,v\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u}{1 - k^2\text{sn}^2\,u\,\text{sn}^2\,v}. \tag{1}$$

$$\text{cn}\,(u + v) = \frac{\text{cn}\,u\,\text{cn}\,v - \text{sn}\,u\,\text{dn}\,u\,\text{sn}\,v\,\text{dn}\,v}{1 - k^2\text{sn}^2\,u\,\text{sn}^2\,v}. \tag{2}$$

$$\text{dn}\,(u + v) = \frac{\text{dn}\,u\,\text{dn}\,v - k^2\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u\,\text{sn}\,v\,\text{cn}\,v}{1 - k^2\text{sn}^2\,u\,\text{sn}^2\,v}. \tag{3}$$

$$\text{sn}\,(u + v) + \text{sn}\,(u - v) = \frac{2\text{sn}\,u\,\text{cn}\,v\,\text{dn}\,v}{1 - k^2\text{sn}^2\,u\,\text{sn}^2\,v}. \tag{4}$$

序　言

原来准备写一部《高等数学引论》，共六、七卷．其中第一卷第一、二分册已于1963年问世．但由于十年浩劫，其它手稿大部分遭到一"抄"，二"盗"，三"失散"的命运．现在检查劫余，已所剩无几了．于1981年出版了第二卷第一分册．本拟鼓其余勇完成原来计划，但实事求是地估计之后，看来所散失的手稿归来无望，重新补写完成全书，诚恐是时不我待，力不从心的愿望了．无已，作两步打算，先把1962年在中国科技大学讲授过的，铅印而未逸散的部分出版，以后，再就力所能及进行写作，陆续出版（在同一或不同书名下）．

好在这一部分是有它的独立性的，讲授时的客观情况是：既要照顾到初学同学的水平，又要使前者不越级，后者不觉得是简单重复，总的原则是重用矩阵，实现"1，2，3；n；∞"讲授法的第二步．即，准备前几卷是讲一、二、三个变数，一、二、三维空间；而这一卷是讲n个变数或n维空间．本卷原稿缺第十、十一、十二，三章，据回忆这三章是讲n维空间微分几何学的，原稿虽失，但读者不妨以第一卷空间曲线的微分几何为模型，运用正交群下斜对称方阵的分类而获得n维空间曲线的微分性质．这是一个好习题，如果能做得出，则可把正交群改为其它群，而研究其微分不变性质．

岁月无多，不得不计日图效，错谬之处请读者指正．

华罗庚

1981年10月11日

又　序

我非常感谢科学出版社能够出版这残余的手稿．这是对科学工作的珍视．但编辑就为此增加了不少麻烦，花费了不少精力，我在此致谢．

当年，在科技大学编写此书时，龚昇同志给我许多帮助，在寻找遗失稿件时，他还多方尽力．

对龚昇同志和负责校对的裴定一同志，我在此敬致谢忱．

华罗庚

1983年9月9月

目　　录

第一章　线性方程组与行列式(复习提纲)

§1. 线性方程组

考虑齐次方程组:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{1}$$

这儿 a_{ij} 是复数(或实数) $x_1, \cdots, x_n$ 是未知数. 方程组(1)显然有一个解

$$x_1 = \cdots = x_n = 0. \tag{2}$$

这个解称为显见解.

研究齐次方程组的基本问题是: 除显见解外,(1)是否还有其他解? 能否定出所有的解来?

非齐次方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

的基本问题是: (3) 是否有解? 能否定出所有的解来.

如果 (3) 有一个解 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = b_i,$$

则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0.$$

命 $y_j = x_j - x_j^0$, 则 y_j 是 (1) 的解. 所以解非齐次方程组的问题一变而为两个: 首先是是否有解,其次定出齐次方程组 (1) 的所有的解来.

关于是否有解有次之重要结果:

如果(1)有非显见解,则(3)不能对所有的 $b_1, \cdots, b_n$ 都有解.

如果(1)仅有显见解,则(3)对任意的 $b_1, \cdots, b_n$ 都有解.

§2. 消去法

解线性方程组(3)的方法我们着重复习一下 Gauss 消去的原则. 以四个未知数、四个方程为例

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{cases} \tag{1}$$

将(1)中的第一个方程除以系数 a_{11} (它叫做"主导"元素)并令

$$b_{1j}=\frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j>1), \tag{2}$$

则得一个新的方程

$$x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15}. \tag{3}$$

再由方程(3)及(1)中的后面三个方程消去 x_1, 这样便得到了一个辅助方程组, 它包括具有三个未知数的三个方程,此种消去法易于施行,只须顺次将方程(3)乘以 a_{21}, a_{31}, a_{41} (也就是乘以第二、第三和第四行的"主导"元素),再由(1)中的对应方程减去此式即可, 消去一个未知数以后所得的新方程组,其系数用 $a_{ij,1}$ 代表:

$$a_{ij,1}=a_{ij}-a_{i1}b_{1j}(i,\ j\geqslant 2). \tag{4}$$

其次将新方程组中的第一式除以它的"主导"元素 $a_{22,1}$, 则得方程

$$x_2+b_{23,1}x_3+b_{24,1}x_4=b_{25,1}. \tag{5}$$

其中

$$b_{2j,1}=\frac{a_{2j,1}}{a_{22,1}} \quad (j>2), \tag{6}$$

然后仿照前面的方法继续进行,我们便得到了一组具有两个未知数的两个方程,它们的系数呈如次的形式:

$$a_{ij,2}=a_{ij,1}-a_{i2,1}b_{2j,1} \quad (i,\ j\geqslant 3). \tag{7}$$

将这组方程的第一式除以主导元素 $a_{33,2}$, 并令

$$b_{3j,2}=\frac{a_{3j,2}}{a_{33,2}} \quad (j>3), \tag{8}$$

则得方程

$$x_3+b_{34,2}x_4=b_{35,2}.$$

最后再做一步,即可得出一个方程,它只含一个未知数,而其系数为 $a_{44,3}$, 将这个方程除以 $a_{44,3}$, 则得

$$x_4=b_{45,3}.$$

将具有系数 $b_{ij,i-1}$ $(j>i)$ 的一切方程合并,便得到一个三角形的方程组,它与原有的方程组等价;它的解就是原有方程组的解,我们要注意,上述方法只有当所有的"主导"元素都不等于零时才能使用.

我们把求三角形方程组的系数的手续称为正面过程, 而把求三角形方程组的解的手续称为反面过程(参看附表).

我们还要讲一下验算的方法,用代换 $\bar{x}_i=x_i+1$, 则我们得到一组以 $\bar{x}_i$ 为变数的方程组,它的系数与原来的方程相同,而它的常数项等于原方程的系数与常数项之和, 我们可以同时计算这两个方程组,求出解 $\bar{x}_i$, 并视其是否等于 x_i+1, 这就是验算方法.

现在简单地说明一下附表:

正面过程是用如下方法来施行的, 写出矩阵系数(包括常数项与核验和)将第一行除以主导元素,并将结果写成矩阵最末一行,再求出第一个辅助系数 $a_{ij,1}(i,\ j\geqslant 2)$: 从已知矩阵任取一个元素, 由它减去一个乘积——就是上述元素所在的那一行的主导元素与上述元素所在的那一列的最末元素的乘积,重复施行这种手续,当我们得出了仅含一行的矩阵时,正面过程便完成了.

附　表　1

x_1	x_2	x_3	x_4		Σ						Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	1.00	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	0.42	1.00	0.32	0.44	0.5	2.68
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	0.54	0.32	1.00	0.22	0.7	2.78
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	0.66	0.44	0.22	1.00	0.9	3.22
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}	1	0.42	0.54	0.66	0.3	2.92
	$a_{22,1}$	$a_{23,1}$	$a_{24,1}$	$a_{25,1}$	$a_{26,1}$		0.82360	0.09320	0.16280	0.37400	1.45360
	$a_{32,1}$	$a_{33,1}$	$a_{34,1}$	$a_{35,1}$	$a_{36,1}$		0.09320	0.70840	−0.13640	0.53800	1.20320
	$a_{42,1}$	$a_{43,1}$	$a_{44,1}$	$a_{45,1}$	$a_{46,1}$		0.16280	−0.13640	0.56440	0.70200	1.29280
	1	$b_{23,1}$	$b_{24,1}$	$b_{25,1}$	$b_{26,1}$		1	0.11316	0.19767	0.45410	1.76493
		$a_{33,2}$	$a_{34,2}$	$a_{35,2}$	$a_{36,2}$			0.69785	−0.15482	0.49568	1.03871
		$a_{43,2}$	$a_{44,2}$	$a_{45,2}$	$a_{46,2}$			−0.15482	0.53222	0.62807	1.00547
		1	$b_{34,2}$	$b_{35,2}$	$b_{36,2}$			1	−0.22185	0.71030	1.48844
			$a_{44,3}$	$a_{45,3}$	$a_{46,3}$				0.49787	0.73804	1.23591
			1	x_4	$\bar{x}_4$				1	1.48240	2.48240
		1		x_3	$\bar{x}_3$			1		1.03917	2.03916
	1			x_2	$\bar{x}_2$		1			0.04348	1.04348
1				x_1	$\bar{x}_1$	1				−1.25780	−0.25779

在反面过程中，我们利用包含 1 的各行而由最末一行开始，精确地说，在这些行的最后一行里，我们从常数项的一列中得到了最后一个未知量的值，而在核验列中得到了核验值，然后可以逐次得出各个未知量的值，只要由倒数第二列的元素减去对应系数 b 与前面所得未知量 i 值的乘积即可，在表格的末尾写出 1 字，可以帮助我们找出在所要各行中对应于已知 x 的系数，例如

$$x_2 = b_{25,1} - b_{23,1}x_3 - b_{24,1}x_4$$
$$= 0.45410 - 0.11316 \times 1.03917 - 0.19767 \times 1.48240 = 0.04348.$$

最后，我们还要指出用这种方法解 n 个变数的线性方程组所需的乘法与除法的运算次数为 $\frac{n}{3}(n^2 + 3n - 1)$.

§3. 消去法的几何解释

先看两个变数的情况.

$$l:\quad ax + by = c, \qquad l':\quad a'x + b'y = c',$$

在平面上各表示一条直线，两个直线有一交点：消去 y，得出仅有 x 的方程，这是这个交点在 x 轴上的投影.

也可以这样看：第一、二方程各表示一条直线 l 与 l'. 由方程

$$\lambda(ax + by - c) + \mu(a'x + b'y - c') = 0$$

定义出一族直线，这些直线由 $\lambda l+\mu l'$ 表示，这些直线有一个重要性质，就是通过 l 与 l' 的交点，不难证明：反过来，凡是通过 l 与 l' 的交点的直线也在这族之中，在这族直线中有一条平行于 y 轴的. 这条直线便是消去 y 后的方程.

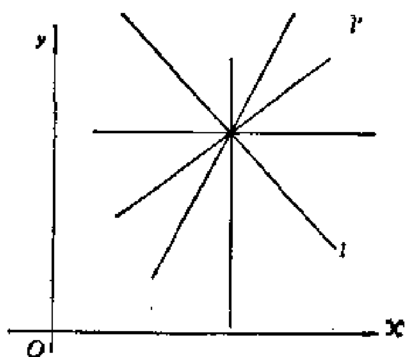


图 1

再看三个变数的情况.

$$l:\qquad ax+by+cz=d,$$

$$l':\qquad a'x+b'y+c'z=d',$$

$$l'':\qquad a''x+b''y+c''z=d''.$$

这表示三个平面，平面族

$$\lambda l+\mu l'=0$$

代表通过 l 与 l' 的交线的所有的平面. 由 l 与 l' 中消去 x 而得出的方程可以看成为：它代表通过交线而平行于 x 轴的平面，也可以看成为：这条交线在 (y,z) 平面上的投影，就是 y，z 平面上的一条直线，再从 l，l'' 中消去 x，又得 y，z 平面上的一条直线.

因此，消去 x，可以看作把三维空间的三个平面求交点的问题变为在 y，z 平面上求两条直线的交点的问题. 这两条直线，正是两条空间直线(平面的交线)的投影.

一般讲来：一个

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_n=b_n$$

可以看成为 n 维空间的超平面. 消去法便是把 n 从空间 m 个超平面求交点的问题化为 $n-1$ 维空间 $n-1$ 个超平面求交点的问题.

§4. 消去法的力学解释

在一条两端固定的弦线上取 n 点 $P_1,\cdots,P_n$，在这 n 点各加一重物，也就是在这些点各有一向下的力 $F_1,\cdots,F_n$，我们来研究这些点的垂度 $y_1,\cdots,y_n$.

我们假定弦线上的力适合于“线性叠加原则”.

1°. 两组力叠加，其对应的垂度也相加.

2°. 所有力都乘以同一实数，则所有的垂度也乘上这一个相同的数.

以 a_{ij} 表示当在 P_j 点上作用一个单位力时点 P_i 的垂度. 这样，力 $F_1,\cdots,F_n$ 的联合作用后的垂度 $y_1,\cdots,y_n$ 等于

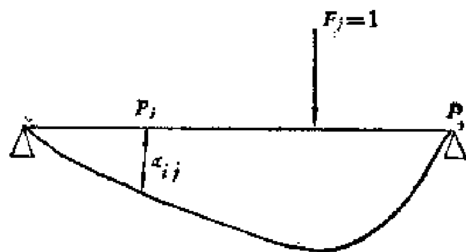


图 2

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_j=y_i\quad(i=1,2,\cdots,n).\tag{1}$$

解线性方程组的问题，也就是给了垂度 $y_1,\cdots,y_n$ 要求出力 $F_1,\cdots,F_n$ 的问题了.

在 P_1 点加一个反作用力 R，这样单位力作用于 P_j 时，P_i 点的垂度等于

$$b_{ij}=a_{ij}+Ra_{i1}.$$

考虑把弦线固定于 P_1 的情况，也就是

$$b_{1j}=0,\qquad a_{1j}+Ra_{11}=0,$$
$$R=-a_{1j}/a_{11}.$$

也就是在 P_j 点加一个单位力，如果要在 P_1 加一个力使 P_1 固定，这个力是 $-a_{1j}/a_{11}$，这时

$$b_{ij}=a_{ij}-a_{1j}a_{i1}/a_{11}.$$

从(1)式消去 F_1，得

$$\sum_{j=2}^{n}(a_{ij}-a_{1j}a_{i1}/a_{11})F_j=y_i-a_{i1}y_1/a_{11}. \tag{2}$$

这就是加支点后的平衡方程，在 P_1 加了支点，在 P_j 作用一个单位力，b_{ij} 就是 P_i 的垂度。逐步消去，就是逐步加支点的过程。

§5. 经 济 平 衡

假定有 n 种生产品 $P_1,\cdots,P_n$ 生产一个单位 P_j 需要 a_{ij} 单位 P_i，如果各产品的数量是 $x_1,\cdots,x_n$，为了生产这些产品，P_i 类产品的总消耗是

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

能够供给市场的数量是

$$x_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i.$$

因此，知道了市场需要 $b_1,\cdots,b_n$，反回来考虑给各工业的生产指标 $x_1,\cdots,x_n$ 也是一个解线性方程的问题.

这类方程当然可以用消去法解，但更好是用叠代法解，关于叠代法将来再谈.

§6. 线性迴归分析

某一变量 ξ 决定于 n 个因素

$$\eta_1,\cdots,\eta_n.$$

我们已经做了 N 次实验得出的实验数据是

$$\xi^{(i)},\ \eta_1^{(i)},\ \eta_2^{(i)},\cdots,\ \eta_n^{(i)},\ i=1,\cdots,N.$$

我们考虑线性关系

$$\xi=\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j$$

问题是怎样的线性关系，差方和最小，也就是，如果使

$$\zeta^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)},$$

求怎样的 a_j 使

$$\sum_{i=1}^{N}(\xi^{(i)}-\zeta^{(i)})^2$$

最小即求

$$F(a_1\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)}\right)^2 \tag{1}$$

的极小值.

命

$$a_{jk}=\sum_{i=1}^{N}\eta_j^{(i)}\eta_k^{(i)},\qquad b_k=\sum_{i=1}^{N}\xi^{(i)}\eta_k^{(i)}.$$

我们现在证明

$$\sum_{j=1}^{n}a_{jk}x_j=b_k,\qquad k=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

的解答 $x_j=a_j$ 使 (1) 取最小值.

我们现在来证明这一点：如果 $a_1,\cdots,a_n$ 并不适合于(2)．例如：有一个 k 使

$$\sum_{j=1}^{n}a_{jk}a_j-b_k=-\alpha_k\neq 0.$$

我们考虑

$$\begin{aligned}
&F(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k+\varepsilon,a_{k+1},\cdots,a_n)\\
&\quad=\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)}+\varepsilon\eta_k^{(i)}\right)^2\\
&\quad=\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)}\right)^2+2\varepsilon\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_i\eta_j^{(i)}\right)\eta_k^{(i)}+\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n}(\eta_k^{(i)})^2\\
&\quad=\sum_{i=1}^{N}\left(\xi^{(i)}-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j^{(i)}\right)^2+2\varepsilon\left(b_k-\sum_{j=1}^{n}a_{jk}a_j\right)+\varepsilon^2a_{kk}\\
&\quad=F(a_1,\cdots,a_k)+2\varepsilon\alpha_k+\varepsilon^2a_{kk}.
\end{aligned}$$

凑方得

$$\begin{aligned}
&F(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k+\varepsilon,a_k,\cdots,a_n)\\
&\qquad=F(a_1,a_2,\cdots,a_n)+a_{kk}\left(\varepsilon+\frac{\alpha_k}{a_{kk}}\right)^2-\frac{\alpha_k^2}{a_{kk}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

如果 $\alpha_k\neq 0$，则 $F(a_1,\cdots,a_n)$ 不是最小值，因为在 (3) 式中取 $\varepsilon=-\alpha_k/a_{kk}$，则

$$F(a_1,\cdots,a_{k-1},a_k+\varepsilon,a_k,\cdots,a_n)$$

的数值小于 $F(a_1,\cdots,a)$ 的数值了.

因此：求迴归平面的问题一变而为解线性方程的问题了.

致于要证明，适合于 (2) 的解一定使 F 取最小值，这一点的证明不难，如果 (2) 仅有一个解，当然毫无问题，因为由 (3) 可知不适合 (2) 的都不可能使 F 极小.（读者自证：(2)一定有解，并处理 (2) 有不止一个解的情况.）

方程组 (2) 当然可以用消去法来解，但是这是一个有对称系数的联立方程式，即

$$a_{jk}=a_{kj},$$

关于这样的方程组我们另有较好的计算方法.

以上的证明的优点之一，也许有人会指出，它避开了微积分，直接用初等的"凑方"法来处理了，实际上，更好的优点在于这个方法介绍了计算数学上的一个重要方法——松弛法.

特别在计算迴归分析时，松弛法更有价值，方法是：

1) 先任意地取一组 $a_1, \cdots, a_n$.

2) 任意地算一个

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} a_j - b_k,$$

如果 $\alpha_k \neq 0$，把

$$a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k + \varepsilon, \cdots, a_n$$

作为原出发点，如果 $\alpha_k = 0$，则要换一个 k.

3) 一般的办法是 $k = 1, 2, \cdots, n, 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 周而复始地进行计算，这样便可以得出所求的解答了.

这方法之所以命名为松弛法的原因固在于此，另一点是如果算错了，不必从头算，依错算下去，依然得出正确的结果来(即从错了的 $(a_1, \cdots, a_n)$ 再开始算下去，依然能得出结果来的).

当然，并不是说常常错，而是说偶然算错了关系不大而已.

虽然"松弛"，但偶而略为紧张些可以帮我们更有效地解决问题，例如：比较一下

$$\alpha_k / a_{kk}, \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

谁大，取使这值最大的整数 k 出发最有利，因为由(3)可知在 F 上减得多了，这方法一定可以逐步逼近原解答的.

§7. 行 列 式

建议从 §1 的关系引进行列式，也就是用数学归纳法来定义行列式，即行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

此处 A_{ij} 是由原行列中划掉第 i 行，第 j 列所得出的 $n-1$ 行的行列式的数值，再乘以 $(-1)^{i+j}$.

A_{ij} 称为 a_{ij} 的余因子.

行列式的重要性质：

(1) 一行(列)同以 k 乘之，则行列式的数值是原来的 k 倍.

(2) 把一行(列)的 h 倍加到另一行(列)上，行列式的数值不变.

(3) 两行(列)互换，行列式变号，由此可知两行相等，行列式之值为 0.

解方程式的 Cramer 法则：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

的解答是

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|a_{ij}|},$$

x_i 有相似的表达式，但这个是把 $|a_{ij}|$ 中的第 1 列换为 "b"，而那个是把第 i 列换为 "b".

齐次方程的基本定理：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, n,$$

有非显见解的必要且充分条件是

$$|a_{ij}| = 0.$$

简单推论 1. 如果 $n > m$，方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

一定有非显见解，因为我们可以虚加上 $n-m$ 个方程

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = m+1, \cdots, n.$$

其中 $a_{ij} = 0$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

简单推论 2. 如果 $n \leqslant m$，则方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, m \tag{1}$$

有非显见解，一定是其中任意 n 个方程的行列式都等于 0.

比基本定理较一般些的结果是，如果任意 n 个方程式的行列式都等于 0，则 (1) 有一个非显见解.

证明 1) 由假定可知

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11}, & \cdots, & a_{n-1n} \\ a_{i1}, & \cdots, & a_{in} \end{vmatrix} = 0.$$

把这式子展开得

$$a_{i1}A_1 + \cdots + a_{in}A_n = 0, \qquad A_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

如果 $A_1, \cdots, A_n$ 不全等于 0，则方程组 (1) 显然有解 $x_i = A_i$.

2) 如果经过重排方程的次序，或重编 x_i 的号码，使

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则由 1) 可知本定理正确.

3) 现在考虑 2) 没有包括进去的情况. 考虑 $x_n = 0$ 时的情况，现在有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots, & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-21}, & \cdots, & a_{n-2n-1} \\ a_{i1}, & \cdots, & a_{in-1} \end{vmatrix} = 0.$$

展开得

$$a_{i1}B_1 + \cdots + a_{i\,n-1}B_{n-1} = 0.$$

即取 $x_1 = B_1, \cdots, x_{n-1} = B_{n-1}, x_n = 0$ 就是解.

这样可以运用归纳法来证明本定理.

现在来研究 §1 中可提出的齐次方程组与非齐次方程组的关系.

首先: 如果

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

有非显见解, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{2}$$

也有非显见解.

这是显然的,因为行换为列,行列式的数值不变. 命

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_{ij} = 0,$$

并可假定 $\xi_1 \neq 0$ 如此则由

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \tag{3}$$

可知

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\xi_i\right)x_j = 0.$$

显然 $b_1 = 1, b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时,方程组(3)无解.

如果 (2) 仅有显见解,则

$$|a_{ij}| \neq 0.$$

由 Cramer 公式可知方程 (2) 有解.

注意 Cramer 公式虽然漂亮,但是真正解方程式时不常用它,因为其中运算的次数太多了.

§8. Vandermonde 行列式

定理 1

$$\Delta = \Delta(x_1, x_2, \cdots x_n) = \begin{vmatrix} 1, 1, & \cdots & 1 \\ x_1, x_2, & \cdots, & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, & \cdots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geq i>j\geq 1} (x_i - x_j).$$

证明 1) 用归纳法, $n = 2$ 时,显然正确.

2) 在第 2, 3,…, n 行中各减前一行的 x_1 倍如此得

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1), \cdots, x_n(x_n - x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1), \cdots, x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$
=(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1, & \cdots\cdots, & 1 \\ x_2, & \cdots\cdots, & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2}, & \cdots\cdots, & x_2^{n-2} \end{vmatrix},
$$

用归纳法即得所求.

附证　当 $x_i=x_j$ 时 $\Delta=0$，因此 x_i-x_j 可除尽 Δ，因此

$$
\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)
$$

可除尽 Δ，再比较 $x_n^{n-1}x_{n-1}^{n-2}\cdots x_2\cdot 1$ 的系数可得本定理。

这定理有以下的显然推广.

定理 2　命 $P_i(x)$是第 i 次多项式，其 x^i 的系数是 a_i. 如此则

$$
\begin{vmatrix} P_0(x_1), & \cdots, & P_0(x_n) \\ P_1(x_1), & \cdots, & P_1(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n-1}(x_1), & \cdots, & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = a_0\cdots a_n\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j). \qquad (1)
$$

这个结果的证明是容易的，首先，第一行全是 a_0，以 a_0 除这一行，得一同为 1 的行的行列式，命

$$
P_1(x)=a_1x+a_1'
$$

在第二行中减去第一行的 a_1' 倍，再除以 a_1，则第二行变为

$$
x_1,\cdots\cdots,x_n.
$$

命

$$
P_2(x)=a_2x^2+a_2'x+a_2''
$$

在第三行中减去第一行的 a_2'' 倍，减去第二行的 a_2' 倍，再除以 a_2，第三行变为

$$
x_1^2,\cdots\cdots,x_n^2.
$$

依此绕行，即得所求的公式了.

定理 3　我们有

$$
\begin{vmatrix} 1, & \cdots, & 1 \\ \cos\theta_1, & \cdots, & \cos\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(n-1)\theta_1, & \cdots, & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\cos\theta_i-\cos\theta_j)
$$

及

$$
\begin{vmatrix} \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n \\ \sin 2\theta_1, & \cdots, & \sin 2\theta n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\cos\theta_i-\cos\theta_j).
$$

证明　由于

$$
(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,
$$

因此

$$
2\cos n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n
$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} [(i\sin\theta)^l + (-i\sin\theta)^l] \cos^{n-l}\theta$$

$$= 2\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}\theta \cos^{n-2k}\theta.$$

即

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} (1-\cos^2\theta)^k \cos^{n-2k}\theta = P_n(\cos\theta).$$

这儿 P_n 是 $\cos\theta$ 的多项式其中 $\cos^n\theta$ 的系数等于

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k(-1)^k \binom{n}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n} (1+(-1)^l)\binom{n}{l}$$
$$= 2^{n-1}.$$

以此代入原行列式，得

$$\begin{vmatrix} 1, & \cdots, & 1 \\ \cos\theta_1, & \cdots, & \cos\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(n-1)\theta_1, & \cdots, & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_0(\cos\theta_1), & \cdots, & P_0(\cos\theta_n) \\ P_1(\cos\theta_1), & \cdots, & P_1(\cos\theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n-1}(\cos\theta_1), & \cdots, & P_{n-1}(\cos\theta_n) \end{vmatrix}$$

$$= 2^{0+1+2+\cdots+(n-2)} \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1} (\cos\theta_i - \cos\theta_j)$$

又

$$2i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n - (\cos\theta - i\sin\theta)^n$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} [(i\sin\theta)^l - (i\sin\theta)^l] \cos^{n-l}\theta$$
$$= 2i \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}\theta \cos^{n-2k-1}\theta.$$

即

$$\sin n\theta = \sin\theta \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k (1-\cos^2\theta)^k \cos^{n-2k-1}\theta$$
$$= \sin\theta\, Q_{n-1}(\cos\theta).$$

这儿 $Q_{n-1}(\cos\theta)$ 是 $\cos\theta$ 的 $n-1$ 次多项式，其 $\cos^{n-1}\theta$ 的系数为

$$\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} - \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

因此

$$\begin{vmatrix} \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n \\ \sin 2\theta_1, & \cdots & \sin 2\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin n\theta_1, & \cdots, & \sin n\theta_n \end{vmatrix} = \sin\theta_1\cdots\sin\theta_n \begin{vmatrix} Q_0(\cos\theta), & \cdots, & Q_0(\cos\theta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{n-1}(\cos\theta_1), & \cdots, & Q_{n-1}(\cos\theta_n) \end{vmatrix}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}(n-1)n} \sin\theta_1\cdots\sin\theta_n \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1} (\cos\theta_i - \cos\theta_j).$$

定理 4

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{1}{2}\theta_1, & \cdots, & \sin\frac{1}{2}\theta_n \\ \sin\frac{3}{2}\theta_1 & \cdots, & \sin\frac{3}{2}\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_n, & \cdots, & \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}\sin\frac{1}{2}\theta_i\prod_{n\geq i>j\geq 1}(\cos\theta_i-\cos\theta_j).$$

证明　第 $1,2,\cdots,n$ 列各乘以 $\cos\frac{1}{2}\theta_1\cdots,\cos\frac{1}{2}\theta_n$ 由于:

$$\sin\left(v-\frac{1}{2}\right)\theta_i\cos\frac{1}{2}\theta_i=\frac{1}{2}(\sin v\theta_i+\sin(v-1)\theta_i),$$

所以原行列式等于

$$\frac{1}{2^n\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{1}{2}\theta_i}\begin{vmatrix} \sin\theta_1, & \sin\theta_2, & \cdots, & \sin\theta_n \\ \sin 2\theta_1-\sin\theta_1, & \sin 2\theta_2-\sin\theta_2, & \cdots, & \sin 2\theta_n-\sin\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin n\theta_1-\sin(n-1)\theta_2, & & \cdots & \sin n\theta_n-\sin(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^n\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{1}{2}\theta_i}\begin{vmatrix} \sin\theta_1, & \sin\theta_2, & \cdots, & \sin\theta_n \\ \sin 2\theta_1, & \sin 2\theta_2, & \cdots, & \sin 2\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin n\theta_1, & \sin n\theta_n, & \cdots, & \sin n\theta_n \end{vmatrix}$$

$$=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\sin\frac{1}{2}\theta_1\cdots\sin\frac{1}{2}\theta_n\prod_{n\geq i>j\geq 1}(\cos\theta_i-\cos\theta_j).$$

定理 5

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta_1, & \cdots, & \cos\frac{1}{2}\theta_n \\ \cos\frac{3}{2}\theta_1, & \cdots, & \cos\frac{3}{2}\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_1, & \cdots, & \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{1}{2}\theta_i\prod_{n\geq i>j\geq 1}(\cos\theta_i-\cos\theta_j).$$

证明　第 $1,2,\cdots n$ 列是各乘以

$$\sin\frac{1}{2}\theta_1,\ \cdots\sin\frac{1}{2}\theta_n.$$

由于

$$\sin\frac{1}{2}\theta_i\cos\left(v+\frac{1}{2}\right)\theta_i=\frac{1}{2}(\sin(v+1)\theta_i-\sin v\theta_i),$$

所以原行列式等于

$$\frac{1}{2^n\prod_{i=1}^{n}\sin\frac{1}{2}\theta_i}\begin{vmatrix} \sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n \\ \sin 2\theta_1-\sin\theta_1, & \cdots, & \sin 2\theta_n-\sin\theta_n \\ \sin 3\theta_2-\sin 2\theta_1, & \cdots, & \sin 2\theta_n-\sin\theta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin n\theta_1-\sin(n-1)\theta_1, & \cdots & \sin n\theta_n-\sin(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^n\prod_{i=1}^{n}\sin\frac{1}{2}\theta_i}\begin{vmatrix}\sin\theta_1, & \cdots, & \sin\theta_n\\ \sin 2\theta_1, & \cdots, & \sin 2\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin n\theta_n, & \cdots, & \sin n\theta_n\end{vmatrix}$$

$$=2^{\frac{1}{2}(n-1)n}\cos\frac{1}{2}\theta_1\cdots\cos\frac{1}{2}\theta_n\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(\cos\theta_i-\cos\theta_j).$$

习题 1　用某一次序来标列一个多边体的 n 个顶点，现在做以下的行列式，如果第 i 个顶点和第 j 个顶点之中有一边相联，则取 $a_{ij}=a_{ji}=1$。不然则取 $a_{ij}=0$，特别有 $a_{ii}=0$。

证明　这个行列式的数值与顶点排列的次序无关，并且算出四面体，六面体，八面体的行列式：例如四面体

$$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=-3.$$

提示　把第 i 点换为第 j 点，则第 i 行与第 j 行，第 i 列与第 j 列同时进行交换。

答数　六面体：9，八面体：0.

习题 2　算出

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1, & a_1, & a_1 & \cdots & a_1\\ b_1, & b_2, & a_2 & \cdots & a_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_1, & b_2, & b_3 & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

习题 3　试证

$$\begin{vmatrix}\rho & \frac{l}{m}+\frac{l}{m} & \frac{n}{l}+\frac{l}{n}\\ \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & \rho & \frac{m}{n}+\frac{n}{m}\\ \frac{n}{l}+\frac{l}{n} & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} & \rho\end{vmatrix},\ l\neq 0,\ m\neq 0,\ n\neq 0$$

$$=(\rho-2)(\rho+1+\sqrt{P})(\rho+1-\sqrt{P}),$$

此处

$$P=\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)(l^2+m^2+n^2).$$

§9. 对 称 函 数

把乘积

$$f(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{1}$$

展开成为

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \sigma_3 x^{n-3} + \cdots. \tag{2}$$

这儿

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots\cdots\cdots + x_{n-1}x_n.$$

其中 σ_i 是所有的从 $x_1, \cdots, x_n$ 中取 i 个乘积的总和，这个表达式中有 $\binom{n}{i}$ 项，每项是 i 个数的乘积.

这些 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 称为 $x_1, \cdots, x_n$ 的初等对称函数.

定义　如果把 $x_1, \cdots, x_n$ 重排成为 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}$，函数

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}),$$

如果所有的重排这关系式都成立，则函数 F 称为 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称函数.

初等对称函数是对称函数，还另有一主要的对称函数是对称幂和，即

$$s_i = x_1^i + \cdots + x_n^i.$$

定义 $\sigma_0 = 1, s_0 = n$. 取出一项 $x_{i_1}^{l_1} x_{i_2}^{l_2} \cdots x_{i_m}^{l_m}$，用

$$\sum x_{i_1}^{l_1} x_{i_2}^{l_2} \cdots x_{i_m}^{l_m}$$

表示由该项经由可能的排列所得出的总和，例如：

$$\sigma_2 = \sum x_i x_j,$$

注意这不同于

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i x_j.$$

因为一个没有 x_i^2 项，而一个有.

在 (2) 中代以 x_i，得

$$x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \sigma_2 x_i^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

把这看成为 n 个线性方程式，把 $-\sigma_1, \sigma_2, \cdots, (-1)^n\sigma_n$ 看成为未知数. 用 Cramer 公式解得

$$(-1)^{n-l}\sigma_{n-l} = \begin{vmatrix} x_1^{n-1}, & \cdots, & x_1^{l+1}, -x_1^n, x_1^{l-1}, & \cdots, & x_1, 1 \\ x_2^{n-1}, & \cdots, & x_2^{l+1}, -x_2^n, x_2^{l-1}, & \cdots, & x_2, 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{n-1}, & \cdots, & x_n^{l+1}, -x_n^n, x_n^{l-1}, & \cdots, & x_n, 1 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} x_1^{n-1}, x_1^{n-2}, & \cdots, & x_1, 1 \\ x_2^{n-1}, x_2^{n-2}, & \cdots, & x_2, 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{n-1}, x_n^{n-2}, & \cdots, & x_n, 1 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

因此得出

定理 1　命

$$\Delta(l_1, \cdots, l_n) = \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, x_2^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_n}, x_2^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix},$$

则

$$\sigma_{n-l} = \frac{\Delta(n, n-1, \cdots, l+1, l-1, \cdots, 0)}{\Delta(n-1, n-2, \cdots, 1, 0)}.$$

习题 1　证明 $\Delta(n-1, n-2, \cdots, 1, 0)$ 除得尽所有的 $\Delta(l_1, \cdots, l_n)$，并且其商是对称函数.

习题 2　试算出

$$\Delta(n+1, n-2, \cdots, 1, 0),$$
$$\Delta(n+1, n, n-2, n-3 \cdots, 1, 0).$$

提示：先证明形式上有

$$\Delta(n+1, n-2, \cdots, 1, 0) = \Delta(n-1, n-2, \cdots, 1, 0) \times (A\sum x_i^2 + B\sum_{i<j} x_i x_j).$$

再定出 A 与 B. 我们现在研究

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$$

与

$$s_1, s_2, \cdots, s_n$$

的关系由式 (1) 的对数微商可知

$$f(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x - x_n}.$$

由于

$$\frac{x^l - x_1^l}{x - x_1} = x^{l-1} + x^{l-2}x_1 + \cdots + x_1^{l-1},$$

可知

$$\frac{f(x)}{x - x_i} = \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sigma_l \frac{x^{n-l} - x_i^{n-l}}{x - x_i}$$
$$= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \sigma_l \sum_{t=1}^{n-l-1} x^t x_i^{n-l-t-1}$$
$$= \sum_{t=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{n-t-1} (-1)^l \sigma_l x_i^{n-l-t-1} \right) x^t.$$

对 i 求和因此得出

$$f'(x) = \sum_{t=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{n-t-1} (-1)^l \sigma_l s_{n-l-t-1} \right) x^t.$$

另一方面，微分 (2) 式得

$$f'(x) = \sum_{t=0}^{n} (-1)^{n-t} \sigma_{n-t} (x^t)' = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{n-t} t \sigma_{n-t} x^{t-1}.$$

比较系数得

$$\sum_{l=0}^{n-t-1} (-1)^l \sigma_l s_{n-l-t-1} = (-1)^{n-t-1} (t+1) \sigma_{n-t-1}.$$

$$t = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

把 t 换为 $n - \tau$，则得

$$\sum_{l=0}^{\tau-1} (-1)^l \sigma_l s_{\tau-l-1} = (-1)^{\tau-1} (n - \tau + 1) \sigma_{\tau-1},$$

$$\tau = 1, 2, \cdots, n-1, n,$$

$$s_0 = n\sigma_0,$$
$$\sigma_0 s_1 - \sigma_1 s_0 = -(n-1)\sigma_1,$$
$$\sigma_0 s_2 - \sigma_1 s_1 + \sigma_2 s_0 = (n-2)\sigma_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_0 s_m - \sigma_1 s_{m-1} + \cdots + (-1)^m \sigma_m s_0 = (-1)^m (n-m)\sigma_m.$$

以 $\sigma_0 = 1$，$s_0 = n$ 代入，并移项可得

$$s_1 = \qquad = \sigma_1,$$
$$\sigma_1 s_1 - s_2 = 2\sigma_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_{m-1} s_1 - \sigma_{m-2} s_2 + \cdots + (-1)^{m-1} s_m = m\sigma_m.$$

把 $s_1, \cdots s_m$ 看成为未知数，解这线性方程组得：

定理 2 (Newton)

$$s_1 = \sigma_2,\ s_2 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}, \quad s_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}, \cdots$$

$$s_m = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots \\ 2\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m\sigma_m & \sigma_{m-1} & \sigma_{m-2} & \cdots \end{vmatrix}, \quad m = 1, 2, \cdots, n.$$

再把 $\sigma_1, \cdots \sigma_m$ 看成为未知数解得：

定理 3

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} s_1 & 1 \\ s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 \\ s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \quad \sigma_4 = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \cdots.$$

如果 $m > n$，则由

$$x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0$$

乘以 x_i^{m-n}，再对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 相加，如此得出

$$s_m - \sigma_1 s_{m-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n s_{m-n} = 0,$$

即 s_m 可由 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$，及 $s_{m-1}, \cdots, s_{m-n}$ 看出来，这是递归公式。

§ 10. 对称函数的基本定理

定理 1 任何一个对称函数(多项式)一定可以表为初等对称函数的函数。

证明 1) 如果能够证明，它可以表为 $s_1, s_2, \cdots, s_m, \cdots$ 的函数，则由上节的结果知道，它可以表为 $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$ 的函数。

2) 由

$$s_m = \sum_{i=1}^{n} x_i^m, \quad s_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p.$$

可得

$$s_m s_p = \sum x_i^{m+p} + \sum_{i \neq j} x_i^m x_j^p.$$

当 $m \neq p$ 时，可知对称函数

$$\sum x_i^m x_j^p = s_m s_p - s_{m+p}.$$

当 $m = p$ 时，

$$s_m s_m = s_{2m} + 2\sum x_i^m x_j^m.$$

即对称函数

$$\sum (x_i x_j)^m = \frac{1}{2}(s_m^2 - s_{2m}).$$

3）再考虑有三个不同因子的对称函数 $\sum x_i^m x_j^p x_k^q$.

如果 m, p, q, 各不相等，且 $m + q \neq p$, $p + q \neq m$ 时，

$$s_q \sum x_i^m x_j^p = \sum x_i^{m+q} x_j^p + \sum x_i^m x_j^{p+q} + \sum x_i^m x_j^p x_k^q.$$

由 (2) 可知

$$s_q(s_m s_p - s_{m+p}) = s_{m+q} s_p - s_{m+p+q} + s_m s_{p+q} - s_{m+p+q} + \sum x_i^m x_j^p x_k^q.$$

因此

$$\sum x_i^m x_j^p x_k^q = s_m s_p s_q - s_{m+p} s_q - s_{m+q} s_p - s_{m+p} s_m + 2 s_{m+p+q}.$$

如果 m, p, q 各不相等，但 $m + q = p$ 时，则得

$$\sum x_i^m x_j^p x_k^q = s_m s_p s_q - s_q s_{m+p} - \frac{1}{2} s_p^2 - s_{p+q} s_m + \frac{3}{2} s_{2p}.$$

如果 m, p, q 各不相等，但 $p + q = m$ 时，则得

$$\sum x_i^m x_j^p x_k^q = s_m s_p s_q - s_q s_{m+p} - \frac{1}{2} s_m^2 - s_{m+q} s_p + \frac{3}{2} s_{2m}.$$

如果 $m = p$ 则得

$$2\sum (x_i x_j)^m x_k^q = s_m^2 s_q - s_{2m} s_q - 2 s_{m+q} s_m + 2 s_{2m+q}.$$

又如果 $m = p = q$，即

$$6\sum (x_i x_j x_k)^m = s_m^3 - 3 s_{2m} s_m + 2 s_{3m}.$$

即 $\sum x_i^m x_j^p x_k^q$ 可以成为初等对称函数. 由此方法续行，可以证明本定理.

§11. 两个代数方程有无公根

以前讲过了一个重要原则：如果有一组非全为 0 的数 $x_1, \cdots, x_n$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2 \cdots, n,$$

则

$$|a_{ij}| = 0.$$

这一原则十分重要，并且是一个经常用的工具，现在举几个例子来说明此法的应用。

例 1　假定

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \tag{1}$$

$$b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0, \tag{2}$$

有一个公根 ξ. 则

$$\begin{aligned}
a_0\xi^6 + a_1\xi^5 + a_2\xi^4 + a_3\xi^3 + a_4\xi^2 &= 0,\\
a_0\xi^5 + a_1\xi^4 + a_2\xi^3 + a_3\xi^2 + a_4\xi &= 0,\\
a_0\xi^4 + a_1\xi^3 + a_2\xi^2 + a_3\xi + a_4 &= 0,\\
b_0\xi^6 + b_1\xi^5 + b_2\xi^4 + b_3\xi^3 &= 0,\\
b_0\xi^5 + b_1\xi^4 + b_2\xi^3 + b_3\xi^2 &= 0,\\
b_0\xi^4 + b_1\xi^3 + b_2\xi^2 + b_3\xi &= 0,\\
b_0\xi^3 + b_1\xi^2 + b_2\xi + b_3 &= 0,
\end{aligned}$$

可以看为七个线性方程，有一个解答

$$x_1 = \xi^6,\ x_2 = \xi^5,\ x_3 = \xi^4,\ x_4 = \xi^3,\ x_5 = \xi^2,\ x_6 = \xi,\ x_7 = 1.$$

这是不全等于 0 的解答，因此

$$\Delta = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0\\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0\\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0\\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0\\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3
\end{vmatrix} = 0.$$

这便是方程 (1), (2) 有公根的条件了.

一般讲来

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m = 0,$$

有公根的条件可以由

$$x^{m-1}f(x) = 0, \cdots, xf(x) = 0, f(x) = 0,$$

$$x^{n-1}g(x) = 0, \cdots, xg(x)0 = 0, g(x) = 0,$$

消去 $x^{m+n-1}, \cdots, x, 1$ 而得出的行列式

$$\Delta = 0.$$

如果 $f(x) = 0$ 根是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, $g(x) = 0$ 的根是 $\beta_1, \cdots, \beta_m$, 则

$$\Delta = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j).$$

这个定理的证明，这儿不谈了.

例 2　算出

$$f(x) = x^3 + px + q = 0$$

有重根的条件. 也便是求出 $f'(x) = 0$, $f(x) = 0$ 有公根的条件.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2p & -3q & 0 \\ 0 & -2p & -3q \\ 3 & 0 & p \end{vmatrix} = 4p^3 + 27q^2.$$

即如果 $f(x)$ 有重根，则 $4p^3 + 27q^2 = 0$.

实质上这个定理不要如此证明的，因为

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

由 $f'(x) = 0$ 解得

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

代入 $f(x) = 0$，即得所求.

习题 1　求出

$$x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0$$

有重根的条件。

§ 12. 代数曲线的交点

命 $f(x, y)$，$g(x, y)$ 代表 x，y 的多项式；则

$$f(x, y) = 0,$$
$$g(x, y) = 0.$$

各代表一条代数曲线，问题是求这两条代数曲线的交点.

方法是：把 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 看成为 x 的多项式，其系数是 y 的函数．由上节的方法消去 y，即得一个行列式，展开行列式便得 y 的多项式，使行列式=0．解出 y 然后再解出 x 来.

例　求椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

与双曲线

$$xy = 1$$

的交点。

从

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$
$$yx^2 - x = 0,$$
$$yx - 1 = 0,$$

消去 x^2，x 得

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{y^2}{b^2} - 1 \\ y & -1 & 0 \\ 0 & y & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

由此解出 y，然后由 $x=\frac{1}{y}$ 算出 x.

注意　这些方法虽然用行列式的方法表达，但在实际应用时，还是用消去法的好.

§13. 行列式的幂级数

行列式的另一定义是:

$$\begin{vmatrix} a_{22}, & \cdots, & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i} \delta^{1,\cdots,n}_{i_1,\cdots,i_n} a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}.$$

这儿 $\delta_{i_1,\cdots,i_n}=1$，如果 $\begin{pmatrix} 1, & \cdots, & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 是偶置换，$\delta_{i_1,\cdots,i_n}=-1$，如果 $\begin{pmatrix} 1, & \cdots, & n \\ i_1 & \cdots, & i_n \end{pmatrix}$ 是奇置换.

这一定义看来较抽象，并且在具体计算时工作量很为烦重，但是在理论上仍然十分有用，我们现在举一个十分重要的用场.

定理 1　命

$$f_i(z)=\sum_{t=0}^{\infty} a_t^{(i)} z^t,\quad i=1,2\cdots,n,$$

表示 n 个幂级数，并且都当 $|z|<\rho$ 时收敛. 则当

$$|z_1|<\rho,\cdots,|z_n|<\rho$$

时，有次之恒等式

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant 0} \begin{vmatrix} a_{l_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(n)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1^{l_1}, & \cdots, & z_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n^{l_1}, & \cdots, & z_n^{l_n} \end{vmatrix}.$$

证明　由行列式的展开法可知此式左边等于

$$\sum_{i_1\cdots i_n} \delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n} f_{i_1}(z_1)\cdots f_{i_n}(z_n)$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta^{1,\cdots,n}_{i_1,\cdots,i_n} \sum_{t_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{t_n=0}^{\infty} a_{t_1}^{(i_1)} a_{t_2}^{(i_2)}\cdots a_{t_n}^{(i_n)} z_1^{t_1} z_2^{t_2}\cdots z_n^{t_n}$$

$$=\sum_{t_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{t_n=0}^{\infty}\left(\sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,i_2,\cdots,i_n} a_{t_1}^{(i_1)} a_{t_2}^{(i_2)}\cdots a_{t_n}^{(i_n)}\right) z_1^{t_1}\cdots z_n^{t_n}$$

$$=\sum_{t_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{t_n=0}^{\infty} \begin{vmatrix} a_{t_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{t_n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{t_n}^{(n)} \end{vmatrix} z_1^{t_1}\cdots z_n^{t_n}$$

$$=\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant 0} \begin{vmatrix} a_{l_1}^{(1)} & \cdots & a_{l_n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(n)} \end{vmatrix} \sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta^{1,2,\cdots,n}_{i_1,\cdots,i_n} z_1^{l_{i_1}}\cdots z_n^{l_{i_n}}.$$

即得本定理.

特别取

$$f_i(z) = f(x_i z)$$

及

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

则

$$a_l^{(i)} = a_l x_i^l.$$

代入

$$\begin{vmatrix} a_{l_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{l_1} x_1^{l_1}, & \cdots, & a_{l_n} x_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l_1} x_n^{l_1}, & \cdots, & a_{l_n} x_n^{l_n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{l_1} a_{l_2} \cdots a_{l_n} \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix}.$$

即得

定理 2 命

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots\cdots$$

表示一个当 $|z| < \rho$ 时收敛的幂级数,则当 $|x_i y_j| < \rho$ 时,

$$\begin{vmatrix} f(x_1 y_1), & \cdots, & f(x_1 y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_n y_1), & \cdots, & f(x_n y_n) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{l_1 > l_2 > \cdots > l_n \geq 0} a_{l_1} a_{l_2} \cdots a_{l_n} \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n} \end{vmatrix}.$$

再取特例

$$f(z) = (1 - z)^{-1},$$

则有

定理 3 当 $|x_i y_j| < 1$ 时,

$$\sum_{l_1 > l_2 > \cdots > l_n \geq 0} \begin{vmatrix} x_1^{l_1}, & \cdots, & x_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{l_n}, & \cdots, & x_n^{l_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^{l_1}, & \cdots, & y_n^{l_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{l_n}, & \cdots, & y_n^{l_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Delta(x_1, \cdots, x_n) \Delta(y_1, \cdots, y_n)}{\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}.$$

这儿 $\Delta(x_1, \cdots x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$.

证明　由定理 2 可知,我们需要证明的是

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1-x_1y_1}, & \cdots, & \frac{1}{1-x_1y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{1-x_ny_1}, & \cdots, & \frac{1}{1-x_ny_n} \end{vmatrix} = \frac{\Delta(x_1,\cdots,x_n)\Delta(y_1,\cdots,y_n)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(1-x_iy_j)}.$$

这个恒等式可以从下一定理中换变数即得

定理 4 (Cauchy)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1}, & \cdots, & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_n+y_1}, & \cdots, & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix} = \frac{\Delta(x_1,\cdots,x_n)\Delta(y_1,\cdots,y_n)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i+y_j)}$$

证明　从第二、第三,…第 n 行中各减第一行,且利用

$$\frac{1}{x_l+y_h}-\frac{1}{x_1+y_h}=\frac{x_1-x_l}{(x_1+y_h)(x_l+y_h)},$$
$$l,h=1,2,\cdots,n,$$

可知上面的行列式等于

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}{\prod_{h=1}^{n}(x_1+y_h)}\begin{vmatrix} 1, & \cdots\cdots 1 \cdots\cdots & 1, \\ \frac{1}{x_2+y_1}, & \frac{1}{x_2+y_2}, \cdots, & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_n+y_1}, & \frac{1}{x_n+y_2}, \cdots, & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}.$$

由第二第三……第 n 列中各减去第一列,则以上的行列式等于

$$\frac{(y_1-y_2)\cdots(y_1-y_n)}{\prod_{j=2}^{n}(x_j+y_1)}\begin{vmatrix} \frac{1}{x_2+y_2}, & \cdots, & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_n+y_2}, & \cdots, & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}.$$

由归纳法得出本定理.

§14 Wronski 行列式的幂级数展开

由于

$$\begin{vmatrix} z_1^{l_1}, & \cdots, & z_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n^{l_1}, & \cdots & z_n^{l_n} \end{vmatrix} = \Delta(z_1,\cdots,z_n)P(z_1,\cdots,z_n),$$

此处 P 是 $z_1\cdots z_n$ 的齐次函数,其次数等于

$$l_1+\cdots+l_n-(n-1)-(n-2)\cdots-2-1$$
$$=l_1+\cdots+l_n-\frac{1}{2}n(n-1).$$

由于 $l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant 0$, 所以除

$$l_1 = n-1,\ l_2 = n-2,\cdots,\ l_{n-1}=1,\ l_n=0$$

以外，P 的次数常大于 0，因此当 $z_1\to 0,\cdots,z_n\to 0$ 时，$P(z_1,z_2,\cdots,z_n)\to 0$. 因此在定理 13.1 的假定下

$$\lim_{\substack{z_1\to 0\\ \cdots\\ z_n\to 0}}\frac{1}{\Delta(z_1,\cdots,z_n)}\begin{vmatrix} f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{n-1}^{(1)}, & a_{n-2}^{(1)}, & \cdots & a_1^{(1)}, & a_0^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1}^{(n)}, & a_{n-2}^{(n)}, & \cdots, & a_1^{(n)}, & a_0^{(n)}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}\begin{vmatrix} f_1(0), & \cdots, & f_n(0)\\ f_1'(0), & \cdots, & f_n'(0)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1^{(n-1)}(0), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(0)\end{vmatrix}.$$

换变数可得

定理 1 如果

$$f_1(z),\cdots,f_n(z)$$

在 $z=z_0$ 时解析，则

$$\lim_{\substack{z_1\to z_0\\ \cdots\\ z_n\to z_0}}\frac{1}{\Delta(z_1,z_2,\cdots,z_n)}\begin{vmatrix} f_1(z_1), & \cdots, & f_1(z_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_n(z_1), & \cdots, & f_n(z_n)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}\begin{vmatrix} f_1(z_0), & \cdots, & f_n(z_0)\\ f_1'(z_0), & \cdots, & f_n'(z_0)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1^{(n-1)}(z_0), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(z_0)\end{vmatrix}.$$

习题 用带余项的 Taylor 公式来处理本定理，减弱关于 $f_1(z),\cdots,f_n(z)$ 的限制. 特别取

$$f_i(z)=z^{l_i},\quad l_i>0,$$

则得

$$\lim_{\substack{z_1\to 1\\ \cdots\\ z_n\to 1}}\frac{1}{\Delta(z_1,\cdots,z_n)}\begin{vmatrix} z_1^{l_1}, & \cdots, & z_n^{l_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ z_1^{l_n}, & \cdots, & z_n^{l_n}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}\begin{vmatrix} 1, & \cdots & 1,\\ l_1, & \cdots & l_n,\\ l_1(l_1-1), & \cdots & l_n(l_n-1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{\Delta(l_1,\cdots,l_n)}{1!2!\cdots(n-1)!}.$$

在定理 13.1 中两边除以 $\Delta(z_1,\cdots,z_n)$ 再命 $z_1\to z,\cdots,z_n\to z$，则得

定理 2　在定理 13.1 假定下

$$\begin{vmatrix} f_1(z), & \cdots, & f_n(z) \\ f_1'(z), & \cdots, & f_n'(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(z), & \cdots, & f_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n\geq 0} \Delta(l_1,\cdots,l_n) \begin{vmatrix} a_{l_1}^{(1)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l_1}^{(n)}, & \cdots, & a_{l_n}^{(n)} \end{vmatrix} \times z^{l_1+\cdots+l_n-\frac{1}{2}n(n-1)}$$

此式的左端称为函数 $f_1, \cdots, f_n$ 的 Wronski 行列式。

第二章　矩阵的相抵性

§1. 符　号

我们用 $A=A^{(m,n)}$ 代表 m 行 n 列的矩阵，而 $A=A^{(n)}=A^{(n,n)}$ 表示 n 行列的方阵。单行矩阵 $(m=1)$ 称为矢量(或称为行矢量)，单列矩阵 $(n=1)$ 称为列矢量。如此，$x=x^{(1,m)}$，$b=b^{(1,n)}$，$A=A^{(m,n)}$。

$$xA=b$$

代表线性方程组

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}=b_j,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

对角线方阵以 $[d_1,\cdots,d_n]$ 表之，其中 $d_1,\cdots,d_n$ 顺次是对角线上的元素。

$I(=I^{(n)})$ 表示 n 行列的单位方阵，$0[=0^{(m,n)}]$ 表示 $m\times n$ 的零矩阵。

A' 表示由 A 经行列互换所得出的矩阵。

和与积的定义和一些简单性质都不再重述．用

$$A\begin{pmatrix} s_1, & \cdots, & s_r \\ t_1, & \cdots, & t_r\end{pmatrix}$$

表示矩阵 A 中取第 $s_1,\cdots,s_r$ 行及 $t_1,\cdots,t_r$ 列所做出的 r 行列的方阵的行列式。

定理 1　命

$$A=A^{(m,n)}=(a_{ij}),\ B=B^{(n,l)}=(b_{jk}),$$
$$C=AB\,(=C^{(m,l)}).$$

如果 $p\leqslant n$，则

$$|(c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}|=\sum_{r_1<r_2<\cdots<r_p} A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & p \\ r_1, & r_2, & \cdots & r_p\end{pmatrix} B\begin{pmatrix} r_1, r_2, & \cdots, & r_p \\ 1, & 2, & \cdots, & p\end{pmatrix}.$$

这和过所有的适合于 $r_1<r_2<\cdots<r_p$ 的 r，这 $r_1,\cdots,r_p$ 是从 $1,2,\cdots,n$ 中取来的．如果 $p>n$，则行列式之值等于 0.

证明　假定 $p\leqslant n$ 由于

$$c_{ij}=\sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj},$$

所以

$$|c_{ij}|_{1\leqslant i,j\leqslant p}=\begin{vmatrix} \sum\limits_{s_1=1}^{n} a_{1s_1}b_{s_11}, & \cdots, & \sum\limits_{s_p=1}^{n} a_{1s_p}b_{s_pp} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum\limits_{s_1=1}^{n} a_{ps_1}b_{s_11}, & \cdots, & \sum\limits_{s_p=1}^{n} a_{ps_p}b_{s_pp}\end{vmatrix}$$

$$= \sum_{s_1=1}^{n} b_{s_1 1} \begin{vmatrix} a_{1s_1}, \sum_{s_2=1}^{n} a_{1s_2} b_{s_2 2}, & \cdots, & \sum_{s_p=1}^{n} a_{1s_p} b_{s_p p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{ps_1}, \sum_{s_2=1}^{n} a_{ps_2} b_{s_2 2}, & \cdots, & \sum_{s_p=1}^{n} a_{ps_p} b_{s_p p} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{s_1=1}^{n} \cdots \sum_{s_p=1}^{n} b_{s_1 1} \cdots b_{s_p p} A\begin{pmatrix} 1, 2, & \cdots, & p \\ s_1, s_2, & \cdots, & s_p \end{pmatrix}. \tag{1}$$

此和中有两个 s_h 相等的项一定等于 0，所以我们仅需讨论诸 $s_1, \cdots, s_p$ 互不相等的诸项。由 $1, 2, \cdots, n$ 中取一组适合于

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_p$$

的整数列. 在 $s_1, \cdots, s_p$ 中有 $p!$ 项经过排列可以得这样的数列. 所以

$$|c_{ij}|_{1\le i,j\le p} = \sum_{r_1<r_2\cdots<r_p} \sum_{t_1,\cdots,t_p} A\begin{pmatrix} 1, & 2, \cdots, & p \\ t_1, t_2, & \cdots, & t_p \end{pmatrix} b_{t_1 1} \cdots b_{t_p p}.$$

这儿 $t_1, \cdots, t_p$ 过 $r_1, \cdots, r_p$ 的所有排列. 由于

$$A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & p \\ t_1, & t_2, & \cdots, & t_p \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & p \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_p \end{pmatrix} \delta^{r_1, \cdots, r_p}_{t_1, \cdots, t_p},$$

可知

$$|c_{ij}|_{1\le i,j\le p} = \sum_{r_1<r_2<\cdots<r_p} A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & p \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_p \end{pmatrix} \sum_{t_1,\cdots,t_p} \delta^{r_1,\cdots,r_p}_{t_1,\cdots,t_p} b_{t_1 1} \cdots b_{t_p p}$$

$$= \sum_{r_1<r_2<\cdots<r_p} A\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & p \\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} r_1, & \cdots, & r_p \\ 1, & \cdots, & p \end{pmatrix}.$$

即得所证.

如 $p > n$ 则和(1)中所有的项都有两个 s 相等，因此所有的项都是 0，故得定理.

附记 1 同法证明更一般的恒等式

$$C\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ t_1, & \cdots & t_p \end{pmatrix} = \sum_{r_1<\cdots<r_p} A\begin{pmatrix} s_1, & \cdots, & s_p \\ r_1, & \cdots, & r_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} r_1, & \cdots, & r_p \\ t_1, & \cdots, & t_p \end{pmatrix}.$$

此处 $r_1, \cdots, r_p$ 仍然从 $1, 2, \cdots, n$ 中选取.

附记 2 两个方阵 A, B 之积之行列式等于 A 与 B 的行列式之积.

§ 2. 秩

如果 A 的 $r+1$ 级子行列式都等于 0 而至少有一个 r 级子行列式 $\neq 0$，则 r 称为 A 的秩.

定理 1 如果 $C = AB$，而 A, B, C 的秩各记为 r_A, r_B, r_C，则

$$r_C \leqslant \min(r_A, r_B).$$

这定理可由上节的结果推出:

如果 A 是可逆方阵，则

$$r_C = r_B.$$

因为由定理 1，可知

$$r_C \leqslant r_B,$$

而又由 $B = A^{-1}C$ 可知

$$r_B \leqslant r_C.$$

同样 B 是可逆方阵，则

$$r_C = r_A.$$

注意 1. 有时取等号，例如

$$A = B = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 有时取不等号，例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = 0.$$

定理 2 如果 $C = A + B$，则

$$r_C \leqslant r_A + r_B.$$

证明 取 $p = r_A + r_B + 1$，考虑 C 的任意一个 p 级子行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1h_1} + b_{i_1h_1}, & \cdots, & a_{i_1h_p} + b_{i_1h_p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i_ph_1} + b_{i_ph_1}, & \cdots, & a_{i_ph_p} + b_{i_ph_p} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i_1h_1}, & a_{i_1h_2} + b_{i_1h_2}, & \cdots, & a_{i_1h_p} + b_{i_1h_p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i_ph_1}, & a_{i_ph_2} + b_{i_ph_2}, & \cdots, & a_{i_ph_p} + b_{i_ph_p} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_{i_1h_1}, & a_{i_1h_2} + b_{i_1h_2}, & \cdots, & a_{i_1h_p} + b_{i_1h_p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{i_ph_1}, & a_{i_ph_2} + b_{i_ph_2}, & \cdots, & a_{i_ph_p} + b_{i_ph_p} \end{vmatrix}.$$

照这样拆下去，可以把这行列式拆为 2^p 个形如

$$\begin{vmatrix} a_{i_1h_1}, & \cdots, & a_{i_1h_s}, & b_{i_1h_{s+1}}, & \cdots, & b_{i_1h_p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i_ph_1}, & \cdots, & a_{i_ph_s}, & b_{i_ph_{s+1}}, & \cdots, & b_{i_ph_p} \end{vmatrix}$$

之和．现在证明这样的行列式 $= 0$，这行列式中或有 r_A 列以上的"a"，或有 r_B 列以上的"b"．即 $s > r_A$ 或 $p - s > r_B$，现在假定 $p - s > r_B$，依第一列展开，展开后再依第二列展开，…，第 s 列展开，最后得如下的形式

$$\sum \pm a_{j_1h_1}a_{j_2h_2}\cdots a_{j_sh_s}\begin{vmatrix} b_{j_{s+1}h_{s+1}}, & \cdots, & b_{j_{s+1}h_p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{j_ph_{s+1}}, & \cdots, & b_{j_ph_p} \end{vmatrix}.$$

这个和中 $j_1, \cdots, j_p$ 在 $i_1, \cdots, i_p$ 中任取，但 $j_s \neq j_t$，由 $p - s > r_B$ 可知，最后的行列式等于 0，同样处理 $s > r_A$ 的情况．因而得出本定理．

附记 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r_C < r_A + r_B$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $r_C = r_A + r_B$.

§3. 初 等 运 算

在解线性方程组时，我们曾经进行过三种运算：

1. 把一个数 q 乘在第 i 个方程上.
2. 在第 i 个方程上减去第 j 个方程的 t 倍.
3. 把第 i 个方程与第 j 个方程互换.

我们看这三种运算反映在矩阵

$$P=\begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n}, & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn}, & b_n \end{pmatrix}$$

上的意义.

1. 对矩阵的第 i 行上元素同成一数 q 也就是在 P 的左边乘以方阵

$$[1,\ \cdots 1,\ \underset{\text{第}\,i\,\text{个}}{q},\ 1,\ \cdots,\ 1],$$

为了方便起见，引进符号 E_{ij}，它是一个 n 行列的方阵，其中除 $a_{ij}=1$ 外，其他的元素都是 0，这样可以写成为

$$[1,\cdots,1,q,1,\cdots,1]=E_{11}+\cdots+E_{i-1i-1}+qE_{ii}+E_{i+1i+1}+\cdots+E_{nn}.$$

2. 每从第 i 行减去第 j 行的对应元素的 t 倍. 也就是在 P 的左边乘以

$$I-tE_{ij}.$$

3. 第 i 行与第 j 行互换，也就是在 P 的左边乘以方阵

$$I-E_{ii}-E_{ij}+E_{ij}+E_{ji}.$$

所以 Gauss 消去法实质上就是在方阵 P 的左边乘以这三类的方阵. 但是第三类方阵是第一、二类方阵的乘积：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

而

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

第二类的方阵称为平延. 在方阵的研究中有极其重要的地位.

定理 1 任何一个满秩方阵可以表为第一、二类方阵的乘积.

证明 方阵

$$A=(a_{ij})$$

的第一列中至少有一非零的元素，乘以一个第三类方阵把 A 变为一个方阵，其中 $a_{11}\neq 0$，乘以

$$[a_{11}^{-1},\ 1,\cdots,\ 1],$$

不妨假定 $a_{11}=1$，乘以

$$I-a_{21}E_{21}.$$

得一方阵 $a_{21}=0$，依法继行，得 $a_{31}=\cdots=a_{n1}=0$。

再同样考虑

$$\begin{pmatrix} a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2}, & \cdots, & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

因此可知：一个满秩方阵左边乘上第一、二、三类的方阵可以把它变为三角形

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13}, & \cdots, & a_{1n} \\ 0 & 1, & a_{23}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的形式，再乘以

$$\begin{pmatrix} 1, & -a_{12}, & 0 & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

便可把 a_{12} 变为 0 续用此法，最后得出

$$I$$

即得

$$L_1L_2\cdots L_rA=I.$$

此处 L_i 都是第一、二、三类的方阵.

由于这些方阵的逆仍然是这些类型

$([1,1,\cdots,q,1,\cdots,1]^{-1}=[1,\cdots,1,q^{-1},1,\cdots,1];(I-tE_{ij})^{-1}=I+tE_{ij}$，$(I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji})^{-1}=I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji})$，故得定理.

附记　这方法可以用来求方阵的逆，仅须记着在进行过程中可以做得"粗"些，例如：

$$\begin{pmatrix} 1, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

的左边乘上

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

可以把第一列第一元素以外的元素一次都化为零. 而这方阵的逆是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

定理 2　任一满秩行列式为 1 的方阵一定是平延之积.

证明提要：1)

$$\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\s & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ts & t\\s & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\-s(1+ts)^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+ts & t\\s & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ts & t\\0 & (1+ts)^{-1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1+ts & t\\0 & (1+ts)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -(1+ts)^{-1}\ t\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ts & 0\\0 & (1+ts)^{-1}\end{pmatrix}.$$

因此，$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$ 可以表为平延的乘积.

2) 不用 $[a_{11}^{-1},\cdots,1]$，而用 $[a_{11}^{-1},a_{11},1\cdots,1]$.

3) 不用 $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ 而用 $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$.

§4. 相　　抵

定义　两个 $m\times n$ 矩阵 A, B 称为相抵，如果有满秩的 $P(=p^{(m)})$, $Q(=q^{(n)})$ 存在使

$$A=PBQ.$$

用符号

$$A\overset{E}{=}B$$

表之.

显然有：1) $A\overset{E}{=}A$; 2)如 $A\overset{E}{=}B$,则 $B\overset{E}{=}A$; 3) 如 $A\overset{E}{=}B$, $B\overset{E}{=}C$,则 $A\overset{E}{=}C$.

定理 1　相抵的必要且充分条件是 A 与 B 的秩相等. 凡秩等于 r 的矩阵一定相抵于

$$\begin{pmatrix}I^{(r)} & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

证明　经过换行换列(即左乘及右乘以第三类的方阵)不仿假定

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\A_3 & A_4\end{pmatrix},\ A_1=A_1^{(r)},\ (A_1)\neq 0,$$

左乘以

$$P=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & 0\\-A_3A_1^{-1} & I\end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix}I & A_1^{-1}\ A_2\\0 & *\end{pmatrix}.$$

这矩阵的秩$=r$，所以 "*" 处等于 0，取

$$Q=\begin{pmatrix}I, & -A_1^{-1}\ A_2\\0, & I\end{pmatrix}$$

即得所求.

秩等于 1 的矩阵可以表为

$$\begin{pmatrix} a_1b_1, & a_1b_2, & \cdots, & a_1b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_mb_1, & a_mb_2, & \cdots, & a_mb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, \cdots, b_n).$$

读者试由定理 1 来推出此结果.

如果 A 的秩等于 m，则可以凑上 $n-m$ 行使

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

是一个可逆方阵.

证明　由于

$$A = P(I, 0)Q,$$

添上

$$C = (0, I)Q,$$

而

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} Q.$$

即得所求.

§5. n 维矢量空间

R_n 代表所有的矢量

$$x = (x_1, \cdots, x_n)$$

的集合，称为 n 维矢量空间.

我们不再复习线性相关及线性无关的一些基本性质，我们只强调一点．m 个矢量

$$x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)}), \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

线性相关与否取决于矩阵

$$X = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}, & \cdots, & x_n^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(m)}, & \cdots, & x_n^{(m)} \end{pmatrix}$$

的秩是否等于 m. 即 X 的秩是 m，则 $x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}$ 线性无关．不然则线性相关．假定其秩等于 r，则其中有 r 个线性无关的矢量，其他的可以表为这几个矢量的线性组合.

假定

$$x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}$$

是 m 个线性无关的矢量，则由

$$x = c_1x^{(1)} + \cdots + c_mx^{(m)}$$

所表出的矢量的全体称为 m 维子空间．这 m 个矢量称为张开这子空间的基本矢量，X 称为这个子空间的表达矩阵．如果另有 l 个矢量

$$y^{(1)}, \cdots, y^{(l)}$$

也张开这子空间．则

$$x^{(i)}=\sum_{j=1}^{l}c_{ij}y^{(j)},\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

即

$$X=CY.$$

由此得 $r(X)\leqslant r(Y)$，同样 $r(Y)\leqslant r(X)$，因此 $r(X)=r(Y)$，因而 $l=m$，即得

X，Y 代表同一子空间，则有一满秩方阵 Q 使

$$X=QY. \tag{1}$$

例 $(1,0,\cdots,0)$ 代表一个一维子空间，其中的所有的元素是 $(x,0,\cdots,0)$，对固定的 $a_1,\cdots,a_n$。$(a_1t,\cdots,a_nt)$ 也代表一个一维子空间.

关系 (1) 称为"左相抵"．显然也是一个等价关系。

§6. 矢量空间的变换

变换

$$y=xA,\ A=A^{(n)} \tag{1}$$

把 R_n 中一个矢量 x 变为一个矢量 y.

如果 A 是满秩的，则可以解得

$$x=yA^{-1}. \tag{2}$$

这称为 (1) 的逆变换．这样的变换 (2) 把 R_n 一一对应地变为其自己。

继行

$$z=yB \tag{3}$$

得

$$z=x(AB).$$

即连续两次变换的方阵等于两个方阵之积.

在 R_n 中有 m 个矢量

$$x^{(1)},\cdots,x^{(m)},$$

则经 (1) 变为 m 个矢量

$$y^{(i)}=x^{(i)}A.$$

写成矩阵形式

$$Y=XA.$$

"相抵"关系的几何意义是 X 所代表的 m 维子空间，经变形(1)变为

$$Y=QXA$$

所代表的 m 维子空间.

由相抵定理立刻推得

定理 1 任何一个 m 维线性子空间，可以由 (1) 变为由

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\quad \varepsilon_2=(0,1,0,\cdots 0)\cdots,\quad \varepsilon_m=(0,\cdots,1,0\cdots 0)$$

所张成的子空间，也可以述为：在变换"群" (1) 之下，m 维子空间成一"可递"集合.

特别有：任一矢量可以由 (1) 变为 $(1,0,\cdots,0)$，或对任意两个矢量我们有一个 (1) 把他们变来变去.

我们不假定 A 是可逆的. 假定 A 的秩等于 r, 则 (1) 把 R_n 映射成为一 r 维子空间. 原因是:

$$PAQ=\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad |P|\neq 0,\ |Q|\neq 0.$$

而

$$y=xA$$

变为

$$yQ=xP^{-1}\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

命 $y^*=yQ$, $x^*=xP^{-1}$,则 $y^*=(\underbrace{*,\cdots,*}_{r\text{个}},0,\cdots,0)$, 这些 y^* 成一 r 维子空间. 因此所有的 y 也成一 r 维子空间.

其次考虑 (1) 把那些 x 变为 0, 求解

$$0=xA,$$

即

$$0=xP^{-1}\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因而得

$$x^*=(\overbrace{0,\cdots,0}^{r\text{个}},*,\cdots,*).$$

所以 (1) 把一个 $n-r$ 维的子空间映射为零.

§7. 长度、角度与面积等

现在考虑实矢量.

定义 两个矢量 a,b 的内积定义为

$$ab'=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=ba'.$$

一个矢量的长度 $=\sqrt{aa'}=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$. 两个矢量 a、b 所夹成的三角形的三边的长度是

$$\sqrt{aa'},\ \sqrt{bb'},\ \sqrt{(a-b)(a-b)'},$$

由余弦定理得

$$(a-b)(a-b)'=aa'+bb'-2\sqrt{aa'bb'}\cos\theta, \tag{1}$$

这儿 θ 是矢量 a 和矢量 b 的夹角. 由 (1) 可知

$$\cos\theta=\frac{ab'}{\sqrt{aa'bb'}}.$$

$ab'=0$, 这二矢量定义为正交,或相互垂直.

这三角形的面积等于

$$\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{aa'bb'}\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{aa'bb'-(ab')^2}.$$

平方根号下的数等于方阵

$$\begin{pmatrix} \underline{a}\underline{a}', & \underline{a}\underline{b}' \\ \underline{b}\underline{a}', & \underline{b}\underline{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$$

的行列式的平方根，由于

$$\underline{a}\underline{a}'\underline{b}\underline{b}' - (\underline{a}\underline{b}')^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2,$$

这等于 $\begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix}$ 中所有的二行列的子行列式的平方和.

一般讲来(我们现在不证)：m个矢量

$$\underline{a}^{(1)}, \cdots, \underline{a}^{(m)}$$

所形成的"m 维单纯形"所谓单纯形：0 及 $\underline{a}^{(i)}(i = 1, \cdots, m)$ 的终点称为顶点过其中的 m点有一 $(m-1)$ 维平面，$m+1$ 个平面所围的体称为m维单纯形作出矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{a}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

则这个单纯形的体积等于

$$\frac{1}{m!} |AA'|^{\frac{1}{2}}.$$

最简单的单纯形的例子是由 $\underline{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0,\cdots,0), \cdots$, $\underline{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$ 所形成的单纯形，也就是

$$x_1 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0, \quad x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1.$$

其次

$$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1.$$

也是一个单纯形，命 $t_1 = x_1$, $t_2 = x_1 + x_2, \cdots$, $t_n = x_1 + \cdots + x_n$ 则第二个形立刻变为第一个形，第二个形的体积是单位立方体的 $\frac{1}{n!}$. 这是显然的，因为 $0 \leqslant x_i \leqslant 1(i = 1, \cdots, n)$ 可以分为 $n!$ 块，而每一块经过变数排列就可以变为以上的形式.

研究体积时还必须考虑序向. 例如：在平面上反时针方向为正，顺向为负，在三维空间如果三矢量的次数成左手座标为正，右手为负，在n 维空间如果我们固定了次序

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \cdots, \underline{e}_n.$$

则经过次序偶排列的为正，奇排列的为负，对 n 个矢量

$$\underline{a}^{(1)}, \cdots, \underline{a}^{(n)}$$

来说，行列式

$$\begin{pmatrix} \underline{a}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{a}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

为正的是正序向，为负的是负序向.

§8. 函数行列式 (Jacobian)

已往考虑过线性变换

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \cdots, m.$$

我们现在考虑非常一般的变换

$$y_i = \varphi_i(x_1, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{1}$$

假定这些 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 都是可以求偏微商的，如此，则

$$dy_i = \sum_{j=1}^{n} dx_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} dx_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

写成矩阵符号得(在不致于引起误解时，用 x 代替 $\underline{x}$ 表示矢量)

$$dy = dx \frac{\partial(y_1, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)},$$

这儿 $dx = (dx_1, \cdots, dx_n)$ 是微分矢量，而矩阵

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, & \cdots, & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

称 Jacobian 矩阵。如果 $z_1, \cdots, z_l$ 又是 $y_1, \cdots, y_m$ 的函数，则

$$dz = dy \frac{\partial(z_1, \cdots, z_l)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}.$$

因此

$$dz = dx \frac{\partial(y_1, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \frac{\partial(z_1, \cdots, z_l)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}.$$

即得 Jacobian 矩阵的乘积法则

$$\frac{\partial(z_1, \cdots, z_l)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = \frac{\partial(y_1, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, \cdots, y_n)} \frac{\partial(z_1, \cdots, z_l)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}.$$

当 $m = n = l$ 时，如果 $z_1 = x_1, \cdots, z_n = x_n$，则得

$$I = \frac{\partial(y_1, \cdots, y_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)} \frac{\partial(x_1, \cdots, x_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}.$$

即如果变换(1)的逆变换存在，则逆变换的 Jacobian 方阵等于原变换 Jacobian 方阵之逆.

§9. 隐函数定理

定理 1 假定方程组

$$F_1(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) = 0, \cdots, F_n(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) = 0 \tag{1}$$

有一个解

$$x_k = x_k^{(0)}, \ y_l = y_l^{(0)}, \ 1 \leqslant k \leqslant m, \ 1 \leqslant l \leqslant n. \tag{2}$$

假定 F_l 在值 (2) 的数域内为连续函数，而且有一级偏微商，并且假定在值 (2) 时

$$\frac{\partial(F_1, \cdots F_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} \neq 0.$$

于是，当 x_k 充分接近于 $x_k^{(0)}$ 时，方程组(1)确定一函数组 $y_l(x_1, \cdots, x_m)$，它们是连续的，

具有一级微商而且满足条件

$$y_l(x_1^{(0)},\cdots,x_m^{(0)})=y_l^{(0)}.$$

证明　对 n 作归纳法，当 $n=1$ 时已知此定理正确，假定对 $(n-1)$ 个方程此定理成立，今后证对 n 个方程也成立。

经过适当地改换函数的号码，可以假定在值(2)处

$$\frac{\partial(F_2,\cdots,F_n)}{\partial(y_2,\cdots,y_n)}\neq 0.$$

因此唯一地确定函数组

$$y_2=\varphi_2(x_1,\cdots,x_m,y_1),\cdots,\quad y_n=\varphi_n(x_1,\cdots,x_m,y_1). \tag{3}$$

以此代入 F_1 中得

$$F_1(x_1,\cdots,x_m,y_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=0. \tag{4}$$

这是 $x_1,\cdots,x_m,y_1$ 的函数，如果能证明它对 y_1 的偏微商不等于0，则可由此得出 y_1，y_1 是 $x_1,\cdots,x_m$ 的适合于定理所要求的函数，再代入(3)即得定理。

因此问题变为求证(4)对 y_1 的微商(指把 $\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 代入得的情况)

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)=\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+\sum_{s=2}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial\varphi_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial y_1}\neq 0, \tag{5}$$

再由

$$F_l(x_1,\cdots,x_m,y_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)\equiv 0$$

可知

$$\frac{\partial F_l}{\partial y_1}+\sum_{s=2}^{n}\frac{\partial F_l}{\partial\varphi_s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial y_1}=0,\quad l=2,\cdots,n. \tag{6}$$

在(5),(6)中消去 $1,\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1}$ 得

$$\begin{vmatrix}-\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial\varphi_2}, & \cdots, & \frac{\partial F_1}{\partial\varphi_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial F_n}{\partial\varphi_2}, & \cdots, & \frac{\partial F_n}{\partial\varphi_n}\end{vmatrix}=0.$$

即得

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial(F_2,\cdots,F_l)}{\partial(y_2,\cdots,y_n)}-\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,x_n)}=0.$$

所以

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right)\neq 0.$$

由此定理立刻推出反演定理。

定理2　设有

$$y_i=f_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{7}$$

假定 f_i 以及其一级偏微商在 $x_i=x_i^{(0)}$ $(i=1,\cdots,n)$ 的邻域内连续而且在此点

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\neq 0,$$

于是方程组(7)唯一地确定一组在值

$$y_i^{(0)} = f_i(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$$

的邻域作为 $y_1, \cdots, y_n$ 的函数看的 $x_k(y_1, \cdots, y_n)$，这些函数是连续的，具有一级微商的，并且适合于

$$x_k^{(0)} = x_k(y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)}).$$

这证明是上述定理取

$$F_i = f_i - y_i$$

的特例.

§10. 复变函数的 Jacobian

如果

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k c_{kj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} y_k c_{kj},$$

则

$$\frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} = \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{\partial(f_1, \cdots, f_n)}$$
$$= C \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} C^{-1},$$

因此

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)}\right) = \det\left(\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right).$$

根据这个结果，我们来证明.

定理 1 假定

$$f_j(z_1, \cdots, z_n), \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

是 n 个复变数函数的解析函数，把变数和函数都分为虚实部分

$$z_k = x_k + iy_k, \quad f_k = u_k + iv_k,$$

则得

$$\det\left(\frac{\partial(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)}\right) = \left|\det \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n)}\right|^2.$$

证明

$$(z_j, \bar{z}_j) = (x_j, y_j)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$

$$(f_j, \bar{f}_j) = (u_j, v_j)\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ i, & -i \end{pmatrix}.$$

因此

$$\det \frac{\partial(u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)} = \det\left(\frac{\partial(f_1, \bar{f}_1, \cdots, f_n, \bar{f}_n)}{\partial(z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_n, \bar{z}_n)}\right)$$
$$= \det \frac{\partial(f_1, \cdots, f_n; \bar{f}_1, \bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_n)}{\partial(z_1, \cdots, z_n; \bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n)}.$$

如果 $f(z)$ 是 z 的解析函数，则由定义可知 $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}=0$，$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}=0$。因此上一行列式等于

$$\det \frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(z_1,\cdots,z_n)} \det \frac{\partial(\bar{f}_1,\cdots,\bar{f}_n)}{\partial(\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)}$$

即得所证。

关于解析函数的隐函数定理有：

定理 2 如果在原点附近 n 个函数

$$F_j(w_1,\cdots,w_n;\ z_1,\cdots,z_n),\quad j=1,\cdots,n$$

是解析的，而且

$$F_j(0,\cdots,0)=0$$

及

$$\det\left(\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(w_1,\cdots,w_n)}\right)\neq 0 \quad w=0,\ z=0.$$

则方程组

$$F_j(w_1,\cdots,w_n,\ z_1,\cdots,z_n)=0,\quad j=1,\cdots,n \tag{1}$$

有唯一解

$$w_j=w_j(z_1,\cdots,z_n),\quad j=1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

此解当 $z=0$ 时，$w=0$ 并且在 $z=0$ 附近是解析的。

证明　我们把方程(1)分为虚实部分，则得出 $2n$ 个方程式，$w_j=u_j+iv_j$ 看成为 $2n$ 个实变数 u_i，v_i，由定理 1，可知作为实变数来说，Jacobian 在原点非零，因此可以解出一个解有一阶的连续偏微商，这解是唯一的，而且在原点处$=0$。

对 $\bar{z}_m$ 微分(1)式得

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial w_p}\frac{\partial w_p}{\partial \bar{z}_m}+\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\partial F_j}{\partial z_\lambda}\frac{\partial z_\lambda}{\partial \bar{z}_m}=0.$$

由于 $\partial z_\lambda/\partial \bar{z}_m=0$，所以

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial w_p}\frac{\partial w_p}{\partial \bar{z}_m}=0,\quad j,m=1,\cdots,n.$$

由于 $\det\left(\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(w_1,\cdots,w_n)}\right)\neq 0$，所以 $\frac{\partial w_p}{\partial \bar{z}_m}=0$，即 w_p 是 $z_1,\cdots,z_n$的解析函数。

§11. 函数相关

现在考虑 n 个变数的 m 个函数

$$\left.\begin{array}{l} u_1=u_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_m=u_m(x_1,\cdots,x_n). \end{array}\right\} \tag{1}$$

假定这些函数是连续的，而且有一阶连续偏微商，如果有一个非零函数

$$F(u_1,\cdots,u_m),$$

当把(1)代入此函数时，得到一个对 $x_1,\cdots,x_n$ 恒等于 0 的式子，这 m 个函数称为函数相关。

我们主要的结果是：考虑 Jacobian 矩阵

$$\frac{\partial(u_1,\cdots,u_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

如果它所有的 $r+1$ 行列的子行列式都恒等于 0，而有一个 r 行列的子行列式不恒等于 0，则有 $m-r$ 个可以表为其他的 u 的函数。当 $n=m=r$ 时，$u_1,\cdots,u_m$ 非函数互依。

如果 $m<n$，我们不妨添 $n-m$ 个函数

$$u_{m+1}=x_{m+1},\cdots,u_n=x_n.$$

如果 $m>n$，不妨假定函数是与另加的 $m-n$ 个变数 $x_{n+1},\cdots,x_m$ 无关的函数，因此今后不妨假定 $m=n$。

这一结果稍为复杂些，我们现在分步分段的说明如下（以下是分析学者的处理方法，我们可以看出逐步思考的过程，下节中我们将归结为代数处理方法）。

为了不与 Jacobian 矩阵 相混淆，我们用

$$\frac{D(u_1,\cdots,u_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}$$

表示 Jacobian 方阵 $\frac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$ 的行列式，或简称为 Jacobian。

定理 1 命 $m=n$，(1) 所定义的函数为函数相关的必要且充分条件是

$$\frac{D(u_1,\cdots,u_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}=0. \tag{2}$$

证明

1）必要性 为了容易理解，我们取 $n=3$：

$$X=f_1(x,y,z),\quad Y=f_2(x,y,z),\quad Z=f_3(x,y,z). \tag{3}$$

假定

$$\frac{D(X,Y,Z)}{D(x,y,z)}\neq 0.$$

即有一点 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$（由 (1) 得出对应点 $X=X_0$，$Y=Y_0$，$Z=Z_0$）使

$$\left(\frac{D(X,Y,Z)}{D(x,y,z)}\right)_{x=x_0,y=y_0,z=z_0}\neq 0.$$

由隐函数定理有 h 存在使适合于

$$|X-X_0|\leqslant h,\ |Y-Y_0|\leqslant h,\ |Z-Z_0|\leqslant h \tag{4}$$

的每一个 (X,Y,Z) 都有 x,y,z 适合于 (1)，换言之，f_1,f_2,f_3 能取区间 (4) 中的任意数值，因此不可能有函数关系

$$F(X,Y,Z)=0$$

存在。

同样理由可以证明，如果

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)},\ \frac{D(X,Y)}{D(y,z)},\ \frac{D(X,Y)}{D(z,x)}$$

中有一个不恒等于 0，则 X,Y 间没有函数关系。

更一般些，如果 $n>m$，而 (1) 所定义的 m 个函数 $u_1,\cdots,u_m$ 有函数关系则

$$\frac{D(u_1,\cdots,u_m)}{D(x_{\alpha_1},\cdots,x_{\alpha_m})}=0.$$

此处 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是取自 $1,\cdots,n$ 中的任意 m 个，也就是 Jacobian 矩阵的"秩"(指恒等)应当 $<m$.

2）充分性　取四个变数为例

$$\left.\begin{aligned}X&=f_1(x,y,z,t)\\Y&=f_2(x,y,z,t)\\Z&=f_3(x,y,z,t)\\T&=f_4(x,y,z,t)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

并且假定

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}&\frac{\partial f_1}{\partial y}&\frac{\partial f_1}{\partial z}&\frac{\partial f_1}{\partial t}\\\frac{\partial f_2}{\partial x}&\frac{\partial f_2}{\partial y}&\frac{\partial f_2}{\partial z}&\frac{\partial f_2}{\partial t}\\\frac{\partial f_3}{\partial x}&\frac{\partial f_3}{\partial y}&\frac{\partial f_3}{\partial z}&\frac{\partial f_3}{\partial t}\\\frac{\partial f_4}{\partial x}&\frac{\partial f_4}{\partial y}&\frac{\partial f_4}{\partial z}&\frac{\partial f_4}{\partial t}\end{vmatrix}\equiv 0.$$

先假定

$$\delta=\frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x,y,z)}\neq 0,$$

则可解得

$$x=\varphi_1(X,Y,Z,t),\ y=\varphi_2(X,Y,Z,t),\ z=\varphi_3(X,Y,Z,t).\tag{6}$$

代入 (5) 中第四式得

$$T=f_4(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,t)=F(X,Y,Z,t).$$

我们只须证明 F 与 t 无关，即

$$\frac{\partial F}{\partial t}\equiv 0.$$

由于

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial f_4}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial z}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_4}{\partial t},\tag{7}$$

这儿 $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}$ 是隐函数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 对 t 的微商，由 (5) 来决定 $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial t}&=0\\\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_2}{\partial t}&=0\\\frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}+\frac{\partial f_3}{\partial t}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

由(7)与(8)消去 $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi_3}{\partial t}$, 1 可得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & & \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & & \frac{\partial f_3}{\partial t} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial t} & -\frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = 0.$$

即得

$$0 = \Delta - \delta\frac{\partial F}{\partial t}.$$

由于 $\delta \neq 0$, 所以 $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, 即函数 X, Y, Z, T 间有关系

$$T = F(X, Y, Z). \tag{9}$$

注意　除这个函数关系之外,不存在其他关系,如不然,以(9)代入,得一个 X, Y, Z 之间的关系,因而 $\delta = 0$, 这与假定不符.

现在再考虑Δ的所有的三阶子行列式都$=0$的情况, 假定有一个二阶子行列式

$$\delta' = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} \neq 0.$$

从(5)的前二式解得

$$x = \varphi_1(X, Y, z, t), \qquad y = \varphi_2(X, Y, z, t).$$

因此

$$Z = f_3(x, y, z, t) = F_1(X, Y, z, t),$$
$$T = f_4(x, y, z, t) = F_2(X, Y, z, t).$$

由

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial t},$$
$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t},$$
$$0 = \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial t},$$

推得

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, z)} = \delta'\frac{\partial F_1}{\partial t},$$

因此 $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$. 同法证明 $\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0$, 因此 F_1 中不会有 t 与 z, 同样处理, F_2 也与 t, z 无关,即有两个关系

$$Z = F_1(X, Y), \qquad T = F_2(X, Y).$$

最后再处理所有的二阶子行列式都 $= 0$, 设有一阶子行列式$\neq 0$, 这样 X, Y, Z, T

中有三个能表为另一个函数．

总之：如果

$$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$$

的秩等于 r，则 $F_1,\cdots,F_n$ 中有 $n-r$ 个可以表为其他 r 个的函数，即函数无关的函数的个数等于 r．而且没有其他的函数关系．

因此不难推得本节的开始的结论．

特例：两个函数 $F_1(x_1,\cdots,x_n)$，$F_2(x_1,\cdots,x_n)$ 是彼此相关的函数的条件是

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}:\frac{\partial F_2}{\partial x_i}$$

与 i 无关．

附记 1　若以上所说的函数

$$F_1, F_2,\cdots, F_n$$

除去变数 $x_1,\cdots,x_n$ 外，如果还有另一些变数 $y_1,\cdots,y_l$，则$\frac{D(F_1,\cdots,F_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\equiv 0$ 仅说明 $F_1,\cdots,F_n$ 间有函数关系，但这个关系可能还依数 $y_1,\cdots, y_l$．

附记 2　如果 X, Y 是 x, y, z 的函数，而 x, y, z 是 u, v 的函数，则

$$\frac{D(X,Y)}{D(u,v)}=\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}+\frac{D(X,Y)}{D(y,z)}\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+\frac{D(X,Y)}{D(z,x)}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}.$$

应用：对数性质的直接证明：假定 $f(x)$是一个函数，当 $x=1$ 时为 0，而其微商等于 $\frac{1}{x}$．令

$$u=f(x)+f(y),\quad v=xy,$$

则

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & \frac{1}{y}\\ y & x\end{vmatrix}=0.$$

因此有一个关系式

$$f(x)+f(y)=\varphi(xy).$$

取 $y=1$，则得 $f(x)=\varphi(x)$．因此得对数性质．

§12．代 数 处 理

在讲代数处理之前先来一个对比：

$$y=xA. \tag{1}$$

此处 $y=y^{(1,m)}, x=x^{(1,n)}$，$A=A^{(n,m)}$．(1) 代表 n 个变数 $x_1,\cdots, x_n$ 的 m 个线性方程组．假定 A 的秩等于 r．

重新编排 y 及 x 的分量，可以使 A 中左上角的 r 行列的子行列式不等于 0，即

$$(y_1,\cdots,y_r,\ y_{r+1},\cdots,y_m)=(x_1,\cdots,x_r,\ x_{r+1},\cdots,x_n)\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}. \tag{2}$$

此处 $A_1=A_1^{(r)},\ A_2=A_2^{(r,m-r)},\ A_3=A_3^{(n-r,r)},\ A_4=A_4^{(n-r,m-r)}$. 由此推得

$$(y_1,\cdots y_r;x_{r+1},\cdots,x_n)=(x_1,\cdots x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_3 & I^{(n-r)}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

代入上式得

$$(y_1,\cdots,y_r,y_{r+1},\cdots,y_m)=(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_3 & I^{(n-r)}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}. \tag{4}$$

由于

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_3 & I^{(n-r)}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & 0\\ -A_3A_1^{-1} & I\end{pmatrix}$$

及 A 的秩等于 r 可知

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_3 & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I^{(r)} & A_1^{-1}A_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因此

$$(y_1,\cdots,y_r,y_{r+1},\cdots,y_m)=(y_1,\cdots,y_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\begin{pmatrix}I & A_1^{-1}A_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{5}$$

即

$$(y_{r+1},\cdots,y_m)=(y_1,\cdots,y_r)A_1^{-1}A_2. \tag{6}$$

即 $y_{r+1},\cdots,y_m$ 可表为 $y_1,\cdots,y_r$ 的线性函数.

现在来处理上节所提出的问题

$$du=dx\,\frac{\partial(u_1,\cdots,u_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}. \tag{1'}$$

重新编排 u 与 x 的次序，可以命 $\dfrac{\partial(u_1,\cdots,u_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$ 中左上角的 r 行列的子行列式 $\neq 0$. 即

$$(du_1,\cdots,du_r,du_{r+1},\cdots,du_m)=(dx_1,\cdots,dx_r,dx_{r+1},\cdots,dx_n)\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}, \tag{2'}$$

此处

$$A_1=\frac{\partial(u_1,\cdots,u_r)}{\partial(x_1,\cdots,x_r)},\ 等.$$

由此推出

$$(du_1,\cdots,du_r,dx_{r+1},\cdots,dx_n)=(dx_1,\cdots,dx_r,\ dx_{r+1},\cdots,dx_n)\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ A_3 & I^{(n-r)}\end{pmatrix}. \tag{3'}$$

同时处理得

$$(du_1,\cdots,du_r,du_{r+1},\cdots,du_m)=(du_1,\cdots,du_r,\ dx_{r+1},\cdots,dx_n)\begin{pmatrix}I & A_1^{-1}A_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{4'}$$

由 Jacobian 乘法法则可知

$$\begin{pmatrix}I & A_1^{-1}A_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{\partial(u_1,\cdots,u_r,u_{r+1},\cdots,u_m)}{\partial(u_1,\cdots,u_r,x_{r+1},\cdots,x_n)} \tag{5}$$

即

$$\frac{\partial u_{r+1}}{\partial x_{r+1}}=\cdots=\frac{\partial u_{r+1}}{\partial x_n}=0. \tag{6}$$

即 u_{r+1} 与 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 无关，同样 $u_{r+2},\cdots,u_m$ 都与 $x_{r+1},\cdots,x_m$ 无关. 因此 $u_{r+1},\cdots,u_m$ 是 $u_1,\cdots,u_r$ 的函数. 即

$$\begin{cases}u_{r+1}=v_{r+1}(u_1,\cdots,u_r),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_m=v_m(u_1,\cdots,u_r)\ .\end{cases} \tag{7}$$

我们现在研究这 $m-r$ 个函数关系之外，是否还有其他. 显然是有的，例如

$$u_{r+1}+u_{r+2}=v_{r+1}+v_{r+2},$$

$$u_{r+1}^3+7u_m^8=v_{r+1}^3+7v_m^8$$

等. 因此，我们还必须明确所谓其他的函数关系. 把(7)写成为

$$\begin{cases}r_1(u_1,\cdots,u_m)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_p(u_1,\cdots,u_m)=0,\quad p=n-r.\end{cases} \tag{8}$$

由 (7) 可知这 p 个函数的函数行列式之秩等于 p.

如果 $u_1,\cdots,u_m$ 适合 (8)，则显然也适合

$$F(r_1,\cdots,r_p)=F(0,\cdots,0). \tag{9}$$

因此如果一个函数依赖于 $r_1,\cdots,r_p$，则也为 $u_1,\cdots,u_m$ 所适合.

所以我们的具体要求应当是：在(8)之外，是否还有

$$r_{p+1}(u_1,\cdots,u_m)=0$$

不与 $r_1,\cdots,r_p$ 函数相关的，也就是以(7)代入它不恒等于 0 的. 回答是：没有了. 如果有从(7)代入得到一个 $u_1,\cdots,u_r$ 的函数. 即 $u_1,\cdots,u_r$ 函数相关，这和原先假定的

$$\frac{\partial(u_1,\cdots,u_r)}{\partial(x_1,\cdots,x_r)}\neq 0$$

相违背.

因此得出上节开始所谈到的结论.

请读者比较这两个处理方法：先看出来龙去脉，再看加工后的优点.

习题 1

$$u_1=\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}},\cdots,\quad u_n=\frac{x_n}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}},$$

则

$$\frac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{1}{(1-x_1^2-x_2^2\cdots-x_n^2)^{1+n/2}}.$$

习题 2

$$x_1=\cos\varphi_1,$$

$$x_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$x_3=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_n,$$

则

$$\frac{D(x_1\cdots x_n)}{D(\varphi_1\cdots\varphi_n)}=(-1)^n\sin^n\varphi_1\sin^{n-1}\varphi_2\sin^{n-2}\varphi_3\cdots\sin^2\varphi_{n-1}\sin\varphi_n.$$

§ 13. Wronskian

n 个单变数的函数 $\phi_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n$ 称为线性相关，如果有一组不全为 0 的常数 C_i 使

$$\sum_{i=1}^{n}C_i\phi_i(x)\equiv 0. \tag{1}$$

假定这些函数里可以微分 $(n-1)$ 次的,则微分 (1) 可得

$$\sum_{i=1}^{n}C_i\phi_i^{(j-1)}(x)\equiv 0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

消去 $C_1,\cdots,C_n$ 即得

$$W(\phi_1,\cdots,\phi_n)=\begin{vmatrix}\phi_1, & \cdots, & \phi_n,\\ \phi_1', & \cdots, & \phi_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi_1^{(n-1)}, & \cdots, & \phi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}\equiv 0.$$

$W(\phi_1,\cdots,\phi_n)$ 称为 Wronskian，这是线性相关的必要性,只在一些添加条件下，充分性才能正确.

我们假定 $W(\phi_1,\cdots,\phi_n)\equiv 0$. 并假定在某区间内 $W(\phi_1,\cdots,\phi_{n-1})\neq 0$. 由

$$\phi_n^{(j-1)}(x)=\sum_{i=1}^{n-1}u_i(x)\phi_i^{(j-1)}(x),\quad j=1,2,\cdots,n, \tag{2}$$

可以算出 $u_i(x)$ (唯一决定),微分(2)式得

$$\phi_n^{(j)}(x)=\sum_{i=1}^{n-1}u_i(x)\phi_i^{(j)}(x)+\sum_{i=1}^{n-1}u_i'(x)\phi_i^{(j-1)}(x), \tag{3}$$

由 (2) 可知

$$0=\sum_{i=1}^{n-1}u_i'(x)\phi_i^{(j-1)}(x),\quad j=1,2,\cdots,n-1.$$

由于 $W(\phi_1,\cdots,\phi_{n-1})\neq 0$，所以 $u_i'(x)\equiv 0$. 即 $u_i(x)=C_i$. 因此

$$\phi_n(x)=\sum_{i=1}^{n-1}C_i\phi_i(x).$$

故得

定理 1 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 中假定 $W(\phi_1,\cdots,\phi_n)\equiv 0$，并假定在其中所有的 $n-1$ 个函数的 Wronskian 不同时为 0，则 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 线性相关.

Peano 之反例:

$$\phi_1(x)=2x^2,\quad \phi_2(x)=x^2,\qquad (x\geqslant 0);$$
$$\phi_1(x)=x^2,\quad \phi_2(x)=2x^2,\qquad (x\leqslant 0).$$

则在 $x \geqslant 0$ 时，$\phi_1(x) = 2\phi_2(x)$，而 $x \leqslant 0$ 时，$\phi_1(x) = \frac{1}{2}\phi_2(x)$.

此定理在含有 $x = 0$ 的区间内不正确，其原因在于当 $x = 0$ 时，$W(\phi_1) = W(\phi_2) = 0$ 不合要求.

但如果加上解析条件则有

定理 2 命 $\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$ 是个解析函数，它们是线性相关的必要且充分条件是 $W(\phi_1, \cdots, \phi_n) \equiv 0$.

第三章　方阵的函数、贯及级数

§1. 方阵的相似性

我们不再复习初等因子等，而仅将方阵相似性的定义与 Jordan 标准型简述如下：

定义　两个 n 行列的复元素方阵 A，B 称为相似；如果有一个满秩的方阵 P 使

$$A = PBP^{-1}.$$

用符号 $A \overset{E}{=} B$ 记之.

显然有 (i) $A \overset{E}{=} A$, (ii) 若 $A \overset{E}{=} B$ 则 $B \overset{E}{=} A$; (iii) 若 $A \overset{E}{=} B$, $B \overset{E}{=} C$，则 $A \overset{E}{=} C$.

定理 1　如果 A 的初等因子是

$$(\lambda-\lambda_1)^{q_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{q_2},\cdots\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{q_s},$$

则 A 相似于

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{pmatrix}.$$

这儿

$$J_i(=J_i^{(q_i)}) = \begin{pmatrix} \lambda_i, & 1, & 0, & \cdots \\ 0, & \lambda_i, & 1, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots\lambda_i \end{pmatrix}.$$

这是一般书上所说的 Jordan 标准型(或法式).

为了应用方便，当 $\lambda_i \neq 0$ 时，我们有时取以下的方阵代替 J_i，

$$\lambda_i J^{(q_i)}, J = J^{(q_i)} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

要证明这点十分容易，因为 $\lambda_i J^{(q_i)} \overset{E}{=} J_i$，更具体些因为

$$J_i = [1,\lambda_i,\lambda_i^2,\cdots,\lambda_i^{(q_i-1)}]\lambda_i J[1,\lambda_i,\cdots,\lambda_i^{(q_i-1)}]^{-1}.$$

以上所说的相似关系是在复数范围内进行的. 在有些应用中我们不希望出现复数. 希望实的经实的变化而变为实的也就是：

定义　两个实元素方阵 A，B 称为实相似，如果有一个实满秩方阵 P 使

$$PAP^{-1} = B.$$

当然我们可以从头研究起. 但是我们既然学会了定理1，我们希望利用它来处理这新的问题.

定理 2　如果实 A 的初等因子

$(\lambda-\lambda_1)^{q_1},\cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{q_s},\ \lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是实数

$(\lambda-\rho_1 e^{i\theta_1})^{p_1},\cdots,(\lambda-\rho_r e^{i\theta_r})^{p_r}$, r 对共轭复数 $\rho_j e^{i\theta_j}$,

$(\lambda-\rho_1 e^{-i\theta_1})^{p_1},\cdots,(\lambda-\rho_r e^{-i\theta_r})^{p_r}$,

则 A 实相似于

$$T=\begin{pmatrix} \lambda_1 J^{(q_1)} & 0 & 0\cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 J^{(q_2)} & 0\cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots & \lambda_s J^{(q_s)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \rho_1 K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho_r K_r \end{pmatrix}.$$

(当 $\lambda_i=0$ 时仍以 $J_{\lambda i}$ 代 $\lambda_i J$) 此处

$$K_i=\begin{pmatrix} \cos\theta_i J^{(p_i)} & \sin\theta_i J^{(p_i)} \\ -\sin\theta_i J^{(p_i)} & \cos\theta_i J^{(p_i)} \end{pmatrix}.$$

这样的标准型是实的.

(读者自证，虚的初等因子共轭成对).

证明 由于

$$\rho\begin{pmatrix} I & -iI \\ I & iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta J & \sin\theta J \\ -\sin\theta J & \cos\theta J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -iI \\ I & iI \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{\rho}{2}\begin{pmatrix} e^{i\theta}J & -ie^{i\theta}J \\ e^{-i\theta}J & ie^{-i\theta}J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \rho e^{i\theta}J & 0 \\ 0 & \rho e^{-i\theta}J \end{pmatrix},$$

所以由定理 1 可知 A 与 T 是复相似的,即有一复方阵 Q 使

$$QAQ^{-1}=T. \tag{1}$$

这儿 A 与 T 都是实的. 我们现在证明一定有一个实的 Q 适合于 (1), 命

$$Q=V+iW.\quad \det(V+iW)\neq 0.$$

则得

$$VA=TV,\qquad WA=TW. \tag{2}$$

考虑

$$f(x)=\det(V+xW),$$

这是一个 x 的实系数多项式. 由于 $f(i)\neq 0$, 所以 $f(x)$ 的系数不都等于 0, 因此有一实数 x_0 使 $f(x_0)\neq 0$, 而

$$P=V+x_0W$$

即合所求. 因为由 (2) 可知

$$(V+x_0W)A=T(V+x_0W),$$

即得

$$PAP^{-1}=T.$$

§2. 方 阵 的 幂

命

$$J=J^{(n)}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&\cdots\\0&1&1&0&\cdots\\0&0&1&1&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix},$$

即 $a_{ii}=1$, $a_{ii+1}=1$, 其他的 a_{ij} 都等于 0.

定理 1

$$J^l=\begin{pmatrix}1&l&\binom{l}{2}&\cdots&\binom{l}{n-1}\\0&1&l&\cdots&\\0&0&1&\cdots&\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\end{pmatrix},$$

即 $a_{ii}^{(l)}=1$, $a_{i,i+1}^{(l)}=\binom{l}{1}$, $a_{i,i+2}^{(l)}=\binom{l}{2}$,……主对角线以下的元素=0.

证明　由

$$\binom{l}{i}+\binom{l}{i-1}=\binom{l+1}{i}$$

及归纳法假定 $J^{l+1}=J^l\cdot J$,

$$a_{ii+p}^{(l+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(l)}a_{ki+p}=a_{ii+p}^{(l)}+a_{i,i+p-1}^{(l)}$$

$$=\binom{l}{p}+\binom{l}{p-1}=\binom{l+1}{p},$$

故得所云.

定理 2

$$\begin{pmatrix}\cos\theta J&\sin\theta J\\-\sin\theta J&\cos\theta J\end{pmatrix}^l=\begin{pmatrix}\cos l\theta J^l,&\sin l\theta J^l\\-\sin l\theta J^l,&\cos l\theta J^l\end{pmatrix}.$$

§3. 方阵乘幂的极限

先看方阵乘幂的极限

$$\lim_{l\to\infty}M^l \tag{1}$$

存在的条件是什么? 一个矩阵其 M_l 当 $l\to\infty$ 时趋于极限 M_0 的意义是 M_l 的第 i 行 j 列的元素 $m_{ij}^{(l)}$ 当 $l\to\infty$ 时趋于 M_0 对应的元素 $m_{ij}^{(0)}$.

看 (1) 的极限与看与M相似的N是否趋于极限完全相同. 因此先看 Jordan 方阵趋限情况.

1) 特征值 λ 的绝对值$|\lambda|>1$ 的情况,由于 $\lim\limits_{l\to\infty}\lambda^l$ 不存在,所以如M有一个特征根它的绝对值>1, 则 (1) 不存在.

2) 如果 $|\lambda|=1$ 而 $\lambda\neq1$, 由于

$$\lim_{l\to\infty}e^{il\alpha},\quad 0<\alpha<2\pi$$

不存在,因而如果M有一个非 1 而绝对值等于 1 的特征根,则 (1) 仍然不存在.

3）如果 1 是特征根，但并非单的初等因子，由于

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^l=\begin{pmatrix}1&l\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\infty\\0&1\end{pmatrix}$$

也不存在.

总之，如果要求（1）存在M只能有绝对值小于 1 的特征根及等于 1 而是单的初等因子的特征根.

4）再看 $|\lambda|<1$ 的情况.

$$(\lambda J)^l=\lambda^l\begin{pmatrix}1,\binom{l}{1},\cdots\\0,\quad 1\quad\cdots\\ \qquad\qquad\ddots\end{pmatrix},$$

由于 $\lambda^l\to 0$，$l\lambda^l\to 0$，$\binom{l}{2}\lambda^l\to 0$，……，所以 $(\lambda J)^l\to 0$ （当 $\lambda=0$ 时，$J_\lambda^n=0$，不必证明）.

因此得

定理 1 如果A仅有绝对值不大于 1 的特征根，而绝对值等于 1 的特征值只有 1，并且它的初等因子是单的. 这样

$$\lim_{l\to\infty}A^l=A_0$$

是存在的. 并且只有这样的情况是存在的.

这极限 A_0 的秩等于A中特征根 1 的重数. 而且 $A_0^2=A_0$（是一幂等元素）.

定理 2 在定理 1 的假定下如果 1 是A的单根，则

$$\lim_{l\to\infty}A^l=u'v,\quad vu'=1.$$

而且 u' 与 u 是A的特征值 1 的特征矢量(列或行). 并且除一常数因子外，这是唯一的.

证明 由定理 1 可知 A_0 的秩等于 1，因此可以写成为 $u'v$，这儿 u，v 是二矢量. 又由于幂等性质，即

$$u'v=u'vu'v=(vu')(u'v).$$

即

$$(1-vu')u'v=0.$$

而 $u'v\neq 0$，所以 $vu'=1$.

再证 v 是对应于A的特征根 1 的特征（行）矢量. 假定 v_1 是对应于A的特征根 1 的特征矢量，即

$$v_1A=v_1,$$

连用 l 次，得

$$v_1A^l=v_1.$$

当 $l\to\infty$，则得

$$v_1u'v=v_1.$$

因此

$$(v_1u')v=v_1.$$

即 v 与 v_1 相差一个常数因子 v_1u'，而且 $vA=v$.

同法证明

$$Au' = u'.$$

定理 3（极限定理） 仍如定理 2 的假定，对任一矢量 x，作矢量

$$xA^l = x_l,$$

则 x_l 的极限仅与 v 相差一个常数因子. 也就是不管原始假定如何最终结果的矢量各支量的比例恒不变.

证明 由

$$\lim_{l\to\infty} xA^l = xu'v = (xu')v$$

而得.

§4. 幂 级 数

现在研究幂级数

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l X^l, \tag{1}$$

这儿 a_l 是复数，X 是一变 n 行列方阵.

假定

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l, \tag{2}$$

的收敛半径是 ρ 即当 $|x| < \rho$ 时(2)收敛.

这问题的研究也就跟 Jordan 标准型代 X 而得的问题等价.

1) 已知当 $|x| < \rho$ 时，

$$\sum a_l x^l,\ \sum a_l \binom{l}{1} x^l,\ \sum a_l \binom{l}{2} x^l, \cdots,\ \sum a_l \binom{l}{n} x^l, \cdots$$

都收敛. 所以如果 X 的所有的特征根的绝对值都 $< \rho$ 时，(1) 也收敛.

2) 当 X 有一个特征根的绝对值 $> \rho$，则 (1) 发散.

3) 当 X 的所有的特征根的绝对值都 $\leqslant \rho$，关于绝对值 $= \rho$ 的特征根 $\lambda_0 = \rho e^{i\theta}$，如果对应于 λ_0 的初等因子 $(\lambda - \lambda_0)^{l_1}, \cdots, (\lambda - \lambda_0)^{l_s}$，$l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_s$，则需要看

$$f(\lambda_0) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (\rho e^{i\theta})^l,$$

$$f'(\lambda_0) = \sum_{l=1}^{\infty} l a_l (\rho e^{i\theta})^{l-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(l_1)}(\lambda_0) = \sum_{l=l_1}^{\infty} l(l-1)\cdots(l-l_1+1) a_l (\rho e^{i\theta})^{l-l_1}$$

是否收敛而定. 如果都收敛，则(1)收敛，有一发散，则 (1) 发散.

§5. 幂级数举例

1)

$$\exp X = e^X = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} X^l$$

这个级数对任意的方阵X都收敛.

如果 $XY = YX$，则

$$e^X \cdot e^Y = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{X^l Y^m}{l!m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!(n-l)!}X^l Y^{n-l}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(X+Y)^n}{n!} = e^{X+Y}.$$

但当 $XY \neq YX$ 时,此式不能成立.

假定X的特征根等于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则 e^X 的特征根等于

$$e^{\lambda_1}, \cdots\cdots, e^{\lambda_n}.$$

由于(当 $\lambda \neq 0$ 时,取 $J = J^{(l)}$)

$$\exp \lambda J = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}J^l = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}\begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l(l-1)}{2} & \cdots \\ 0 & 1 & l & \ddots \\ & \ddots & \ddots & l \\ & & \ddots & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & \lambda e^{\lambda} & \frac{\lambda^2}{2}e^{\lambda} & \cdots \\ & & & e^{\lambda} \end{pmatrix},$$

所以对应的初等因子等于 $(x - e^{\lambda})^l$.

当 $\lambda = 0$ 时 $\exp J_0$ 实际上是一个多项式,而初等因子是 $(x-1)^l$.

2）同样可以定义

$$\cos X = \frac{1}{2}(e^{iX} + e^{-iX}) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{X^{2l}}{(2l)!},$$

$$\sin X = \frac{1}{2i}(e^{iX} - e^{-iX}) = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{X^{2l+1}}{(2l+1)!}.$$

不难直接证明

$$\cos^2 X + \sin^2 X = I.$$

同样可定义

$$\cosh X = \frac{1}{2}(e^X + e^{-X}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{X^{2l}}{(2l)!},$$

$$\sinh X = \frac{1}{2}(e^X - e^{-X}) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{X^{2l+1}}{(2l+1)!}.$$

3）对数函数

$$\log(I + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \cdots\cdots$$

这个级数当X的所有的特征根都小于1时收敛. 不难证明,在同样条件下:

$$e^{\log(I+X)} = I + X.$$

证法,先由 $e^{\log(1+x)} = 1 + x$ 开始得出一些恒等式然后再证上式.

4）二项式展开

$$(I + X)^{\alpha} = I + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}X^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}X^3 + \cdots$$

也是当X的所有特征根都小于1时收敛.

§6. 迭 代 法

看上法

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots \tag{1}$$

是一个极简单的公式，但是它是计算数学上迭代法的根源．当A的特征根的绝对值都小于1时．级数(1)收敛．

迭代法是：求联立方程组

$$x(I-A)=b \tag{2}$$

的解有以下的方法．取 $x_0=b$，逐步地求出

$$x_i=b+x_{i-1}A,\quad i=1,2,\cdots\cdots.$$

这样递代的结果 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i$ 是方程组(1)的解．

证明此点十分容易．由归纳法不难证明

$$x_i=b(I+A+\cdots+A^i).$$

因此

$$\lim_{i\to\infty}x_i=b(I-A)^{-1}.$$

怎样判断，A的特征根的绝对值是否小于1？以下的条件可供参考．如果

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\leqslant g<1, \tag{3}$$

则级数(1)收敛．

证明　命 $A^l=(a_{ij}^{(l)})$，今往证 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}^{(l)}|\leqslant q^l$，用归纳法

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}^{(l+1)}|=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(l)}a_{kj}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}^{(l)}|\right)|a_{kj}|$$

$$\leqslant q^l\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|\leqslant q^{l+1}.$$

所以

$$\sum_{l=0}^{\infty}|a_{ij}^{(l)}|\ \text{收敛}.$$

附记1　这定理不但证明了收敛，而且给出了误差．误差是

$$\sum_{l=n+1}^{\infty}|a_{ij}^{(l)}|\leqslant\sum_{l=n+1}^{\infty}q^l=\frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

附记2　一般的特征值绝对值都小于1的方阵A，可以经过以下的处理使其适合(3)．可以找到一个对角线方阵 $\Lambda=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$ 使

$$\Lambda A\Lambda^{-1}$$

适合于条件(3)．这样 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的存在性可以证之如次．命ρ是A的绝对值最大的特征根之一．而$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$是它所对应的特征矢量

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = \rho \lambda_j,$$

写成方阵形式

$$[\lambda_1, \cdots, \lambda_n](a_{ij})[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]^{-1} = (b_{ij}),$$

而

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \rho.$$

在一般计算时，不一定要真的找出 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 来. 而只要找出 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 使 $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} < 1$ 即可.

附记 3　这个迭代法当然对 $I - A$ 求逆也行. 即命

$$B_0 = I, \quad B_l = I + AB_{l-1}.$$

这个迭代过程还可以考虑以下的收敛得更快的形式

A	$T_1 = I + A$
A^2	$T_2 = T_1 + A^2 T_1$
$A^4 = (A^2)^2$	$T_3 = T_2 + A^4 T_2$
$A^8 = (A^4)^2$	$T_4 = T_3 + A^8 T_3$
……	………

§7. 关于指数函数

定理 1
$$\lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{1}{n}A\right)^n = e^A.$$

证明　由于

$$n\log\left(I + \frac{1}{n}A\right) = A - \frac{1}{2n}A^2 + \frac{1}{3n^2}A^3 + \cdots,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(I + \frac{1}{n}A\right) = A.$$

即得定理

定理 2　一个满秩方阵一定是一个指数函数的值.

证明　1）先考虑最特殊的情况:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I + L \ (J = J^{(q)}).$$

由于 $L^q = 0$, 因此

$$\log J = \log(I + L) = L - \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{3}L^3 \cdots,$$

因此

$$\log J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \cdots\cdots \\ & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = K.$$

即 $J = e^K$.

2）由上推得

$$\lambda J = e^{\log \lambda I + K}.$$

3）不难推到一般的满秩方阵.

定理 3 e^{At} 的所有的元素非负的必要且充分条件是

$$a_{ij} \geqslant 0, \qquad i \neq j.$$

证明 1）先考虑 $a_{ij} > 0$ 的情况由于

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots, \quad (t > 0),$$

所以当 t 充分小时 e^{At} 的所有的元素都是正的（对角线上的元素与 I 的对应元素同号，非对角线上的元素与 At 的对应元素同号）. 由于

$$e^{At} = (e^{At/n})^n$$

可知 e^{At} 的元素也是正的.

2）其次由连续性处理 $a_{ij} \geqslant 0$ 的情况.

3）反之，如果 $a_{12} < 0$，则在

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots = (b_{ij})$$

中，当 t 充分小时，$b_{12} < 0$，因而得出本定理.

§8. 单变数方阵的微分运算

假定 $A(t) = (a_{ij}(t))$ 是 n 行列的方阵，t 是变数. 如果存在，则我们定义

$$\frac{d}{dt}A(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(A(t+h) - A(t)) = \left(\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right)$$

微分的一些性质如下：

(i) $$\frac{d}{dt}(A + B) = \frac{d}{dt}A + \frac{d}{dt}B.$$

(ii) $$\frac{d}{dt}(AB) = A\frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt}B.$$

如果 A 是满秩的，立刻推得（取 $B = A^{-1}$）

(iii) $$\frac{d}{dt}(A^{-1}) = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}.$$

但切需注意 $\frac{dA}{dt}$ 与 A 不一定可交换，因此

$$\frac{dA^2}{dt} = A\frac{dA}{dt} + \frac{dA}{dt}A, \qquad \frac{dA^3}{dt} = A^2\frac{dA}{dt} + A\frac{dA}{dt}A + \frac{dA}{dt}A^2, \text{ 等.}$$

幂级数

$$F(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \cdots,$$

在收敛范围内可以逐项求微分得

$$\frac{dF(t)}{dt} = A_1 + 2A_2 t + 3A_3 t^2 + \cdots.$$

例如:

(iv) $$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}.$$

(v) $$\frac{d}{dt} \log(I + At) = \frac{d}{dt}\left(At - \frac{1}{2} A^2 t^2 + \frac{1}{3} A^3 t^3 - \cdots\right)$$
$$= A(I - At + A^2 t^2 - \cdots) = A(I + At)^{-1}$$

等.

积分也定义为

$$\int_c A(t)\,dt = \int_c (a_{ij}(t))\,dt = \left(\int_c a_{ij}(t)\,dt\right).$$

这积分可以作为实变数在一区间上的,也可以作为复变数在复平面的一个曲线上的. 由 (ii) 推得分部积分公式

$$\int_c A\frac{dB}{dt}dt + \int_c \frac{dA}{dt} B\,dt = AB\Big|_c.$$

第三章的补充

§1. Jordan 标准型的幂级数

1）命

$$J_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix},$$

则

$$J_\lambda^p=\begin{pmatrix}\lambda^p, & p\lambda^{p-1}, & \dfrac{p(p-1)}{2!}\lambda^{p-2}, & \cdots\\ 0, & \lambda^p, & p\lambda^{p-1}, & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0, & 0, & 0, & \cdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^p, & (\lambda^p)', & \dfrac{1}{2!}(\lambda^p)'', & \cdots\\ 0, & \lambda^p, & (\lambda^p)', & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}.$$

证明　用归纳法，由于$(\lambda\cdot\lambda^p)^{(t)}=\lambda(\lambda^p)^{(t)}+t(\lambda^p)^{(t-1)}$，所以

$$\frac{1}{t!}\lambda(\lambda^p)^{(t)}+\frac{1}{(t-1)!}(\lambda^p)^{(t-1)}=\frac{1}{t!}(\lambda^{p+1})^{(t)}.$$

因此得到以上的结果.

2）命

$$f(x)=\sum_{p=0}^{\infty}a_px^p,$$

则

$$f(J_\lambda)=\sum_{p=0}^{\infty}a_p\begin{pmatrix}\lambda^p, & (\lambda^p)', & \dfrac{1}{2}(\lambda^p)'', & \cdots\\ 0, & \lambda^p, & (\lambda^p)', & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}f(\lambda), & f'(\lambda), & \dfrac{1}{2}f''(\lambda), & \cdots\\ 0, & f(\lambda), & f'(\lambda), & \cdots\\ 0, & 0, & f(\lambda), & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}.$$

3）如果

$$X = P(J_{\lambda_1} \dotplus J_{\lambda_2} \dotplus \cdots \dotplus J_{\lambda_s})P^{-1},$$

则

$$f(X) = P(K_{\lambda_1} \dotplus K_{\lambda_2} \dotplus \cdots \dotplus K_{\lambda_s})P^{-1}$$

这儿

$$K_{\lambda i} = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i), & \frac{1}{2}f''(\lambda_i), & \cdots \\ 0 & f(\lambda_i), & f'(\lambda_i), & \cdots \\ 0, & 0, & f(\lambda_i), & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

4）特例有

$$e^{J}\lambda = \begin{pmatrix} e^{\lambda}, & e^{\lambda}, & \frac{1}{2}e^{\lambda}\cdots \\ 0, & e^{\lambda}, & e^{\lambda} \quad \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

而

$$e^{tJ}\lambda = \begin{pmatrix} e^{t\lambda}, & te^{t\lambda}, & \frac{1}{2}t^2e^{t\lambda}, & \cdots \\ 0, & e^{t\lambda}, & te^{t\lambda}, & \cdots \\ 0, & 0, & e^{t\lambda}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

§2. 数的方阵幂

1）我们定义

$$x^A = e^{A\log x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A\log x)^n}{n!},$$

这时

$$x^A \cdot x^B$$

不一定等于

$$x^{A+B}.$$

微商规则

$$\frac{d}{dx}x^A = \frac{d}{dx}e^{A\log x} = \frac{d}{dx}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(A\log x)^l}{l!}$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(A\log x)^{l-1}A}{(l-1)!} = Ax^{A-I}(=x^{A-I}A),$$

这儿用了

$$x^{-I} = e^{-I\log x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-I\log x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\log x)^n}{n!}I$$

$$= x^{-1}I.$$

2)
$$x^{J\lambda}=e^{J\lambda\log x}=\begin{pmatrix} x^{\lambda}, & (\log x)x^{\lambda}, & \dfrac{(\log x)^2}{2!}x^{\lambda}, & \cdots \\ 0, & x^{\lambda}, & (\log x)x^{\lambda}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

如果 λ 的实数部份>0，则

$$\lim_{x\to 0} x^{J}\lambda=0.$$

3) **定理 1** 如果A的所有的特征根的实数部份都>0，则

$$\lim_{x\to 0} x^{A}=0.$$

证明 如果

$$A=PBP^{-1}.$$

则

$$x^{A}=Px^{B}P^{-1}.$$

因此把问题归结为A为 Jordan 标准型的情况来讨论，由 2）知道本定理对 Jordan 标准型对，因而本定理也对。

§3. 特殊 X 的 e^X

1）先看 $n=2$，$X=-X'$，即

$$X=\begin{pmatrix} O & \lambda \\ -\lambda & O \end{pmatrix}.$$

如此则

$$X^2=-\lambda^2 I.$$

因此

$$e^X=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\lambda^2)^l}{(2l)!}I+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\lambda^2)^l\lambda}{(2l+1)!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}.$$

这便是平面上的旋转。

2) $n=3$，

三维空间的旋转是

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma, & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma, & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma, & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma, & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\cos\gamma, & \sin\beta\sin\gamma, & \cos\beta \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此它等于

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

反过来，从一般的三行三列的斜对称方阵

$$X = \theta \begin{pmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{pmatrix}, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

出发，由此得

$$X^2 = -\theta^2(I - u'u).$$

此处 $u = (l, m, n)$, $uu' = l^2 + m^2 + n^2 = 1$. 由此得

$$X^{2l} = (-\theta^2)^l(I - u'u)^l = (-\theta^2)^l(I - u'u), \quad l = 1, 2, \cdots.$$

及

$$uX = 0.$$

因此

$$\begin{aligned} e^X &= I + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^l}{(2l)!}(I - u'u) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^l}{(2l+1)!}(I - u'u)X \\ &= \cos\theta I + (1 - \cos\theta)u'u + \sin\theta X \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta + l^2(1-\cos\theta), & -n\sin\theta + ml(1-\cos\theta), & m\sin\theta + nl(1-\cos\theta) \\ n\sin\theta + ml(1-\cos\theta), & \cos\theta + m^2(1-\cos\theta), & -l\sin\theta + mn(1-\cos\theta) \\ -m\sin\theta + nl(1-\cos\theta), & l\sin\theta + mn(1-\cos\theta), & \cos\theta + n^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

这就是绕以 (l, m, n) 为方向余弦的轴转 θ 度的旋转公式.

3）更一般些，$X = -X'$，则

$$e^X \cdot (e^X)' = e^X \cdot e^{X'} = e^X \cdot e^{-X} = I.$$

即方阵

$$\Gamma = e^X$$

适合于

$$\Gamma\Gamma' = I.$$

即斜对称方阵的指数函数是正交方阵，而 X 称为正交方阵的“无穷小”方阵，如果 Γ 的无穷小方阵是 X，则 Γ^t 的无穷小方阵是 tX 也是

$$\lim_{t \to 0} \frac{I - \Gamma^t}{t} = -X.$$

反过来从 $\Gamma\Gamma' = I$ 出发，命 $\Gamma = e^X$，则由

$$e^X = \Gamma = (\Gamma')^{-1} = e^{-X'},$$

可推得 $X = -X'$.

4）假定 $trX = 0$，即 X 的诸特征根之和等于 0，因此 e^X 诸特征根之积等于 1，即得：如果 $trX = 0$，则

$$|e^X| = 1.$$

5）命 $n = 2l$

$$F = \begin{pmatrix} O^{(l)} & I \\ -I & O \end{pmatrix}.$$

假定 X 适合于

$$FX + X'F = O,$$

则 $FX^n = (-1)^n X'^n F$，所以

$$Fe^X = \sum_{n=0}^{\infty} F\frac{X^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-X')^n}{n!} = e^{-X'}F.$$

命 $P=e^X$，则

$$P'FP=F.$$

6）如果

$$X=-\overline{X}',$$

则

$$e^X(e^{\overline{X}})'=e^Xe^{-X}=I.$$

§ 4. e^X 与 X 的对应关系

1）给了 X，我们可以由

$$M(X)=e^X=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{X^l}{l!}$$

得出 e^X。另一方面，如果M非奇异，则可以表为 e^X，而且有关系

$$\lim_{t\to 0}\frac{M^t-I}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{Xt}-I}{t}=X.$$

由此显然可得

i）M^{-1} 对应于$-X$.

ii）M' 对应于 X'.

iii）$\overline{M}$ 对应于 $\overline{X}$.

M 的正交性，即 $M'=M^{-1}$，变为X的斜对称性 $X'=-X$，M的酉方阵性，即 $\overline{M}'=M^{-1}$，变为 iX 的 Hermite 性.

2）最重要的一个对应关系是

$$e^{sX}\cdot e^{tY}\cdot(e^{sX})^{-1}(e^{tY})^{-1},$$

所对应的元素是

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\frac{e^{SX}\cdot e^{tY}\cdot e^{-SX}\cdot e^{-tX}-I}{st}\\
&=\lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}\frac{e^{SX}-I+e^{SX}e^{tY}(e^{-SX}-I)e^{-tY}}{st}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{X-e^{tY}Xe^{-tY}}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{X(I-e^{-tY})+(I-e^{tY})Xe^{-tY}}{t}\\
&=XY-YX.
\end{aligned}$$

第四章　常系数差分方程与常微分方程

§1. 差分方程

一个变数的差分方程通常是指：求出函数 $y=y(x)$ 适合于方程

$$F(y(x+n\delta),y(x+(n-1)\delta),\cdots,y(x+\delta),\ y(x),x)=0, \tag{1}$$

这儿 δ 是一个固定的数.

并不失去普遍性，在研究差分方程 (1) 时，我们假定 $\delta=1$. 并且假定我们已经解出

$$y(x+n)=\varphi(y(x+n-1),\cdots,y(x+1),y(x),x). \tag{2}$$

如果已经知道了

$$y(0)=c_0,y(1)=c_1,\cdots,y(n-1)=c_{n-1}. \tag{3}$$

则公式 (2) 便是一个递推公式，可以逐步地算出

$$y(n),\ y(n+1),\ y(n+2),\cdots$$

等值.

这样的差分方程称为 n 级的差分方程，所给的数值 (3) 称为初始值. 注意，当初始值定了，我们可以得出 y 在所有的自然数 n 时的数值，而并不能决定其他值，但如果给与了

$$y(\tau),y(\tau+1),\cdots,y(\tau+n-1), \tag{4}$$

则我们可以得出

$$y(\tau+l),\quad l=0,1,2,3,\cdots$$

诸值. 只有在 $0\leqslant\tau<1$ 中给了 n 个函数

$$y(\tau+p)=\varphi_p(\tau),\quad p=0,1,\cdots,n-1, \tag{5}$$

才能在整个直线上决定 $y(x)$, $x\geqslant 0$.

如果 (2) 还可以解出 $y(x)$ 的数值，则因而也可决定 $x\leqslant 0$ 时的 $y(x)$ 值.

差分方程的用场随着电子计算机而日益显著. 首先是在求微分方程的数值解法时，我们常用差分法，变为差分方程求解；其次，我们可以直接处理离散类型的问题，而不必经过微分方程，很可能原始数据是离散的，最后要求的解答也是离散性的，这样我们可以经过代数运算而直接处理，这是为什么本书中首先着重在线性方程的数值计算，其次差分方程，再其次是微分方程的道理.

把常微分方程

$$y^{(n)}(x)=\varphi(y^{(n-1)}(x),\cdots y'(x),y(x),x) \tag{6}$$

中的微商 $y^{(i)}(x)$ 代以未取极限之前的形式；即以

$$\frac{y(x+\delta)-y(x)}{\delta}\text{ 代 } y'(x)$$

$$\frac{y(x+2\delta)-2y(x+\delta)+y(x)}{\delta^2}\text{ 代 } y''(x) \text{ 等等.}$$

于是我们就得出一个差分方程.

这差分方程的解与δ有关，当 $\delta\to 0$ 时，一般它可能是微分方程(6)的解，我们先举几个例子来加以说明.

例1　解一级齐次差分方程

$$y(x+1)=ay(x),\ y(0)=c.$$

由归纳法易证

$$y(n)=a^n c,\ n=0,1,2,\cdots. \tag{7}$$

再考虑一阶齐次微分方程

$$y'(x)=\lambda y(x),\ y(0)=k, \tag{8}$$

其差分形式是

$$y(x+\delta)-y(x)=\delta\lambda y(x),$$

即

$$y(x+\delta)=(1+\delta\lambda)y(x).$$

由差分方程的结果易见

$$y(n\delta)=k(1+\lambda\delta)^n.$$

命 $n\delta=x$，则

$$y(x)=k\left(1+\frac{x\lambda}{n}\right)^n.$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$y(x)=ke^{\lambda x},$$

这就是微分方程的解.

例2　解

$$y(x+1)=ay(x)+f(x),\quad y(0)=c.$$

命

$$y(x)=a^x c(x),\quad c(0)=c,$$

则得

$$c(x+1)=c(x)+a^{-x-1}f(x).$$

因此得出

$$c(l)=c+\sum_{p=1}^{l}a^{-p}f(p-1).$$

所以

$$y(l)=ca^l+\sum_{p=1}^{l}a^{l-p}f(p-1).$$

再考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\lambda y(x)+g(x),y(0)=c.$$

由此导出差分方程

$$y(x+\delta)=(1+\delta\lambda)y(x)+\delta g(x).$$

因此得

$$y(l\delta)=c(1+\delta\lambda)^l+\delta\sum_{p=1}^{l}(1+\delta\lambda)^{l-p}g((p-1)\delta),$$

命 $l\delta = x$，

$$y(x) = c\left(1+\frac{x\lambda}{l}\right)^l + \frac{x}{l}\sum_{p=1}^{l}\left(1+\frac{x\lambda}{l}\right)^{l-p} g((p-1)x/l)$$

$$= C\left(1+\frac{x\lambda}{l}\right)^l + \left(1+\frac{x\lambda}{l}\right)^l \cdot \frac{x}{l}\sum_{p=1}^{l} g\left(\frac{(p-1)x}{l}\right) e^{-p\lg\left(1+\frac{x\lambda}{l}\right)},$$

当 $l \to \infty$ 时，$y(x)$ 趋于

$$e^{\lambda x}\left(C + \int_0^x g(t)e^{-\lambda t}dt\right).$$

这就是所讨论的微分方程的解。

附记，固然我们可以用

$$\frac{y(x+\delta)-y(x)}{\delta}$$

来代 $y'(x)$，但有时我们也可以用

$$\frac{y(x+\delta)-y(x-\delta)}{2\delta}$$

来代 $y'(x)$，一般讲来后者比前者还好些，原因是

$$\frac{y(x+\delta)-y(x-\delta)}{2\delta} - y'(x) \sim \frac{\delta^2}{6}y'''(x+\theta\delta)$$

$$\left(y(x+\delta) = y(x) + \delta y'(x) + \frac{\delta^2}{2}y''(x) + \frac{\delta^3}{6}y'''(x+\theta\delta)\right)$$ 比

$$\frac{y(x+\delta)-y(x)}{\delta} - y'(x) \sim \frac{\delta}{2}y''(x+\theta'\delta)$$

更精确些。

§2. 常系数线性差分方程——母函数法

解 n 级差分方程

$$a_0y(x+n) + a_1y(x+n-1) + \cdots + a_ny(x) = g(x), \tag{1}$$

其初始条件是

$$y(0) = c_0, \cdots, y(n-1) = c_{n-1}. \tag{2}$$

1）先研究 $g(x) = 0$ 的情况，作母函数

$$F(x) = \sum_{l=0}^{\infty} y(l)x^l. \tag{3}$$

乘以

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i, \tag{4}$$

则得

$$F(x)\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} y(l)a_ix^{i+l}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} x^p \sum_{i\leqslant\min(n,p)} a_iy(p-i). \tag{5}$$

当 $p \geqslant n$ 时，

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(p-i) = 0.$$

而当 $p < n$ 时，

$$\sum_{i=0}^{p} a_i y(p-i) = \sum_{i=0}^{p} a_i c_{p-i} = b_p,$$

则由 (5) 可知

$$F(x)\Phi(x) = B(x). \tag{6}$$

此处

$$B(x) = \sum_{p=0}^{n-1} b_p x^p,$$

因此

$$F(x) = \frac{B(x)}{\Phi(x)}. \tag{7}$$

求出 $F(x)$ 的幂级数展开式，其 x^l 的系数便是 $y(l)$，即

$$y(l) = \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dx^l}F(x)\Big|_{x=0}.$$

这样来求 x^l 的系数有时并不是最方便的，一般可用分项分数法，命

$$\sum_{v=0}^{n} a_v x^v = a_0 \prod_{v=1}^{s} (1-\lambda_v x)^{l_v}.$$

用分项分数法

$$\frac{B(x)}{\Phi(x)} = \sum_{v=1}^{s}\left(\frac{a_{v1}}{1-\lambda_v x} + \cdots + \frac{a_v l_v}{(1-\lambda_v x)^{l_v}}\right),$$

由于

$$\frac{1}{(1-\lambda_v x)^p} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+m-1)}{m!}(\lambda_v x)^m,$$

所以

$$y(m) = \sum_{v=1}^{s}\sum_{p=1}^{l_v} a_{vp}\frac{p(p+1)\cdots(p+m-1)}{m!}\lambda_v^m. \tag{8}$$

2) 再看一般的 $g(x)$。在 (5) 中，当 $p \geqslant n$ 时，

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(p-i) = g(p-n).$$

因而

$$F(x)\Phi(x) = B(x) + \sum_{p=n}^{\infty} g(p-n)x^p = B(x) + x^n \sum_{p=0}^{\infty} g(p)x^p.$$

这儿

$$a(x) = \sum_{p=0}^{\infty} g(p)x^p$$

是函数 $g(x)$ 的母函数，因而

$$F(x)=(B(x)+x^n a(x))/\Phi(x). \tag{9}$$

依然可以用分项分数法处理 $1/\Phi(x)$，然后由展开式得 x^l 的系数。

§3. 第二法——降阶法

命

$$\Phi(p)=\sum_{v=0}^{n-1} b_v y(n-1-v+p).$$

作出

$$\Phi(p+1)-\lambda\Phi(p)=\sum_{v=0}^{n-1} b_v y(n-v+p)-\lambda\sum_{v=1}^{n} b_{v-1}y(n-v+p)$$

$$=\sum_{v=0}^{n}(b_v-\lambda b_{v-1})y(n-v+p)\quad (b_{-1}=0, b_n=0)$$

$$=\sum_{v=0}^{n} a_v y(n-v+p),$$

此处

$$a_v=b_v-\lambda b_{v-1}.$$

作多项式

$$\sum_{v=0}^{n} a_v x^v=\sum_{v=0}^{n}(b_v-\lambda b_{v-1})x^v=\sum_{v=0}^{n-1} b_v x^v-\lambda\sum_{v=1}^{n} b_{v-1}x^v=(1-\lambda x)\sum_{v=0}^{n-1} b_v x^v. \tag{1}$$

因此如果 (1) 成立，则差分方程

$$\sum_{v=0}^{n} a_v y(n+p-v)=g(p) \tag{2}$$

可以写成为

$$\Phi(p+1)-\lambda\Phi(p)=g(p),\ \Phi(0)=\sum_{v=0}^{n-1} b_v c_{n-1-v}. \tag{3}$$

形如 (3) 的差分方程已经在 §1 中解决了，解得的 $\Phi(p)$ 再从第 $n-1$ 级的差分方程

$$\sum_{v=0}^{n-1} b_v y(n-1-v+p)=\Phi(p)$$

解决之。

§4. 第三法——Laplace 变换法

解差分方程

$$y(t+1)=ay(t)+g(t), \tag{1}$$

并且要求当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时

$$y(t)=\varphi(t).$$

作 Laplace 变换

$$x(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}y(t)dt,\tag{2}$$

则

$$\int_0^{\infty}e^{-st}y(t+1)dt=e^s\int_1^{\infty}e^{-st}y(t)dt=e^s\int_0^{\infty}e^{-st}y(t)dt-e^s\int_0^1e^{-st}\varphi(t)dt$$

$$=e^sx(s)-e^s\int_0^1e^{-st}\varphi(t)dt.$$

另一方面由 (1)

$$\int_0^{\infty}e^{-st}y(t+1)dt=a\int_0^{\infty}e^{-st}y(t)dt+\int_0^{\infty}e^{-st}g(t)dt=ax(s)+\int_0^{\infty}e^{-st}g(t)dt.$$

因此

$$e^sx(t)-e^s\int_0^1e^{-st}\varphi(t)dt=ax(s)+\int_0^{\infty}e^{-st}g(t)dt,$$

即

$$x(s)=\frac{1}{e^s-a}\left[e^s\int_0^1e^{-st}\varphi(t)dt+\int_0^{\infty}e^{-st}g(t)dt\right].$$

利用反转公式可得 $y(t)$.

注意　虽然我们讲了三个方法(及以下的第四个方法)但实质上并没有太高的差异,讲来讲去绕不过分项分数这一关. 请读者注意.

§5. 第四法——矩阵法

考虑线性差分方程组

$$y_i(t+1)=\sum_{j=1}^{n}y_j(t)a_{ji}+b_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{1}$$

n 级差分方程

$$a_0y(t+n)+a_1y(t+n-1)+\cdots+a_ny(t)=g(t)$$

可以看成为 (1) 的特例:

$$\begin{aligned}
&y_1(t+1)=y_2(t),\quad && y_1(t)=y(t),\\
&y_2(t+1)=y_3(t) && y_2(t)=y(t+1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && y_3(t)=y(t+2),\\
&y_{n-1}(t+1)=y_n(t) && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$y_n(t+1)=-\frac{1}{a_0}(a_1y_n(t)+\cdots+a_ny_1(t))+\frac{1}{a_0}g(t),$$

把 (1) 式写成为矩阵形式

$$y(t+1)=y(t)A+b(t),\quad y(0)=c,$$

这儿 $y(t)$ 是矢量, $b(t)$ 是已知矢量, A 是方阵, C 是常矢量.

先看 $b(t)=0$ 的情况.

由归纳法易见(比较§1)

$$y(l)=CA^l.$$

一般的 $b(t)$ 我们可得

$$y(l) = CA^l + \sum_{p=1}^{l} b(p-1)A^{l-p}.$$

写成矩阵表达形式，形式上较复杂的问题一下子变为原则上同样简单的问题了。

§6. 常系数线性微分方程

我们现在考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = xA + b(t), \quad x(0) = c. \tag{1}$$

此处 x 是未知矢量，($A = A^{(n)}$) 常元素方阵，$b(t)$ 已知矢量。

$$X(t) = e^{At}.$$

已知

$$\frac{dX}{dt} = XA, \quad X(0) = I$$

系以矢量 C，则得

$$\frac{dcX}{dt} = (cX)A, \quad cX(0) = c.$$

因而 $x = cX$ 就是(1)式的解 ($b(t) = 0$)。

如果 $b(t) \neq 0$，命

$$x = y(t)e^{At}, \quad y(0) = c,$$

则

$$\frac{dy}{dt}e^{At} + ye^{At}A = ye^{At}A + b(t).$$

即得

$$\frac{dy}{dt} = b(t)e^{-At},$$

因此

$$y(t) - c = \int_0^t b(t)e^{-At}dt,$$

即得

$$x(t) = \left(c + \int_0^t b(\tau)e^{-A\tau}d\tau\right)e^{At}.$$

习题 读者试用

$$\frac{X(t+\delta) - X(t)}{\delta} \text{ 代 } \frac{dX}{dt}.$$

而由上节的结果推出本节的结果。

§7. 有重量质点绕地球运动

现在举一个例子，一个有重量的质点在地球表面邻近的真空里，考虑地球运动的作用在内，研究这质点的运动。

命 v 代表质点对地球的速度，命 ω 代表地球的角速度：质点对地球的 coriolis 惯性等于 $2m\omega\times v$（这儿×代表矢量的矢量积，质点对地球的加速度为重力常数 mg. 于是质点运动的微分方程式是:

$$\frac{dv}{dt}=g-2\omega\times v. \tag{1}$$

按矢量积的定义

$$\omega\times v=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\times(v_1,v_2,v_3)=(\omega_2v_3-\omega_3v_2,\omega_3v_1-\omega_1v_3,\omega_1v_2-\omega_2v_1),$$

因此

$$2\omega\times v=-vA, \tag{2}$$

此处

$$A=-2\begin{pmatrix}0&\omega_3&-\omega_2\\-\omega_3&0&\omega_1\\\omega_2&-\omega_1&0\end{pmatrix}.$$

(2) 代入 (1) 式得

$$\frac{dv}{dt}=vA+g, \tag{3}$$

由此解得

$$v=v_0e^{At}+g\int_0^t e^{A(t-s)}ds=v_0e^{At}+g\int_0^t e^{A\tau}d\tau. \tag{4}$$

这儿

$$v_0=v|_{t=0}.$$

再积分，定出动点的动径

$$r=r_0+v_0\int_0^t e^{A\tau}d\tau+g\int_0^t d\tau\int_0^\tau e^{A\tau_1}d\tau_1^*, \tag{5}$$

此处

$$r_0=r|_{t=0}.$$

现在求 A^2, A^3, 显然有

$$A^2=-4(\omega\omega'I-\omega'\omega).$$

又由于 $\omega A=0$, 可知

$$A^3=-4\omega\omega'A+4\omega'\omega A=-4\omega\omega'A.$$

因此，当 $l=0,1,2,\cdots$, 时，

$$A^{2l+1}=(-4\omega\omega')^lA.$$

当 $l=1,2,\cdots$ 时，

$$A^{2l}=(-4\omega\omega')^{l-1}A^2=(-4\omega\omega')^lI+4(-4\omega\omega')^{l-1}\omega'\omega.$$

因此

$$e^{At}=I+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-4\omega\omega')^lt^{2l+1}}{(2l+1)!}A+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^{2l}}{(2l)!}[(-4\omega\omega')^lI+4(-4\omega\omega')^{l-1}\omega'\omega]$$

$$=\cos(2\sqrt{\omega\omega'}\,t)I+\frac{\sin(2\sqrt{\omega\omega'}\,t)}{2\sqrt{\omega\omega'}}A-\frac{1}{\omega\omega'}(\cos(2\sqrt{\omega\omega'}\,t)-1)\omega'\omega.$$

---

* 不要轻易用公式 $\int_0^\tau e^{A\tau}d\tau=(e^{At}-I)A^{-1}$. 因 A^{-1} 不存在。

$$\int_0^t e^{A\tau}d\tau = \frac{\sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{2\sqrt{\omega\omega'}}I + \frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4\omega\omega'}A$$

$$-\frac{1}{\omega\omega'}\left(\frac{\sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{2\sqrt{\omega\omega'}} - t\right)\omega'\omega;$$

$$\int_0^t d\tau\int_0^\tau e^{A\tau_1}d\tau_1 = \frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4\omega\omega'}I + \frac{t - \dfrac{\sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{2\sqrt{\omega\omega'}}}{4\omega\omega'}A$$

$$-\frac{1}{\omega\omega'}\left(\frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4\omega\omega'} - \frac{1}{2}t^2\right)\omega'\omega;$$

因此

$$r = r_0 + v_0\left[\frac{\sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{2\sqrt{\omega\omega'}}I + \frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4\omega\omega'}A\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega\omega'}\left(\frac{\sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{2\sqrt{\omega\omega'}} - t\right)\omega'\omega\right]$$

$$+g\left[\frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4ww}I + \frac{2\sqrt{\omega\omega'}\,t - \sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{8\sqrt{\omega\omega'^3}}A\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega\omega'}\left(\frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4\omega\omega'} - \frac{1}{2}t^2\right)\omega'\omega\right].$$

由于 $xA = -2\omega\times x$. 因此得.

$$r = r_0 + \frac{\sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{2\sqrt{\omega\omega'}}v_0 - \frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{2\omega\omega'}\omega\times v_0$$

$$-\frac{1}{\omega\omega'}\left(\frac{\sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{2\sqrt{\omega\omega'}} - t\right)v_0\cdot\omega'\cdot\omega$$

$$+\frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4\omega\omega'}g - \frac{2\sqrt{\omega\omega'}\,t - \sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4(\sqrt{\omega\omega'})^3}\omega\times g$$

$$-\frac{1}{\omega\omega'}\left(\frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4\omega\omega'} - \frac{1}{2}t^2\right)g\omega'\omega.$$

当 $v_0 = 0$ 时,

$$r = r_0 + \frac{t^2}{2}g - \frac{2\sqrt{\omega\omega'}\,t - \sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4(\omega\omega')^{3/2}}\omega\times g$$

$$+\frac{1-\cos 2\sqrt{\omega\omega'}\,t - 2\omega\omega' t^2}{4\omega\omega'^{3/2}}\left(-\frac{g\omega'\omega}{\sqrt{\omega\omega'}} + \sqrt{\omega\omega'}\,g\right),$$

第一二项 r_0, $\frac{t^2}{2}g$ 是原位置与由地心引力所得出的,第三项

$$\frac{2\sqrt{\omega\omega'}\,t - \sin 2\sqrt{\omega\omega'}\,t}{4(\omega\omega')^{3/2}}(g\times\omega)$$

表示垂直于子午线平面方向东的偏差. 最后一项表示在子午线平面上离开地轴方向(垂直于地轴)的偏差.

对于数值很小的角速度(例如：地球自转 $\sqrt{\omega\omega'}\approx 7.3\times 10^{-5}$秒$^{-1}$)，可以不计$\sqrt{\omega\omega'}$的二次与高次项，因此，由地球所引起的偏差位置有以下的近似公式

$$-\omega\times\left(t^2v_0+\frac{1}{3}t^3g\right).$$

§8. 振　动

在研究振动现象的时候，常出现二级微分方程组

$$\frac{d^2x}{dt^2}+xA=0. \tag{1}$$

这儿 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$A=A^{(n)}$.

命

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

则(1)可以写成为

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=(x,y)\begin{pmatrix}0 & -A\\ I & 0\end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & \sqrt{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -A\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & \sqrt{A}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{A}\\ \sqrt{A} & 0\end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix}I & iI\\ 1 & -iI\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -I\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & iI\\ I & -iI\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}iI & -I\\ -iI & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-iI & -iI\\ -I & 1\end{pmatrix}\frac{1}{-2i}$$
$$=\begin{pmatrix}iI & 0\\ 0 & -iI\end{pmatrix},$$

如果命

$$\Gamma=\begin{pmatrix}I & iI\\ I & iI\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & \sqrt{A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & i\sqrt{A}\\ I & -i\sqrt{A}\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}0 & -A\\ I & 0\end{pmatrix}=\Gamma^{-1}\begin{pmatrix}i\sqrt{A} & 0\\ 0 & -i\sqrt{A}\end{pmatrix}\Gamma.$$

即得

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)\Gamma^{-1}=(x,\ y)\Gamma^{-1}\begin{pmatrix}i\sqrt{A} & 0\\ 0 & -i\sqrt{A}\end{pmatrix}.$$

命

$$(x,y)\Gamma^{-1}=(u,v),$$

则

$$\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) = (u,v) \begin{pmatrix} i\sqrt{A} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{A} \end{pmatrix}.$$

即

$$u = ce^{i\sqrt{A}t}, \quad v = de^{-i\sqrt{A}t}.$$

因此得出

$$(x, y) = (u, v)\Gamma = (c, d)\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{A}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{A}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\sqrt{A} \\ I & -i\sqrt{A} \end{pmatrix}$$

即

$$x = ce^{i\sqrt{A}t} + de^{-i\sqrt{A}t}, \tag{2}$$

$$y = i(ce^{i\sqrt{A}t} - de^{-i\sqrt{A}t})\sqrt{A},$$

方程组 (1) 的初始条件是当 $t = 0$ 时,

$$x = x_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0. \quad (= y_0).$$

如此则由 (2) 可知

$$x_0 = c + d,$$

$$v_0 = i(c - d)\sqrt{A}, \quad c - d = -iv_0 A^{-\frac{1}{2}},$$

即

$$c = \frac{1}{2}(x_0 - iv_0 A^{-\frac{1}{2}}), \quad d = \frac{1}{2}(x_0 + iv_0 A^{-\frac{1}{2}}).$$

代入 (2) 得

$$x = \frac{1}{2}(x_0 - iv_0 A^{-\frac{1}{2}})e^{i\sqrt{A}t} + \frac{1}{2}(x_0 + iv_0 A^{-\frac{1}{2}})e^{-i\sqrt{A}t}$$

$$= x_0 \cos\sqrt{A}t + v_0 A^{-\frac{1}{2}} \sin\sqrt{A}t, \tag{3}$$

这便是方程 (1) 的解了.

再考虑非齐次组

$$\frac{d^2x}{dt^2} + xA = f(t)$$

可以写成为

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (x,y) \begin{pmatrix} 0 & -A \\ I & 0 \end{pmatrix} + (0, f(t)).$$

因而不难算出

$$x = x_0(\cos\sqrt{A}t) + v_0(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t) + \left[\int_0^t f(\tau)\sin(\sqrt{A}(t-\tau))d\tau\right](\sqrt{A})^{-1}.$$

如果把 $t = t_0$ 作为开始时间,则解答换为

$$x = x_0(\cos\sqrt{A}(t-t_0)) + v_0(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}(t-t_0)) + \left[\int_{t_0}^t f(\tau)\sin(\sqrt{A}(t-\tau))d\tau\right](\sqrt{A})^{-1}.$$

习题取 $f(t) = h\sin(pt + \alpha)$ 的情况.

附注　以上已经看出了方阵函数 e^{At} 的一些用场．但更重要的是它是线性函数方程的研究的核心部分．经过适当的推广，它就成为半群理论的基石．

（参考：E. Hille 与 R. Phillips, Functional Analysis and Semi-groups 1957）．

§9. 矩阵的绝对值

引进矩阵绝对值的方法颇多．我们现在先介绍一下：

命 $A=(a_{ij})1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$，这矩阵的绝对值定义为

$$\|A\|=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,. \tag{1}$$

不难证明

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|, \tag{2}$$

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|. \tag{3}$$

理由是

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||b_{jk}|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\cdot\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}|b_{j_1k}|$$

$$\left\|\int A(t)dt\right\|\leqslant\int\left\|A(t)\right\|dt. \tag{4}$$

如果

$$\sum_{l=0}^{\infty}\|A_l\|<\infty,$$

则 $\sum\limits_{l=0}^{\infty}A_l$ 表 $M\cdot n$ 个绝对收敛级数．

Cauchy 判别条件、考虑矩阵贯

$$\{A_l\}$$

给与 $\varepsilon>0$，存在N使得，p，$q>N$ 时，

$$\|A_p-A_q\|<\varepsilon,$$

则贯 A_l 一定收敛于一个矩阵．

§10. 线性微分方程的唯一存在性问题

我们现在先考虑变系数的线性差分方程

$$x(t+1)=x(t)A(t)+b(t),\quad x(0)=c.$$

算出这个差分方程的解的计算程序是

t	$A(t)$	$b(t)$	$x(t+1)$,
0	$A(0)$	$b(0)$	$x(1)=cA(0)+b(0)$,
1	$A(1)$	$b(1)$	$x(2)=x(1)A(1)+b(1)$,
2	$A(2)$	$b(2)$	$x(3)=x(2)A(2)+b(2)$,

………………………………………

所以存在性、唯一性问题并没有困难．（因此，一般离散性的问题如果可能，切勿要把它变

为连续性的描述．因为这样做凭空添出不少麻烦）．

但是微分方程的情况便不同了．一些性质不太直觉，需要另加处理．

定理1 假定 $A(t)$ 是一个连续函数（$t\geqslant 0$）方阵．则矢量微分方程

$$\frac{dx}{dt}=xA(t),\ x(0)=c \tag{1}$$

有唯一的解．这个解当 $t\geqslant 0$ 时存在而且可以写成为

$$x=cX(t) \tag{2}$$

的形式．此处 $X(t)$ 是以下的方阵微分方程的唯一解

$$\frac{dX}{dt}=XA(t),\quad X(0)=I. \tag{3}$$

而

$$\frac{dx}{dt}=xA(t)+g(t)\quad x(0)=c$$

的解答是

$$x=cX(t)+\int_0^t g(\tau)X^{-1}(\tau)d\tau X(t).$$

证明 1）先用逐次逼近法来证明（3）有一解．以积分方程

$$X(t)=I+\int_0^t X(s)A(s)ds \tag{4}$$

来代替微分方程（3）．

作方阵贯 $\{X_n\}$．

$$X_0=I,$$

$$X_{l+1}=I+\int_0^t X_lA(s)ds;\quad l=0,1,\cdots, \tag{5}$$

故

$$X_{l+1}-X_l=\int_0^t(X_l-X_{l-1})A(s)ds,\quad l=1,2\cdots.$$

命

$$m=\max_{0\leqslant s\leqslant t_1}\|A(s)\|,$$

则当 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 时，

$$\begin{aligned}\|X_{l+1}-X_l\|&=\left\|\int_0^t(X_l-X_{l-1})A(s)ds\right\|\leqslant\int_0^t\|A(s)\|\|X_l-X_{l-1}\|ds\\&\leqslant m\int_0^t\|X_l-X_{l-1}\|ds.\end{aligned} \tag{6}$$

在此区间内

$$\|X_1-X_0\|\leqslant\int_0^t\|A(s)\|ds\leqslant mt.$$

用归纳法及关系（6）可证：在区间 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 内

$$\|X_{l+1}-X_l\|\leqslant\frac{m^{l+1}t^{l+1}}{(l+1)!},$$

因此级数

$$\sum_{l=0}^{\infty}(X_{l+1}-X_l)$$

在 $0\leqslant t\leqslant x_1$ 中一致收敛，当 $p\to\infty$ 时方阵贯

$$I+\sum_{l=0}^{p}(X_{l+1}-X_l)=X_{p+1}$$

一致收敛于一极限 $X(t)$. 在(5)两边取极限，得出此 $X(t)$ 适合于积分方程(4)，因而也适合于微分方程 (3).

2) 微分方程(1)的存在性；在(3)式左边系以矢量 C，即合所求.

3) 唯一性.

假定 Y 是(3)的另一解，则

$$X-Y=\int_0^t(X(s)-Y(s))A(s)ds. \tag{7}$$

因此

$$\|X-Y\|\leqslant\int_0^t\|A(s)\|\|X(s)-Y(s)\|ds. \tag{8}$$

由于 Y 是可微的，所以 Y 也是连续的.

$$m_1=\max_{0\leqslant t\leqslant x_1}\|X-Y\| \tag{9}$$

是存在的，由(8)可知

$$\|X-Y\|\leqslant m_1\int_0^t\|A(s)\|ds. \tag{10}$$

再把这个估计代入(8)式，得

$$\begin{aligned}\|X-Y\|&\leqslant m_1\int_0^t\|A(s)\|ds\int_0^s\|A(s_1)\|ds_1\\&=m_1\iint\limits_{0\leqslant s_1\leqslant s\leqslant t}\|A(s)\|\|A(s_1)\|dsds_1,\end{aligned}$$

再代入 (8) 式得

$$\|X-Y\|\leqslant m_1\iiint\limits_{0\leqslant s_2\leqslant s_1\leqslant s\leqslant t}\|A(s)\|\|A(s_1)\|\|A(s_2)\|dsds_1ds_2,$$

等等. 由于

$$\begin{aligned}&\int\limits_{0\leqslant s_l\leqslant s_{l-1}\leqslant\cdots\leqslant s_1\leqslant t}\cdots\cdots\int f(s_1)\cdots f(s_l)ds_l\cdots ds_1\\&=\frac{1}{l!}\int_0^t\cdots\int_0^t f(s_1)\cdots f(s_l)ds_1\cdots ds_l=\frac{1}{l!}\left(\int_0^t f(s)ds\right)^l,\end{aligned}$$

因此，对任一 $l>0$

$$\|X-Y\|\leqslant\frac{m_1}{l!}\left(\int_0^t\|A(s)\|ds\right)^l.$$

当 $l\to\infty$，右边趋于 0，因此

$$X=Y.$$

(请读者思索一下，这证明的结构在那儿见过没有)

关于非线性部分的解的证明留给读者.

具体写出来

$$X_0 = I,$$
$$X_1 = I + \int_0^t A(s)ds,$$
$$X_2 = I + \int_0^t A(s)ds + \int_0^t A(s)ds\int_0^s A(s_1)ds_1,$$
$$= I + \int_0^t A(s)ds + \iint\limits_{0\leqslant s_1\leqslant s\leqslant t} A(s)A(s_1)dsds_1.$$

(注意由于 $A(s)A(s_1)$ 不一定等于 $A(s_1)A(s)$，所以最后的积分不等于

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^t A(s)ds\right)^2.)$$

$$X_3 = I + \int_0^t A(s)ds + \iint\limits_{0\leqslant s_1\leqslant s\leqslant t} A(s)A(s_1)dsds_1$$
$$+ \iiint\limits_{0\leqslant s_2\leqslant s_1\leqslant s\leqslant t} A(s)A(s_1)A(s_2)dsds_1ds_2,$$

因而得出 X 的级数表达法

$$X = I + \int_0^t A(s)ds + \iint\limits_{0\leqslant s_1\leqslant s\leqslant t} (As)A(s_1)dsds_1 + \cdots$$
$$+ \int\cdots\cdots\int\limits_{0\leqslant s_l\leqslant\cdots\leqslant s_1\leqslant t} A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_l)ds_1\cdots ds_l + \cdots.$$

如果把条件 $X(0)=I$ 改为 $X(t_0)=I$，即得

$$X = I + \int_{t_0}^t A(s)ds + \iint\limits_{t_0\leqslant s_1\leqslant s\leqslant t} A(s)A(s_1)dsds_1 + \cdots\cdots$$
$$+ \int\cdots\cdots\int\limits_{t_0\leqslant s_l\leqslant\cdots\leqslant s_1\leqslant t} A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_l)ds_1\cdots ds_l + \cdots. \quad (11)$$

定义 由(11)所定义的 X 称为函数方阵 $A(t)$ 的由 t_0 到 t 的第积积分，记之为

$$r_{t_0}^t(A) = \widetilde{\int_{t_0}^t}(I + A(t))dt.$$

§11. 第 积 积 分

我们再从差分方程逼迫来看一下第积积分的意义，考虑差分方程

$$X(t+\delta) - X(t) = X(t)\delta A.$$

即

$$X(t+\delta) = X(t)(I + \delta A(t)).$$

因此

$$X(l\delta) = X(0)\prod_{p=0}^{l-1}(I + \delta A(p\delta)).$$

取 $l\delta = t$，则

$$X(t) = X(0)\prod_{p=0}^{l-1}\left(I + \frac{t}{l}A\left(\frac{pt}{l}\right)\right). \quad X(0) = I.$$

因此

$$r_0^t(A(t)) = \widetilde{\int_0^t}(I + A(t))dt = \lim_{l\to\infty}\prod_{p=0}^{l-1}\left(I + \frac{t}{l}A\left(\frac{pt}{l}\right)\right).$$

关于 $r_{t_0}^t$ 有以下诸性质:

(i) $r_{t_0}^t = r_{t_0}^{t_1} r_{t_1}^t$.

证明 $r_{t_0}^{t_1}$ 是

$$\frac{dX}{dt} = XA, \quad X(t_0) = I$$

的解,而 $r_{t_1}^t$ 是

$$\frac{dY}{dt} = YA, \quad Y(t_1) = I$$

的解,命 $XY^{-1} = Z$. 则得

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dX}{dt}Y^{-1} - XY^{-1}\frac{dY}{dt}Y^{-1} = (XA - XA)Y^{-1} = 0,$$

所以 Z 是一常数方阵 C, 取 $t = t_1$, 即得

$$C = r_{t_0}^{t_1}.$$

(ii) $r_{t_0}^t(A + B) = r_{t_0}^t(P) r_{t_0}^t(A)$.

此处 $P = r_{t_0}^t(A)B(r_{t_0}^t(A))^{-1}$.

证明 $r_{t_0}^t(A + B)$ 及 $r_{t_0}^t(A)$ 各适合于

$$\frac{dX}{dt} = X(A + B), \quad X(t_0) = I.$$

$$\frac{dY}{dt} = YA, \quad Y(t_0) = I.$$

作 $Z = XY^{-1}$, 则

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dX}{dt}Y^{-1} - XY^{-1}\frac{dY}{dt}Y^{-1} = [X(A + B) - XA]Y^{-1} = XBY^{-1}$$

$$= Z(YBY^{-1}), \quad Z(t_0) = I.$$

(iii) $r_{t_0}^t = (r_t^{t_0})^{-1}$.

(iv) $r_{t_0}^t(CA(t)C^{-1}) = Cr_{t_0}^t(A(t))C^{-1}$ C 是常数方阵.

(v) 引进第积微商运算

$$D_t X = X^{-1}\frac{dX}{dt}.$$

$\left(\text{由 } \frac{dX}{dt} = XA, \text{ 可见 } X^{-1}\frac{dX}{dt} = A\right.$, 因此 D_t 与 r 是正逆的运算,一个从 X 得 A, 而每一从 A 得 $X\Big)$.

显然有

$$D_t(XY) = Y^{-1}D_t XY + D_t(Y).$$

特例有:

$$D_t(XC) = C^{-1}D_t(X)C,$$

$$D_t(CY) = D_t(Y),$$

$$D_t(X^{-1}) = -XD_t(X)X^{-1}.$$

(vi) $D_t(X') = X'^{-1}(D_t(X)')X'$.

$$\left(X'^{-1}\frac{dX'}{dt} = \left(\frac{dX}{dt}X^{-1}\right)'\right.$$

$$= \left(XX^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}\right)' = X'^{-1}\left(X^{-1}\frac{dX}{dt}\right)'X'\Big).$$

(vii) 与部分积分相似有公式

$$r_{t_0}^t(Q + D_tX) = X(t_0)^{-1}r_{t_0}^t(XQX^{-1})X(t).$$

证明　左边是

$$\frac{dZ}{dt} = Z\left(Q + X^{-1}\frac{dX}{dt}\right),\quad Z(t_0) = I$$

的解答，命 $Y = ZX^{-1}$，则得

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dZ}{dt}X^{-1} - ZX^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1} = Z\left(Q + X^{-1}\frac{dX}{dt}\right)X^{-1} - ZX^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}$$

$$= ZQX^{-1} = YXQX^{-1},\quad Y(t_0) = X(t_0)^{-1}.$$

因此，

$$Y(t) = X(t_0)^{-1}r_{t_0}^t(XQX^{-1}).$$

§12. 解的满秩性

定理 1　假定 $\int_0^{t_1}\|A(t)\|dt$ 存在，则在 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内方程

$$\frac{dX}{dt} = XA(t),\quad X(0) = I \tag{1}$$

的解 $X(t)$ 是满秩的.

如果 $A(t) = A$ 是常数方阵，则由 §6 已知方程 (1) 的解等于

$$e^{At}$$

在上一章中已经证过它是满秩的了.

这定理是以下的 Jacobi 恒等式的推论：

定理 2　$X(t)$ 的行列式

$$|X(t)| = e^{\int_0^t tr(A(t))dt}.$$

证明　由行列式的微分性质

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_{11}(t), & \cdots, & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t), & \cdots, & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t), & \cdots, & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx_{11}}{dt}, & x_{12}, & \cdots, & x_{1n} \\ \frac{dx_{21}}{dt}, & x_{22}, & \cdots, & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_{n1}}{dt}, & x_{n2}, & \cdots, & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} x_{11}, & \frac{dx_{12}}{dt}, & \cdots, & x_{1n} \\ x_{21}, & \frac{dt_{22}}{dt}, & \cdots, & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}, & \frac{dx_{n2}}{dt}, & \cdots, & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \cdots, & \frac{dx_{1n}}{dt} \\ x_{21}, & x_{22}, & \cdots, & \frac{dx_{2n}}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \cdots, & \frac{dx_{nn}}{dt} \end{vmatrix}.
$$

看其中的一个，例如第一个，因为

$$
\frac{dx_{i1}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}a_{j1},
$$

所以

$$
\begin{vmatrix} \frac{dx_{11}}{dt}, & x_{12}, & \cdots, & x_{1n} \\ \frac{dx_{21}}{dt}, & x_{22}, & \cdots, & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dx_{n1}}{dt}, & x_{n2}, & \cdots, & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_{1j}a_{j1}, & x_{12}, & \cdots, & x_{1n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{2j}a_{j1}, & x_{22}, & \cdots, & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_{nj}x_{j1}, & x_{n2}, & \cdots, & x_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} x_{11}, & \cdots, & x_{1n} \\ & & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}, & \cdots, & x_{nn} \end{vmatrix},
$$

因此

$$
\frac{d}{dt}|X(t)| = (a_{11} + \cdots + a_{nn})|X(t)|,
$$

即得定理.

显然对任一常数方阵 C，$Y = CX$ 适合于

$$
\frac{dY}{dt} = YA(t). \tag{2}
$$

因此 CX 是方程(2)的通解. 反之，如果 Y 适合于(2)，而 $Y(0) = C$，把 Y，C 写成矢量形式

$$
\begin{pmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C^{(1)} \\ \vdots \\ C^{(n)} \end{pmatrix},
$$

则

$$
\frac{dy^{(i)}}{dt} = y^{(i)}A(t), \quad y^{(i)}(0) = C^{(i)}.
$$

因此

$$
y^{(i)} = C^{(i)}X,
$$

而

$$
Y = CX,
$$

因此 Y 的秩等于初始值 C 的秩.

§13. 非齐次方程

考虑

$$\frac{dx}{dt} = xA(t) + f(t), \quad x(0) = C. \tag{1}$$

我们还是用“参数变动术”．命

$$x = y(t)X, \tag{2}$$

此处X是

$$\frac{dX}{dt} = XA(t) \quad X(0) = I \tag{3}$$

的解，把(2)代入(1)得

$$\frac{dy}{dt}X + y\frac{dX}{dt} = yXA + f(t),$$

即得

$$\frac{dy}{dt}X = f(t).$$

因此

$$\frac{dy}{dt} = f(t)X^{-1},$$

或

$$y = C + \int_0^t f(s)X^{-1}(s)ds.$$

由此推得(1)的解法公式

$$x = CX(t) + \left(\int_0^t f(s)X(s)^{-1}ds\right)X(t). \tag{4}$$

附记1．方程(3)可以写成为

$$X^{-1}\frac{dX}{dt} = A(t), \quad X(0) = I.$$

由 $\frac{dX^{-1}}{dt} = -X^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}$ 可知

$$\frac{dX^{-1}}{dt}X = -A(t).$$

如命 $X^{-1} = Y$，则Y适合于

$$\frac{dY}{dt} = -A(t)Y, \quad Y(0) = I. \tag{5}$$

而解答(4)式可以写成为

$$x = \left[C + \int_0^t f(s)Y(s)ds\right]Y(t)^{-1}. \tag{6}$$

2．如果把(3)的初始条件改为

$$X(t_0) = I,$$

命 X_1 是适合于

$$\frac{dX_1}{dt}=X_1A(t),\quad X_1(t_0)=I$$

的解，则由于

$$CX(t),\quad (C\ 任一满秩方程)$$

是(3)式的通解，所以

$$X_1(t)=CX(t),\quad X_1(t_0)=CX(t_0).$$

即得

$$X_1(t)=X(t_0)^{-1}X(t).$$

§14. 微 扰 理 论

非齐次方程的另一应用是微扰理论，我们要把

$$e^{A+\varepsilon B}$$

展开为 ε 的幂级数

$$e^{A+\varepsilon B}=e^A+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^nQ_n(A,B).$$

当 $AB=BA$ 时问题不大，但当 $AB\neq BA$ 时情况变得复杂得多，我们现在用非齐次微分方程的解法来处理这一问题.

考虑

$$\frac{dX}{dt}=X(A+\varepsilon B),\quad X(0)=I. \tag{1}$$

这方程式的解是

$$e^{(A+\varepsilon B)t}.$$

由

$$\frac{d(Xe^{-At})}{dt}=\frac{dX}{dt}e^{-At}-XAe^{-At}=\varepsilon XBe^{-At}$$

可知

$$X(t)=\left(I+\varepsilon\int_0^t XBe^{-As}ds\right)e^{At}=e^{At}+\varepsilon\int_0^t X(s)Be^{A(t-s)}ds. \tag{2}$$

这是一个迭代公式，例如把积分号下的 $X(s)$ 取以(2)代入，则得

$$X(t)=e^{At}+\varepsilon\int_0^t\left[e^{As}+\varepsilon\int_0^s X(s_1)Be^{A(s-s_1)}ds_1\right]Be^{A(t-s)}ds$$

$$=e^{At}+\varepsilon\int_0^t e^{As}Be^{A(t-s)}ds+\varepsilon^2\int_0^t ds\int_0^s X(s_1)Be^{A(s-s_1)}Be^{A(t-s)}ds_1,$$

还可再迭代得出 ε^3, ε^4, ···等项来.

取 $t=1$，得出

$$e^{A+\varepsilon B}=e^A+\varepsilon\int_0^1 e^{As}Be^{A(1-s)}ds+\varepsilon^2\int_0^1 ds\int_0^s X(s_1)Be^{A(s-s_1)}Be^{A(1-s)}ds_1.$$

附记　读者想一下，这方法和上节的方法有没有共同之点.

§15. 函数方程

命

$$Y(t) = e^{At},$$

它适合于函数方程

$$Y(s+t) = Y(s)Y(t), \quad -\infty < s,\ t < \infty. \tag{1}$$

问题在于有没有其它的矩阵函数仍然适合于(1)，解答是肯定的，由于

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是一解．但当添一个要求：有一个数值 t_0 使 $Y(t_0)$ 是满秩的，则解答是否定的．由

$$Y(t_0) = Y(0)Y(t_0),$$

因此

$$Y(0) = I.$$

由于

$$Y(t)Y(-t) = Y(0) = I,$$

所以所有的 $Y(t)$ 都是满秩的．

如果 $Y(t)$ 可微分，问题极易解决，(1)式对 s 及对 t 微商即得

$$Y'(s+t) = Y'(s)Y(t)$$
$$Y'(s+t) = Y(s)Y'(t).$$

因此

$$Y'(s)Y(t) = Y(s)Y'(t).$$

即对所有的 s, t

$$Y^{-1}(s)Y'(s) = Y'(t)Y^{-1}(t).$$

因此 $Y^{-1}(s)Y'(s)$ 是一个常数方阵 A，即

$$\frac{d}{ds}Y(s) = Y(s)A,\ Y(0) = I,$$

解得

$$Y(t) = e^{At}.$$

我们可以减弱假定：

定理 1 假定 (i) 当 $0 \leqslant s, t, s+t \leqslant t_0$ 时有

$$Y(s+t) = Y(s)Y(t).$$

(ii) 在 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 中 $Y(t)$ 是连续函数及 (iii) 至少有一个 t_1，使 $Y(t_1)$ 是满秩的，在这些假定下

$$Y(t) = e^{At}.$$

证明 把积分变为和的极限

$$\int_0^t Y(s)ds = \lim_{\delta \to 0}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k\delta)\delta, \qquad \delta = \frac{t}{N}.$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{N-1} Y(\delta)^k\delta,$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{Y(N\delta)-I}{Y(\delta)-I}\delta = \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta}{Y(\delta)-I}(Y(t)-I). \quad (2)$$

由连续性可知

$$Y(t) = I + o(1),$$

因此

$$\int_0^t Y(s)ds = tI + o(t).$$

所以当 t 充分小时，

$$\int_0^t Y(s)ds$$

是满秩，因此对固定的足够小的 t，当 δ 充分小时，

$$\sum_{k=0}^{N-1} Y(\delta)^k\delta$$

也是满秩的.

当 $\delta\to 0$ 时，

$$\frac{Y(\delta)-I}{\delta}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k\delta)\delta = Y(t) - I. \quad (3)$$

由于左边第二因子是满秩的，因此 (1) 与 (2) 得

$$A = \lim_{\delta\to 0}\frac{Y(\delta)-I}{\delta} = (Y(t)-I)\left(\int_0^t Y(s)ds\right)^{-1}.$$

即得

$$A\int_0^t Y(s)ds = Y(t) - I.$$

因为左边可微分，因此 $Y(t)$ 是可微分的，而且对充分小的 t，

$$AY(t) = Y'(t), \quad Y(0) = I.$$

即对充分小的 t 有

$$Y(t) = e^{At}.$$

由于

$$Y(nt) = (Y(t))^n,$$

因而对大 t 也对.

§16. 解微分方程 $\frac{dX}{dt} = AX+XB$

我们现在考虑较复杂的微分方程

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t), \quad X(0) = C. \quad (1)$$

这个微分方程形式上可能较复杂些，但是如果用 X 的元素 $x_{rs}(t)$ 写出来，定依然是 n^2 个变元的 n^2 个方程组，因而解法是存在的，是唯一的，问题在于具体地解出这个问题.

先从

$$\frac{dY}{dt}=A(t)Y, \qquad Y(0)=I$$

及

$$\frac{dZ}{dt}=ZB(t), \qquad Z(0)=I$$

出发，由于

$$\frac{d(YCZ)}{dt}=\frac{dY}{dt}CZ+YC\frac{dZ}{dt}=A(t)YCZ+YCZB(t)$$

及 $(YCZ)_{t=0}=C$，因此

$$X=YCZ$$

就是(1)式的解——唯一解.

特例有

定理 1 对常数方阵 A 与 B，微分方程

$$\frac{dX}{dt}=AX+XB, \quad X(0)=C \tag{2}$$

的解是

$$X=e^{At}Ce^{Bt}. \tag{3}$$

这是一个简单的微分方程，但在量子力学上有用，其解的性质在量子力学上有很自然的意义（例如见 D. Haas, *Elements of statistical Mechanics*, 1954, P. 149.).

这类微分方程在 Лаппо-Аанилевсcит 的专著上作了详尽的讨论 (Труды 1-гс Всесоюзн. сбезда матем. 1936).

这定理有以下的应用:

定理 2 如果

$$X=-\int_0^\infty e^{At}Ce^{Bt}dt \tag{4}$$

对所有的 C 都存在，则矩阵方程

$$AX+XB=C \tag{5}$$

有唯一的解.

证明 先考虑方程

$$\frac{dZ}{dt}=AZ+ZB, \quad Z(0)=C,$$

两边由 0 到∞对 t 积分，并且假定

$$\lim_{t\to\infty}Z(t)=0, \tag{6}$$

如此则得

$$-C=-Z(0)=A\int_0^\infty Z(t)dt+\int_0^\infty Z(t)dtB.$$

因此，

$$X=-\int_0^\infty Z(t)dt=-\int_0^\infty e^{At}ce^{Bt}dt$$

就是(5)的一个解，由于条件(4)，可知条件(6)是适合的.

关于唯一性，我们可以把(5)看成为 n^2 个同变数的 n^2 个线性方程组，既然对所有的 C 都有解，则这 n^2 个线性方程组的行列式 $\neq 0$，因此，对每一 C 有唯一的解.

附记　在什么条件下

$$\int_0^\infty e^{At} C e^{Bt} dt$$

对所有的 C 都存在，将来将证明：方程组(5)有解的必需且充分的条件是 A 的特征根 λ_i 与 B 的特征根 μ_j 的和 $\lambda_i+\mu_j$ 都不等于 0。

第五章　解的渐近性质

§1. 常系数差分方程

还是从差分方程的研究开始；已知常系数的差分方程

$$x(t+1)=x(t)A,\quad x(0)=c \tag{1}$$

的解是

$$x(t)=cA^t,\quad t=0,1,2,3,\cdots. \tag{2}$$

现在我们要研究的问题是：当 $t\to\infty$ 时，解 $x(t)$ 的性质，当 $t=0,1,2,\cdots$ 时

$$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$$

代表 n 维空间的一个贯．我们可以问：这贯是否有界？是否有极限？是否会回到原出发处？是否会"遍历"一条曲线上所有的点？还是否"对一切 c"都有某种性质，还是对"一些 c"或"那些 c"有某种性质？一切的一切归结为方阵方幂

$$A^t,\quad t=0,1,2,\cdots$$

的研究，这是我们第三章中所研究过的问题，在讨论之前我们先研究一下，当 α 是实数时，

$$\xi^t=e^{2\pi i\alpha t},\quad t=0,1,2,\cdots$$

的性质，这些点在复平面的单位圆上，首先如果 α 是有理数 $p/q(q>0,p,q$ 互素)，则点列

$$\xi^t$$

中只有有限个值 $t=0,\cdots,q-1$，其后便周而复始地循迴往复，如果 α 是无理数，ξ^t 在单位圆上成一无处不稠密的点集，即对圆上任一点 $\xi_0=e^{2\pi i\alpha_0}(0\leqslant\alpha_0<1)$，给任一 $\varepsilon>0$，我们有无数个 t 使

$$|\xi_0-\xi^t|<\varepsilon$$

(要证明这个事实，需要些数论知识，即所谓 Kronecker 定理：给了任一 $\varepsilon>0$，有无数个自然数 q 及整数 p 使

$$|\alpha p-\alpha_0-q|<\varepsilon.$$

如果这个对了，则

$$|\xi^p-\xi_0|<2\pi\varepsilon.$$

即得所证了)．

这样的性质称为点列 ξ^t 遍历圆上各点，现在回来研究

$$A^t,\quad t=0,1,2,\cdots$$

有一个 P 使 PAP^{-1} 等于 Jordan 块

$$J_\lambda = \begin{cases} \lambda J \quad \text{当 } \lambda \neq 0, \ J = \begin{pmatrix} 110 \\ 011 \\ 001\cdots \end{pmatrix} \\ J_0 \quad \text{当 } \lambda = 0, \ J_0 = \begin{pmatrix} 010\cdots \\ 001\cdots \\ 000\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}. \end{cases}$$

如果 $|\lambda| < 1$，则

$$\lim_{t\to\infty} J_\lambda^t = 0.$$

如果 $|\lambda| > 1$，则

$$\lim_{t\to\infty} J_\lambda^t$$

不存在.

如果 $|\lambda| = 1$，$\lambda = e^{2\pi i/a}$，而 J_λ 非单构的，则极限依然不存在.

如果 $|\lambda| = 1$，而且 J_λ 是单构的，则问题化为以上所讨论的结果.

把方阵 PAP^{-1} 折为三部分：

(i) 特征根绝对值<1 的诸子块留下，其他的部分记之为 0. 这样的方阵用 B_-表之.

(ii) 特征根绝对值= 1，而且是单构的诸子块留下，其它的记之为 0，这样的方阵用 B_0 表之.

(iii) 以上未用到的子块留下，其它的记之为 0，这样的方阵用 B_+ 表之.

这样

$$PAP^{-1} = B_- + B_0 + B_+.$$

其中任二之积等于 0. 并且 $\lim B_-^t$ 存在，$\lim B_0^t$ 有界，$\lim B_+^t$ 无界，命

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}(B_- + B_0 + B_+)P \\ &= A_- + A_0 + A_+, \end{aligned}$$

这样便把 A 分为三份了.

现在回过去考虑原问题：

$$x = cA^t = c(A_-^t + A_0^t + A_+^t).$$

如果 $cA_+ = 0$，则

$$\lim_{t\to\infty} x(t)$$

有界，如果 $cA_+ = 0$ 而且 $cA_0 = 0$，则

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

由此推出几个简单的结论：

定理 1 如果 A 的特征值的绝对值都小于 1，则不管怎样的初始值，

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

这样的性质称为"渐近稳定性".

定理 2 如果 A 的特征值的绝对值≤ 1，而绝对值等于 1 的部分是单构的，则 $x(t)$ 是

有界的．并且给一 $\varepsilon > 0$，我们能找到 δ 使

$$\|c - c_1\| < \delta$$

时，

$$\|x(t) - x_1(t)\| < \varepsilon,$$

这儿 $x_1(t) = c_1A^t$.

定理 3 如果 A 有一个特征根等于 1，而其他的都小于 1，则 $\lim_{t\to\infty} x(t)$ 存在，其极限的支量间的比例不变．

证明 这样 $\lim_{t\to\infty} A^t$ 的秩等于 1，即

$$\lim_{t\to\infty} A^t = u'v, \quad uv' = 1,$$

这儿 u, v 是两个矢量，因此

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} cA^t = (cu')v.$$

即与 v 成比例，即得所证．

读者试研究 A 的特征根的绝对值都 $= 1$，而且是单构的情况．

看来变化多端，实质脱胎于一 $(n = 1)$，标准法式稳抓住，便可推出一切．

§ 2. 广 相 似 性

现在考虑较一般的差分方程组

$$x(t + 1) = x(t)A(t). \tag{1}$$

再考虑换变数的情况：命

$$y(t) = x(t)L(t). \tag{2}$$

则得

$$\begin{aligned} y(t + 1) &= x(t + 1)L(t + 1) \\ &= x(t)A(t)L(t + 1) \\ &= y(t)L(t)^{-1}A(t)L(t + 1). \end{aligned} \tag{3}$$

这样便把以 $A(t)$ 为系数方阵的差分方程组变为以

$$B(t) = L(t)^{-1}A(t)L(t + 1) \tag{4}$$

为系数方阵的差分方程组了．

定义 1 如果 $L(t)$ 与 $L(t)^{-1}$ 都有界，则 $L(t)$ 称为 Ляпунов 方阵．

如果 $L(t)$ 是 Ляпунов 方阵，则由

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

可推得

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

并且反之亦真．

定义 1 如果 $A(t)$ 与 $B(t)$ 适合于(4)而且 $L(t)$ 是 Ляпунов 方阵，则此二方阵称为 л 相似性，记之为

$$A \overset{л}{=} B.$$

显然有(i)，$A\overset{\pi}{=}A$ (ii) 如果 $A\overset{\pi}{=}B$ 则 $B\overset{\pi}{=}A$; (iii) 如果 $A\overset{\pi}{=}B$，$B\overset{\pi}{=}C$，则 $A\overset{\pi}{=}C$.

又如果有常数方阵 P 使

$$PAP^{-1}=B,$$

则 $A\overset{\pi}{=}B$.

定义 2　凡 π 相似于常数方阵的方阵称为可化方阵.

定理 1　可化方阵一定 π 相似于一个特征根是实数的方阵.

证明　由于可化方阵一定 π 相似于一个常数方阵因此我们只研究常数方阵，还是从考虑 $n=1$ 时的情况出发

$$x(t+1)=x(t)\rho e^{i\theta}.$$

命 $y(t)=x(t)l^{-1}(t)$，则

$$y(t+1)=y(t)l(t)\rho e^{i\theta}/l(t+1).$$

取

$$l(t)=e^{i\theta t}$$

即可使

$$y(t+1)=y(t)\rho.$$

一般的情况可由标准型推出.

§3. 常数系数线性常微分方程组

我们现在研究常微分方程的解的渐近性质：方程组

$$\frac{dx}{dt}=xA,\qquad x(0)=c \tag{1}$$

的解

$$x(t)=ce^{At}. \tag{2}$$

如前，我们只需要研究，当 $t\to\infty$ 时，

$$e^{At}$$

的性质.

也是把 A 化成为 Jordan 标准型来讨论.

(i)　如果 λ 的实数部分都是负的，则

$$\lim_{t\to\infty}e^{\lambda t}=0.$$

(ii)　如果 λ 是纯虚的而且是单构的，则

$$\lim_{t\to\infty}e^{i\lambda t}$$

不存在（$\lambda=0$ 除外)，而 $z=e^{i\lambda t}$ 在平面上画一圆圈.

(iii) 不然，则

$$x(t)\qquad 0\leqslant t\leqslant\infty$$

画出一条通过 $x=c$ 的曲线，而且趋向∞.

因此也推得

定理 1　如果 A 的特征根的实数部分都为负，则不管初始值怎样，积分曲线 $(x_1(t),\cdots x_n(t))$ 趋向原点.

定理 2 如果 A 是单构的，而且特征根是纯虚的，则积分曲线在空间画一闭曲线.

证明 有 P 使

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \lambda_1\\ -\lambda_1 & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix}0 & \lambda_V\\ -\lambda_V & 0\end{pmatrix}\dotplus O\dotplus\cdots\dotplus O.$$

命

$$xP^{-1}=y,\ 则$$

$$\frac{dy}{dt}=y(PAP^{-1}).$$

因为

$$e^{\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ -\lambda & 0\end{pmatrix}t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ -\lambda & 0\end{pmatrix}^n t^n$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l)!}\begin{pmatrix}(-\lambda^2t^2)^l & O\\ 0 & (-\lambda^2t^2)^l\end{pmatrix}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-\lambda^2t^2)^l}{(2l+1)!}\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ -\lambda & 0\end{pmatrix}t$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\lambda t & \sin\lambda t\\ -\sin\lambda t & \cos\lambda t\end{pmatrix}.$$

因此

$$y=c\left(\begin{pmatrix}\cos\lambda_1 t & \sin\lambda_1 t\\ -\sin\lambda_1 t & \cos\lambda_1 t\end{pmatrix}\dotplus\cdots\right)$$

$$y_1=c_1\cos\lambda_1 t-c_2\sin\lambda_1 t$$

$$y_2=c_1\sin\lambda_1 t+c_2\cos\lambda_1 t,\ 等.$$

而

$$y_1^2+y_2^2=c_1^2+c_2^2, y_3^2+y_4^2=c_3^2+c_4^2,\cdots.$$

这说明了，积分曲线是闭曲线.

附记 1

$$yy'=cc'.$$

所以

$$xP^{-1}P'^{-1}x'=cc'.$$

这说明积分曲线在一相似的椭球上，实质上远不止这一性质.

附记 2 我们所考虑的积分曲线都是从 $x(0)=c(\neq 0)$ 出发，如果 $c=0$，则由上可知通过原点可能不止一条积分曲线，或者没有积分曲线，这样的点称为奇点.

习题 1 试用特征根分类来研究原点附近的二个变数的方程组的情况.
(已经学过了)

习题 2 试研究三个变数三个方程式的情况.

习题 3 解方程组

$$\frac{dx}{dt}=xA+b,\qquad x(0)=c$$

此处 b 是常数矢量.

§4. Ляпунов 法介绍

以下所介绍的 Ляпунов 法可以广泛地用来研究非线性函数方程的解的稳定性，但这

儿可以最清楚地看出其实质.

还是研究

$$\frac{dx}{dt}=xA,\quad x(0)=c. \tag{1}$$

这儿 c 与 A 是实的. 命

$$u=xYx'$$

这儿 Y 是一个待定的常数对称方阵,微分得

$$\frac{du}{dt}=\frac{dx}{dt}Yx'+xY\left(\frac{dx}{dt}\right)'=x(AY+YA')x'.$$

假定我们能够选得一个定正的 Y 使

$$AY+YA'=-I,$$

则

$$\frac{du}{dt}=-xx'\leqslant-\lambda_0^{-1}u.$$

这儿 λ_0 是 Y 的最大的特征根,由于 $u(0)$ 是正的,因此

$$d\log u(t)=\frac{du}{u}\leqslant-\lambda_0^{-1}dt,$$

$$\int_0^t d\log u(t)\leqslant-\lambda_0 t,$$

因此

$$u(t)\leqslant u(0)e^{-\lambda_0^{-1}t}.$$

当 $t\to\infty$ 时,得

$$u=xYx'\to 0.$$

由于 Y 的定正性,因此 $x\to 0$.

因此研究

$$\lim_{t\to\infty}x(t)$$

是否趋于 0 的问题一变而为 Y 的存在性的问题.

1) 如果 A 的特征根的实数部分都<0, 则 Y 一定存在.

这个 Y 就是

$$Y=\int_0^\infty e^{At}e^{A't}dt.$$

这是对称的,收敛的,而且是定正的,前二性质十分容易看出,今看第三性质: 如果

$$0=xYx'=\int_0^\infty(xe^{At})(xe^{At})'dt.$$

因此得出 $xe^{At}=0$. 但指数方阵 e^{At} 是满秩的,因此 $x=0$, 所以 Y 是定正的.

又由部分积分法可知

$$\begin{aligned}AY+YA'&=\int_0^\infty(Ae^{At}\cdot e^{A't}+e^{At}\cdot e^{A't}A')dt\\&=\int_0^\infty\frac{d}{dt}(e^{At}\cdot e^{A't})dt=-1.\end{aligned}$$

2）如果有定正的对称的Y而且使

$$AY+YA'=-I,$$

则A的特征根的实数部分都是负的.

证明　命ρ是A的特征根，v是对应的矢量. 即

$$vA=\rho v.$$

由于A是实的，所以

$$\bar{v}A=\overline{\rho v}.$$

在 $AY+YA'=-I$ 左右各乘以 $v, \bar{v}'$ 得

$$v(AY+YA')\bar{v}'=-v\bar{v}'$$

即得

$$(\rho+\bar{\rho})vY\bar{v}'=-v\bar{v}'.$$

因此

$$\rho+\bar{\rho}<0.$$

即得所证.

我们用 Ляпунов 法处理一个较广泛的问题：

$$\frac{dx}{dt}=x(A+B(t)),$$

这儿A仍然有以上的性质，但

$$\lim_{t\to\infty}\|B(t)\|=0.$$

我们仍然用以上的 Y；则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(xYx')&=\frac{dx}{dt}Yx'+xY\left(\frac{dx}{dt}\right)'\\&=x(A+B(t))Yx'+xY(A'+B'(t))x'\\&=-xx'+x(B(t)Y+YB'(t))x'.\end{aligned}$$

当t充分大时，($t\geqslant t_0$ 时)

$$\frac{d}{dt}(xYx')\leqslant-\lambda_1 xYx'.$$

此处λ_1是一常数>0，积分得

$$xYx'\leqslant(xYx')_{t=t_0}e^{-\lambda_1 t}.$$

因此当 $t\to\infty$ 时 $xYx'\to 0$，而 $x\to 0$.

附记　如果A不是常数方阵，我们不能得出同样的结果来，也就是有 $A(t)$ 存在.

$$\frac{dy}{dt}=yA(t)$$

的解适合于 $\lim\limits_{t\to\infty}y=0$，而

$$\frac{dx}{dt}=x(A(t)+B(t))$$

的解却无此性质，虽然我们假定了

$$\lim_{t\to\infty}\|B(t)\| = 0.$$

反例是:

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1, \qquad \frac{dy_2}{dt} = (\sin\log t + \cos\log t - 2a)y_2$$

的解是

$$y_1 = c_1 e^{-at}, \quad y_2 = c_2 e^{t\sin\log t - 2at}.$$

如果 $a > \frac{1}{2}$, 当 $t\to\infty$ 时, 都趋于 0. 如果添上

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-at} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则新方程组是

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (\sin\log t + \cos\log t - 2a)x_2 + x_1 e^{-at},$$

而解答是

$$x_1 = c_1 e^{-at},$$

$$x_2 = e^{t\sin\log t - 2at}\left(c_2 + c_1\int_0^t e^{-\tau\sin\log\tau}d\tau\right).$$

考虑

$$t = e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}, \qquad n = 1, 2\cdots$$

诸点, 则

$$\int_0^t e^{-\tau\sin\log\tau}d\tau > \int_{te^{-\pi}}^{te^{-2\pi/3}} e^{-\tau\sin\log\tau}d\tau$$

$$= \pi\int_{2/3}^{1}\exp(-te^{-\alpha\pi}\cos\alpha\pi)te^{-\alpha\pi}d\alpha \ (\text{取}\ \tau = te^{-\alpha\pi})$$

$$> \pi t\exp(te^{-\pi}/2)\int_{2/3}^{1}e^{-\alpha\pi}d\alpha = t(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi})\exp(te^{-\pi}/2).$$

所以在 x_2 的解答中 c_1 的系数

$$> e^{t(1-2a)}t(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi})e^{\frac{1}{2}te^{-\pi}}.$$

当

$$1 - 2a > -\frac{1}{2}e^{-\pi}$$

时, $\lim_{t\to\infty} x_n$ 或趋于∞,或等于 0, 或趋于$-\infty$,视 $c_1 > 0$, $= 0$ 或 < 0 而定. 因此, 我们不能得出我们所希望的结论.

习题 1 如果 A 是复元素方阵,我们怎样来运用 Ляпунов 方法.

§5. 稳 定 性

一个物理系统有时为一微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\cdots,x_n,t),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

所刻划，其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是参数，而 t 是时间．研究这物理系统在平衡状态附近的性质是一个十分重要的问题．即如果来一个微小干扰，这个系统还会还原的则称为稳定的．不然，则称为不稳定的．当然物理系统可以通过试验而辨别其是否稳定，但有时实验花费大，需时久，不如用些数学方法来判断其是否稳定．

确切的稳定性的定义如下：

1°．初始值作微小变化，则是否解的变化也不大？

命 $(c_1,\cdots,c_n)$ 是 $t=t_0$ 时的初始值，因此初始值所得出的解是

$$x_i=g_i(t,c_1,\cdots,c_n).$$

命 $c_1^0,\cdots,c_n^0$ 是一组给定了的初始值．如果给了 $\varepsilon>0$，我们可以找出 $\delta(>0)$，使

$$|c_1-c_1^0|<\delta,\cdots,|c_n-c_1^0|<\delta$$

时，对所有的 $t\geqslant t_0$ 都有

$$|g_i(t,c_1,\cdots,c_n)-g_i(t,\ c_1^0,\cdots,c_n^0)|<\varepsilon$$

这样我们就说这个系统是**稳定的**．

并不失去普遍性，我们假定 $c_1^0=0,\cdots,c_n^0=0$，而且 $g_i(t,c_1^0,\cdots,c_n^0)=0$．这样我们的定义就变为特别简单了．当初始值

$$|c_i|<\delta,\quad i=1,2,\cdots,n$$

时，

$$|x_i(t)|<\epsilon,\quad t\geqslant t_0.$$

2°．加强条件：如果有一个 $\delta(>0)$ 存在当 $|c_i|<\delta$ 时，

$$\lim_{t\to\infty}x_i(t)=0$$

那末所研究的系统称为**渐近稳定的**．如果为了确切起见，我们加上"在 0 解附近"字样．

我们已知线性方程组

$$\frac{dx}{dt}=xA(t)$$

的解是

$$x=cX(t).$$

此处 c 是初始值，即当 $t=t_0$ 时，$x=c$，而 $X(t)$ 是适合于

$$\frac{dX}{dt}=XA(t),\quad X(t_0)=T$$

的方阵．

1) 如果 $X(t)$ 在 (t_0,∞) 中是有界方阵，即有 M 使

$$|x_{ij}(t)|\leqslant M,\quad (t\geqslant t_0,\ i,j=1,\cdots,n).$$

则

$$|x_i(t)|\leqslant Mn\max_{1\leqslant j\leqslant n}|c_j|.$$

因此取 $\delta<\frac{\varepsilon}{nM}$ 当 $|c_j|\leqslant\delta$ 时 $|x_i(t)|<\varepsilon$，也就是 0 解 $x_1=0,\cdots,x_n=0$ 所描写出的物理系统是稳定的．

2) $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$. 如此，则 $X(t)$ 当然有界，因而系统是稳定的. 再则由

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

可知系统是渐近稳定的.

3) 如果 $X(t)$ 无界. 即至少有一$x_{ij}(t)$ 在 (t_0, ∞) 间没有上界，我们取 $c_1 = 0, \cdots, c_{i-1} = 0, c_i \neq 0, c_{i+1} = 0, \cdots, c_n = 0$ 如此则

$$x_j = c_i x_{ij}(t),$$

x_j 因而也无界，因此系统是不稳定的.

注意　系统可能是对某些初始值是稳定的而某些不稳。

§ 6. Ляпунов 变换

现在考虑一般的线性方程:

$$\frac{dx}{dt} = xA(t).$$

定义 1　变换

$$x = yL(t)$$

称为 Ляпунов 变换，如果方阵 $L(t)$ 适合于

1°. 在 (t_0, ∞) 中 $L(t)$ 有连续微商 $\frac{dL}{dt}$,

2°. 在 (t_0, ∞) 中 $L(t)$, $\frac{dL}{dt}$ 有界,

3°. 有一个常数 $m (>0)$ 存在，使 $L(t)$ 的行列式的绝对值 $> m$.

$L(t)$ 称为 Ляпунов 方阵.

例 1　常数满秩方阵是 Ляпунов 方阵.

例 2　如果 D 的特征数是纯虚数而且是单构的，则

$$L(t) = e^{Dt}$$

是 Ляпунов 方阵.

定理 1　Ляпунов 方阵之逆仍然是 Ляпунов 方阵.

定理 2　Ляпунов 变换使稳定性，渐近稳定性及非稳定性不变.

此二定理的证明不难.

再研究 y 所适合的微分方程: 由

$$yL(t)A = xA(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}L(t) + y\frac{dL}{dt}$$

可知

$$\frac{dy}{dt} = yL(t)A(t)L(t)^{-1} - y\frac{dL}{dt}L(t)^{-1}.$$

定义 1　如果有 Ляпунов 方阵 $L(t)$ 使

$$B(t) = L(t)A(t)L(t)^{-1} - \frac{dL}{dt}L^{-1}, \tag{1}$$

则 $A(t)$ 与 $B(t)$ 称为 Ляпунов 等价. 用符号

$$A \overset{\text{Л}}{=} B$$

记之.显然有

(i) $A \overset{\text{Л}}{=} A$.

(ii) 由 $A \overset{\text{Л}}{=} B$ 得 $B \overset{\text{Л}}{=} A$;由(1)得

$$A(t) = L(t)^{-1}B(t)L(t) + L^{-1}\frac{dL}{dt} = L^{-1}B(t)L - \frac{dL^{-1}}{dt}L.$$

(iii) 由 $A \overset{\text{Л}}{=} B$, $B \overset{\text{Л}}{=} C$ 可得 $A \overset{\text{Л}}{=} C$;由

$$\begin{aligned} C &= MBM^{-1} - \frac{dM}{dt}M^{-1} = M\left(LAL^{-1} - \frac{dL}{dt}L^{-1}\right)M^{-1} - \frac{dM}{dt}M^{-1} \\ &= MLA(ML)^{-1} - \left(M\frac{dL}{dt}L^{-1}M^{-1} + \frac{dM}{dt}M^{-1}\right) \\ &= MLA(ML)^{-1} - \frac{d}{dt}(ML)(ML)^{-1}. \end{aligned}$$

定义 2　凡与常系数方阵 Ляпунов 等价的方阵所对应的方程组,称为可化简组.

因此任一可化简组方程的解答一定是

$$X(t) = L(t)e^{At}$$

的形式,这儿 $L(t)$ 是 Ляпунов 方阵,A是常数方阵. 至于解如上形的方程组一定是可化的那就不待证了.

§7. 周期性系数的微分方程组

定理 1　周期性系数的方程组一定是可化简组.

证明　假定

$$A(t+\tau) = A(t), \quad -\infty \leqslant t \leqslant \infty,$$

则

$$\frac{dX(t+\tau)}{dt} = X(t+\tau)A(t).$$

因此 $X(t+\tau)$ 也是一解,即得

$$X(t+\tau) = VX(t)$$

此处V是一个满秩的常数方阵.

由于 $|V| \neq 0$, 因此可以定义

$$V^{\frac{t}{\tau}} = e^{\frac{t}{\tau}\log V}$$

(注意 $\log V$ 所取的分支)取

$$L(t) = V^{-t/\tau}X(t)$$

这是一个周期函数,

$$L(t+\tau) = L(t),$$

而且 $|L(t)| \neq 0$, 因此 $L(t)$ 是一个 Ляпунов 方阵. 这样

我们定义

$$X(t) = Y(t)L(t),$$

$$Y(t) = V^{t/\tau}$$

因此

$$\frac{dY}{dt} = Y\left(\frac{1}{\tau}\log V\right).$$

再考虑

$$\frac{dx}{dt} = x(A(t) + B(t)), \tag{1}$$

$A(t)$ 是有周期性的，$\lim\limits_{t\to\infty}\|B(t)\| = 0$ 的情况则可以用以上所述的 Ляпунов 变换变为一方程组其

$$A = |a_{ij}|_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{1}{\tau}\log V.$$

因而如 §4 的方法处理.

如果方阵 V 的所有的特征根的绝对值都 <1，则方程组 (1) 的解是渐近稳定的. 如果这些根中有一个的绝对值 >1，则是非稳定的.

附记 1　因此

$$\frac{dX}{dt} = XA(t), \quad X(0) = I,$$

$(A(t+1) = A(t))$ 的解的形式是

$$X(t) = e^{Ct}Q(t),$$

此处 $Q(t+1) = Q(t)$，C 是常数方阵.

附记 2　有周期系数的微分方程的研究是一个重要而且艰难的课题. 例如，在数学物理中某些重要研究中所遇到 Mathieu 方程

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (a + b\cos 2t)u = 0$$

及月球运动中所遇到一般的方程

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt)\right] \qquad \text{(Hille)}$$

都是这类的. 有专著讨论.

§ 8. Ляпунов 等价

我们现在研究常数方阵的 Ляпунов 等价问题. 我们已经知道，如果

$$A \overset{\Gamma}{=} B，即 A = PBP^{-1},$$

则

$$A \overset{Л}{=} B.$$

因此任一方阵 A 一定 Ляпунов 等价于一 Jordan 标准型.

因此我们现在来考虑 Jordan 块的等价问题.

1) $n = 1$. Ляпунов 等价条件变为

$$b = a - \frac{dl}{dt}l^{-1} = a - \frac{d}{dt}\log l.$$

因此得出

$$l(t) = e^{(a-b)(t-t_0)}.$$

由于 $l(t)$ 及 $l(t)^{-1}$ 的有界性质可知

$$l(t) = ce^{i\lambda t},\ \lambda \text{ 是实数}.$$

即两个数 Ляпунов 等价,则他们的实数部分相等. 反过来,命 $a=\alpha+i\beta$, 则取 $l(t)=e^{i\beta t}$, 则

$$b = a - \frac{d}{dt}\log l = \alpha.$$

即一个数一定 Ляпунов 等价于它的实数部分.

2) 一般的情况

$$aJ,\ a = \alpha + \beta i.$$

取 $L = e^{i\beta t}I$, 就把它变为

$$\alpha J$$

的形状了.

因此得出

定理 1 (Еругин). 每一个可化组都可以用 Ляпунов 变换 $X = LY$ 化为

$$\frac{dY}{dt} = YJ$$

此处 J 是特征数全为实数的 Jordan 方阵.

现在不去证明：如果不计 J 中对角线上诸子块的次序，这样的标准形是唯一的.

§ 9. 逼近于常系数的差分方程与微分方程

关于差分方程

$$x(t+1) = x(t)A(t),\ \lim_{t\to\infty} A(t) = A$$

参考：Фрейман, Успехи Мате. Надк, Том 12, 3, 243—264.

关于微分方程

$$\frac{dx}{dt} = xA(t),\ \lim_{t\to\infty} A(t) = A,$$

参考 R. Bellman，微分方程的解的稳定性理论 P.52—60.

第六章 二 次 型

§1. 凑 方

中学里学习二次方程时所用的“凑方”法有很多的用处，熟悉了这个方法可以处理不少问题，在讲初等微积分极大极小问题时已经讲过一些，在研究二次型的时候，这个方法更为重要。

n 个变数的二次型就是

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j. \tag{1}$$

由于 $a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i=(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$，我们不妨假定

$$a_{ij}=a_{ji}.$$

对应于一个二次型，有一个方阵

$$A=(a_{ij}) \tag{2}$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$，即 $A=A'$，这是对称方阵，反之对应于一个对称方阵我们有一个二次型，二次型可以写成为

$$xAx', \tag{3}$$

此处 $x=(x_1,\cdots,x_n)$.

当 $x_1,\cdots,x_n$ 经过线性变换

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}y_jp_{ji},\quad x=yP, \tag{4}$$

变为 $y_1,\cdots,y_n$ 时，二次型变为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_iy_j,\quad b_{ij}=b_{ji},\quad B=(b_{ij}),$$

其中 B 与 A 的关系如何？由 (1) 及 (3) 可知

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\sum_{s=1}^{n}y_sp_{si}\sum_{t=1}^{n}y_tp_{tj}$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_{si}p_{tj}\right)y_sy_t,$$

即

$$b_{st}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{si}a_{ij}p_{tj}.$$

写成矩阵形式

$$B=PAP'. \tag{5}$$

定义 如果有一个满秩方阵 P 使(5)式成立，则 A 与 B 称为相合。

相合有等价关系。

我们的问题是:利用线性变换(4),可以把二次型(1)化为怎样的形式。

假定 $a_{11} \neq 0$, 把(1)写成为

$$Q = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}y_1y_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2.$$

凑方得

$$\begin{aligned} Q &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 - a_{11}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 \\ &\quad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + 2\frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}}x_2x_3 \\ &\quad + \cdots + 2\frac{a_{11}a_{2n} - a_{12}a_{1n}}{a_{11}}x_2x_n + \frac{a_{33}a_{11} - a_{13}^2}{a_{11}}x_3^2 + \cdots \\ &\quad + 2\frac{a_{11}a_{3n} - a_{13}a_{1n}}{a_{11}}x_3x_n + \cdots + \frac{a_{nn}a_{11} - a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2. \end{aligned}$$

如果 $a_{22}a_{11} - a_{12}^2 \neq 0$, 则还可以凑方,这样便不难得出

$$\begin{aligned} Q &= a_{11}(x_1 + \beta_{12}x_2 + \cdots + \beta_{1n}x_n)^2 + \frac{D\begin{pmatrix}1, & 2\\ 1, & 2\end{pmatrix}}{a_{11}}(x_2 + \beta_{23}x_3 + \cdots + \beta_{2n}x_n)^2 \\ &\quad + \frac{D\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 1, & 2, & 3\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}1, & 2\\ 1, & 2\end{pmatrix}}(x_3 + \beta_{34}x_4 + \cdots + \beta_{3n}x_n)^2 + \cdots + \frac{D\begin{pmatrix}1, & \cdots, & n\\ 1, & \cdots, & n\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & n-1\\ 1, & 2, & \cdots, & n-1\end{pmatrix}}x_n^2. \end{aligned} \tag{6}$$

此处

$$\beta_{ij} = \frac{D\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & i-1, & i\\ 1, & 2, & \cdots, & i-1, & j\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & i\\ 1, & 2, & \cdots, & i\end{pmatrix}}, \quad i < j.$$

命

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \cdots + \beta_{1n}x_n, \\ y_2 &= \qquad\quad x_2 + \beta_{23}x_3 + \cdots + \beta_{2n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_n, \end{aligned}$$

则得以下的结果,如果 A 的主子行列式

$$D\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix}1, & 2\\ 1, & 2\end{pmatrix}, \cdots, \ D\begin{pmatrix}1, & \cdots, & n\\ 1, & \cdots, & n\end{pmatrix}$$

都不等于0,则有一个三角方阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{12} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{13} & \beta_{23} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

使

$$PAP'$$

变为对角线的形式,而且在求出 P 的过程中仅用加减乘除(不用开方及其他运算).

如果二次型恒等于 0,则所有的系数都等于 0,何以见得? 由

$$e_iAe_i' = a_{ii}, \qquad (e_i + e_j)A(e_i + e_j)' - e_iAe_i' - e_jAe_j' = 2a_{ij}$$

即可推出结论,这儿 e_i 是矢量$(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$. 第 i 个分量为 1,其他为 0.

因此对任一非恒等于 0 的二次型,必有一非 0 的系数. 如果有一个 $a_{ii} \neq 0$,则可搬 x_i 换为 x_1 而如上法进行,如果 $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$,而 $a_{ij} \neq 0$,不妨假定就是 $a_{12} \neq 0$.

变形 $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3, \cdots, x_n = y_n$, 就可以使

$$0x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + 0x_2^2 + \cdots = a_{12}y_1^2 + \cdots + \cdots$$

中的 y_1^2 项的系数不等于 0,因此得

定理 1 任一对称方阵一定相合于一个对角线方阵,也就是任一二次型可以化为

$$\lambda_1x_1^2 + \cdots + \lambda_rx_r^2 \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_r \neq 0$$

的形式,而 r 是原方阵的秩.

在变化的过程中只用了四则运算.

在复数范围内,命

$$y_i = \sqrt{\lambda_i}x_i, \tag{7}$$

则得

$$Q = y_1^2 + \cdots + y_r^2. \tag{8}$$

即得

定理 2 在复数范围内,对称方阵一定相合于

$$\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这儿 r 是原方阵的秩,因此任意两个等秩的对称方阵一定相合.

在实数范围内 $\sqrt{\lambda_i}$ 不一定是实的,因此不能化为(8)的形式,而必须分清那些 λ_i 是正的那些是负的,如果已知

$$\lambda_1 > 0, \cdots, \lambda_s > 0, \quad \lambda_{s+1} < , \cdots, \lambda_r < 0,$$

则由 $y_i = \sqrt{|\lambda_i|}x_i$ 可以把 Q 变为

$$Q = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

也就是在实数范围内 A 相合于

$$\begin{pmatrix} I^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & -I^{(r-s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

定义 正项项数减去负项项数(即 $s - (r - s) = 2s - r$)称为实二次型的标.

定理 3 在实数范围内,两个二次型相合的必要且充分条件是: 他们的秩与标都相等,而(9)称为标准型.

前面已经证明,任一实二次型一定相合于以方阵(9)为系数的二次型,现在所待证明的是: 如果

$$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 = y_1^2 + \cdots + y_{s_1}^2 - y_{s_1+1}^2 - \cdots - y_{r_1}^2,$$

则 $s = s_1$, $r = r_1$, 这儿 x, y 间有满秩的线性关系,秩应当相等,因此 $r = r_1$,现在仅需证明 $s = s_1$.

假定 $s < s_1$，考虑

$$x_1 = \cdots = x_s = 0, \quad y_{s_1+1} = \cdots = y_r = 0; \tag{10}$$

把 $x_1, \cdots, x_s$ 看成为 y 的线性型，则共有 $s + r_1 - s_1 < r$ 个方程式，共有 $x_{s+1}, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_{s_1}$ 个未知数，方程数 $s + r - s_1$ 小于未知数的个数，因此有一组非全为 0 的 $x_{s+1}, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_{s_1}$ 适合于 (10)，因此

$$-(x_{s+1}^2 + \cdots + x_r^2) = y_1^2 + \cdots + y_{s_1}^2$$

这是不可能的，因此 $s = s_1$。

§2. 大块凑方法

还是凑方的基本看法，把 A 划分为

$$A = \begin{pmatrix} A_1^{(s)} & L \\ L' & A_2^{(n-s)} \end{pmatrix}.$$

如果 $|A_1| \neq 0$，则

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -L'A_1^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & L \\ L' & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -L'A_1^{-1} & I \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A_1 & L \\ 0 & A_2 - L'A_1^{-1}L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_1^{-1}L \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 - L'A_1^{-1}L \end{pmatrix}.$$

由大块凑方法，立刻看出

$$|A| = |A_1| |A_2 - L'A_1^{-1}L|.$$

定义 1　如果 $A' = -A$，则 A 称为斜对称，二斜对称方阵 A, B 称为相合，如果有满秩的 P，使

$$PAP' = B.$$

定理 1　A 一定相合于

$$\begin{pmatrix} F & 0 & \\ 0 & F & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

两斜对称方阵相合的必要充分条件是他们的秩相等.

证明　1）斜对称方阵的主对角线上的元素一定都等于0.

2）$n = 2$，由

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

所以定理当 $n = 2$ 时正确.

3）不妨假定 $a_{12} \neq 0$，把 A 划分为

$$\begin{pmatrix} A_1 & L \\ -L' & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = A_2^{(n-2)}.$$

如此则

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ L'A_1^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & L \\ -L' & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ L'A_1^{-1} & I \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 + L'A_1^{-1}L \end{pmatrix}.$$

而 $A_2+L'A_1^{-1}L$ 是一 $n-2$ 行列的斜对称方阵，因而证明了本定理。

由此极易推得：

定理 2 奇次斜对称方阵一定是非满秩的。

定理 3 满秩的斜对称方阵之行列式是一个平方数。

附记 这儿我们仅用了四则运算，而没有用上开方。

§3. 仿射几何二次曲面的仿射分类

定义 命 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$。变形

$$x=yA+c,\quad |A|\neq 0 \tag{1}$$

称为仿射变换，此处 $A=A^{(n)}$，c 是一个 n 维矢量。

$x=(x_1,\cdots,x_n)$ 所成的空间称为仿射空间。

仿射几何学就是研究几何图形在仿射变换下的性质。如果有两个图形，我有一个仿射变换把其一变为它一，则他们称为仿射等价。

仿射等价关系是一个等价关系。

例 1 任何一点一定仿射等价于另一点，这称为仿射空间的可递性，一直线变为一直线。

例 2 一个平面

$$xa'=\lambda$$

经仿射变换变为一个平面：

$$yAa'=\lambda-ca'.$$

任一平面可以变为

$$x_1=0.$$

例 3 任意不在同平面上 $n+1$ 个点可以变为

$$0,\ e_1,\ e_2,\cdots,\ e_n.$$

证明 先把一点变为 0。其他各点 $x^{(i)}=(x_1^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})(i=1,2,\cdots,n)$ 所成的方阵

$$A=\begin{pmatrix}x_1^{(1)}, & \cdots, & x_n^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1^{(n)}, & \cdots, & x_n^{(n)}\end{pmatrix}$$

是满秩的（由于 $n+1$ 点不在一平面上），变换

$$x=yA$$

把 $x=x^{(i)}$ 变为 $y=e_i$。

例 4 同一直线上取三点 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$x^{(3)}=tx^{(1)}+(1-t)x^{(2)}$，他们经 (1) 变为

$$y^{(1)}, y^{(2)},\ 及\ y^{(3)},$$

则

$$\begin{aligned}x^{(3)}&=tx^{(1)}+(1-t)x^{(2)}=t(y^{(1)}A+c)+(1-t)(y^{(2)}A+c)\\&=(ty^{(1)}+(1-t)y^{(2)})A+c.\end{aligned}$$

即得

$$y^{(3)}=ty^{(1)}+(1-t)y^{(2)}.$$

由此推得：$x^{(1)}, x^{(3)}$ 间，$x^{(2)}, x^{(3)}$. 间距离之比等于 $y^{(1)}, y^{(3)}$ 间，$y^{(2)}, y^{(3)}$ 间距离之比。(注意经过仿射变换距离是可变的.)

二次曲面的一般形式是

$$xSx' + 2bx' + \gamma = 0. \tag{2}$$

此处 $S = S' = S^{(n)}$，b 是 n 矢量，γ 是常量，对应于一个二次曲面有一个 $n+1$ 行列的方阵

$$G = \begin{pmatrix} S & b' \\ b & \gamma \end{pmatrix}. \tag{3}$$

当 (2) 经过 (1) 而变为

$$\begin{aligned}&(yA + c)S(yA + c)' + 2b(yA + c)' + \gamma \\ &\quad = yASAy' + 2(cSA' + bA')y' + cSc' + 2bc' + \gamma,\end{aligned}$$

它所对应的方阵

$$\begin{aligned}F = \begin{pmatrix} T & a' \\ a & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ASA' & A(Sc' + b') \\ (cS + b)A' & cSc' + 2bc' + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & b' \\ b & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}' \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} A & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}'.\end{aligned}$$

由此如果 G 与 F 所代表的二次曲面仿射等价，则 S 与 T 相合；G 与 F 相合. 在复数范围内 S 与 T 的秩相等，G 与 F 的秩相等，在实数范围内 S 与 T 的标与秩相等，G 与 F 的秩与标也相等.

更具体些，在复数范围内，有 A 使

$$ASA' = \begin{pmatrix} I^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$x_1^2 + \cdots + x_r^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \gamma = 0.$$

凑方

$$(x_1 + b_1)^2 + \cdots + (x_r + b_r)^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i + \gamma' = 0, \qquad \gamma' = \gamma - \sum_{i=1}^{r} b_i^2.$$

分三种情况来研究

(i) 所有的 $b_i (i = r + 1, \cdots, n)$ 都等于 0，而 $\gamma \neq 0$，则

$$x_1 + b_1 = \sqrt{\gamma'}y_1, \cdots, x_r + b_r = \sqrt{\gamma'}y_r$$

把 (2) 变为

$$y_1^2 + \cdots + y_r^2 + 1 = 0. \tag{4}$$

(ii) 所有的 $b_i (i = r + 1, \cdots, n)$ 及 γ' 都等于 0，则 (2) 仿射等价于

$$y_1^2 + \cdots + y_r^2 = 0. \tag{5}$$

(iii) 并非所有的 $b_i (i = r + 1, \cdots, n)$ 都等于 0，则由

$$x_1 + b_1 = y_1, \cdots, x_r + b_r = y_r, \quad \sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i + \frac{1}{2}\gamma = y_{r+1}$$

$$y_1^2 + \cdots + y_r^2 + 2y_{r+1} = 0. \tag{6}$$

即在复数范围内，任何一个二次方曲面一定仿射等价于(4)，(5)，(6)之一，在这儿也同时证明了，G 的秩减 S 的秩 $\leqslant 2$.

定理 1 如果 S 的秩等于 G 的秩等于 r，则所对应的二次曲面仿射等价于 (5)；如果 S 的秩等于 G 的秩减1，则等价于(4)，如果 S 的秩等于 G 的秩减 2，则等价于(6)。

再在实数范围，首先有 A 使

$$ASA' = \begin{pmatrix} I^{(s)} & 0 & 0 \\ 0 & -I^{(r-s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

即 (2) 实仿射等价于

$$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \gamma = 0. \tag{7}$$

凑方，得

$$(x_1 + b_1)^2 + \cdots + (x_s + b_s)^2 - (x_{s+1} - b_{s+1})^2 - \cdots - (x_r - b_r)^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i + \gamma' = 0,$$

$$\gamma' = \gamma - \sum_{i=1}^{s} b_i^2 + \sum_{i=s+1}^{r} b_i^2.$$

(i) 如果 $b_i(i = r + 1, \cdots, n)$ 及 r' 都等于 0，则(2)等价于

$$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 0. \tag{8}$$

(ii) 如果 $b_i(i = r + 1, \cdots, n)$ 都等于 0，而 $\gamma' \neq 0$，则由

$$x_1 + b_1 \to \sqrt{|\gamma'|}x_1, \cdots, \quad x_r - b_r \to \sqrt{|\gamma'|}x_r$$

可知 (2) 等价于

$$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 = \pm 1. \tag{9}$$

(iii) 如果有一个 $b_i(i = r + 1, \cdots, n) \neq 0$，则由

$$x_1 + b_1 \to x_1, \cdots, x_r - b_r \to x_r, \quad \sum_{i=r+1}^{n} b_i x_i + \frac{1}{2}\gamma' \to x_{r+1}$$

可知 (2) 等价于

$$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_r^2 + 2x_{r+1} = 0. \tag{10}$$

由此得出结论

定理 2 如果 S 的秩等于 G 的秩，而 S 的标等于 $2s - r$，则二次曲面仿射等价于(8)。如果 G 的秩等于 S 的秩加一，则仿射等价于 (9)。如果 G 的秩等于 S 的秩加二，则仿射等价于(10)。

特例：在实数平面上，即 $n = 2$ 时，二次曲线仿射等价于以下几种曲线之一

(i)	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	点圆，
(ii)	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	两条相交的直线，
(iii)	$x_1^2 = 0.$	一直条线，
(iv)	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	圆，
(v)	$x_1^2 + x_2^2 = -1$	虚圆，
(vi)	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	双曲线，
(vii)	$x_1^2 = 1$	两条平行的直线，
(viii)	$x_1^2 = -1$	两条虚直线，
(ix)	$x_1^2 = 2x_2$	抛物线。

在三维空间中，二次曲面仿射等价于（只考虑G满秩的情况）.

(i)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$,	点球，
(ii)	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$,	圆锥，
(iii)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$,	球，
(iv)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$,	虚球，
(v)	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=1$,	单叶双曲面，
(vi)	$x_1^2-x_2^2-x_3^2=1$,	双叶双曲面，
(vii)	$x_1^2+x_2^2+x_3=0$,	椭圆抛物面，
(viii)	$x_1^2-x_2^2+x_3=0$,	双曲抛物面.

习题　试列出F非满秩的方程并且说明它们的几何名称.

§4. 射影几何

定义　射影变换是以下形式的变换

$$y=(xA+b)/(xc+d). \tag{1}$$

此处 $A=A^{(n,n)}$, $b=b^{(1,n)}$, $c=c^{(n,1)}$, $d=d^{(1)}$. 并假定

$$P=\begin{vmatrix} A & c \\ b & d \end{vmatrix}\neq 0. \tag{2}$$

如果

$$z=\frac{(yA^*+b^*)}{(yc^*+d^*)},\quad P^*=\begin{pmatrix} A^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$$

$$z=\frac{[(xA+b)A^*+b^*(xc+d)b^*]}{[(xA+b)c^*+(xc+d)d^*]}=\frac{(x(AA^*+cb^*)+bA^*+db^*)}{(x(Ac^*+cd^*)+bc^*+dd^*)}$$

也是一个射影变换，而且它的方阵

$$\begin{pmatrix} AA^*+cb^* & Ac^*+cd^* \\ bA^*+db^* & bc^*+dd^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}.$$

即连续施行两次射影变换所得出的依然是射影变换，其对应方阵是原对应方阵的乘积，因此，对应于逆方阵，我们有变换(1)的逆变换.

注意　对应一个射影变换(1)，我们有一个方阵(2). 但是反过来，不同的方阵可以对应于同一的射影变换，例如 ρP 也是对应于(1)，这儿 ρ 是任一不等于0的数.

进一步，研究怎样的不同的P会对应于相同的变换(1)，我们只要考虑，怎样的P对应于恒等变换，在(1)中以

$$x=0,\qquad e_1,\cdots,e_n$$

代入，而要求

$$y=0,\qquad e_1,\cdots,e_n,$$

则得 $b=0$ 及

$$e_i(e_ic+d)=e_iA$$

e_ic+d 是一个数，因此得，$a_{ji}=0$，$(i\neq j)$，取 $x=y=\lambda e_i$，则对任 $\lambda\neq 0$，

$$(e_ic)\lambda^2e_i+\lambda de_i=\lambda a_{ii}e_i,\qquad (e_ic)\lambda+d=a_{ii}.$$

因此 $e_ic=0$，即得 $c=0$，并且 $a_{ii}=d$，即

$$P=[d,d,\cdots,d].$$

即当且仅当 $P=\rho I$ 时，(1)代表恒等变换.

不难证明，如果 P 与 Q 代表同一变换，则它们之间相差一个常数因子.

射影变换也是把线性关系变为线性关系.

仿射变换是射影变换，所以在射影变换下不变的性质，在仿射变换下也不变.

射影变换有以下的一些性质：

1）任意 $n+2$ 个点，其中任意 $n+1$ 点都不在一个 n 维的平面上，可以变为

$$0,e_1,\cdots,e_n,\ e_1+\cdots+e_n.$$

证明　仿射变换已经把 $n+1$ 点变为

$$0,e_1,\cdots,e_n.$$

还有一点

$$(a_1,\cdots,a_n).$$

由假定 $a_1\cdots a_n\neq 0$.（因为如果 $a_1=0$. 则此点在 $0,e_2,\cdots,e_n$ 所定的平面上）. 射影变换

$$x_i=a_iy_i$$

把 $x_i=a_i$ 变为 $y_i=1$. 即可得证.

射影变换的另一形式：命

$$\begin{pmatrix}A & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^* & c^*\\ b^* & d^*\end{pmatrix}=I,$$

则

$$(xc+d)^{-1}(xA+b)=(d^*x-b^*)(-c^*x+A^*)^{-1}.$$

要证明此式极易，因为它就等价于

$$\begin{aligned}&(xA+b)(-c^*x+A^*)-(xc+d)(d^*x-b^*)\\&\quad=-x(Ac^*+cd^*)x+x(AA^*+cb^*)-(bc^*+dd^*)x+bA^*+db^*\\&\quad=x-x=0.\end{aligned}$$

假定 $x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)},x^{(4)}$ 经(1)而变为 $y^{(1)},y^{(2)},y^{(3)},y^{(4)}$，则

$$\begin{aligned}y^{(i)}-y^{(j)}&=(x^{(i)}c+d)^{-1}(x^{(i)}A+b)-(d^*x^{(j)}-b^*)(-c^*x^{(j)}+A^*)^{-1}\\&=(x^{(i)}c+d)^{-1}[(x^{(i)}A+b)(-c^*x^{(j)}+A^*)-(x^{(i)}c+d)(d^*x^{(j)}-b^*)]\\&\quad\times(-c^*x^{(j)}+A^*)^{-1}\\&=(x^{(i)}c+d)^{-1}(x^{(i)}-x^{(j)})(-c^*x^{(j)}+A^*)^{-1}.\\&=p^{(i)}(x^{(i)}-x^{(j)})Q^{(j)}.\end{aligned}$$

假定这些点在 x^*,x^{**} 的联线上，而且

$$x^{(i)}=t^{(i)}x^*+(1-t^{(i)})x^{**}$$

并且假点 x^*,x^{**} 变为 y^*,y^{**}，而 $x^{(i)}$ 变为 $y^{(i)}=\lambda^{(i)}y^*+(1-\lambda^{(i)})y^{**}$，则由

$$x^{(i)}-x^{(j)}=(t^{(i)}-t^{(j)})(x^*-x^{**}),$$

可知

$$(\lambda^{(i)}-\lambda^{(j)})(y^*-y^{**})=p^{(i)}(t^{(i)}-t^{(j)})(x^*-x^{**})Q^{(j)}.$$

x^i 与 x^j 的距离的平方等于 $(x^i-x^j)(x^i-x^j)'$，因此 x^i, x^j 之距离的平方与 y^i，y^j 之距离的平方的关系是:

$$(\lambda^{(i)}-\lambda^{(j)})^2(y^*-y^{**})(y^*-y^{**})'=(p^{(i)})^2(t^{(i)}-t^{(j)})^2$$
$$\cdot(x^*-x^{**})Q^{(j)}Q^{(j)\prime}(x^*-x^{**})'$$

$y^{(1)}$ 与 $y^{(2)}$ 的距离与 $y^{(3)}$ 与 $y^{(2)}$ 的距离的比等于

$$\cdot(\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)})(\lambda^{(3)}-\lambda^{(2)})^{-1}=p^{(1)}(t^{(1)}-t^{(2)})(t^{(3)}-t^{(2)})^{-1}/p^{(3)}.$$

因此，得:

$$\frac{\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)}}{\lambda^{(3)}-\lambda^{(2)}}\Big/\frac{\lambda^{(1)}-\lambda^{(4)}}{\lambda^{(3)}-\lambda^{(4)}}=\frac{t^{(1)}-t^{(2)}}{t^{(3)}-t^{(2)}}\Big/\frac{t^{(1)}-t^{(4)}}{t^{(3)}-t^{(4)}}.$$

这个

$$\frac{\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)}}{\lambda^{(3)}-\lambda^{(2)}}\Big/\frac{\lambda^{(1)}-\lambda^{(4)}}{\lambda^{(3)}-\lambda^{(4)}}$$

称为四点的交比．由此可见射影变换使同直线四点的交比不变．

§5. 二次曲面的射影分类

二次曲面

$$xSx'+2bx'+\gamma=0,\quad F=\begin{pmatrix}S & b'\\ b & \gamma\end{pmatrix}$$

经射影变换变为

$$\begin{aligned}&(xA+b)S(xA+b)'+2(xc+d)b(xA+b)'+\gamma(xc+d)^2\\&=(xA+b)S(xA+b)'+(xc+d)b(xA+b)'\\&\quad+(xA+b)b'(xc+d)'+\gamma(xc+d)(xc+d)'\\&=x(ASA'+cbA'+Ab'c'+\gamma cc')x'+2(bSA'+dbA'\\&\quad+bb'c'+\gamma dc')x'+bSb'+2dbb'+\gamma d^2.\end{aligned}$$

它的方阵

$$\begin{aligned}G&=\begin{pmatrix}ASA'+cbA'+Ab'c'+\gamma cc' & (bSA'+dbA'+bb'c'+\gamma dc')\\ bSA'+dbA'+bb'c'+\gamma dc' & bSb'+2dbb'+\gamma d^2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S & b'\\ b & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & c\\ b & d\end{pmatrix}'=PFP'.\end{aligned}$$

因此，二次曲面的射影分类特别容易．

在复数域中 F 的秩是唯一的不变量．任一秩等于 r 的 F 有一个 P 使

$$PFP'=\begin{pmatrix}I^{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

即任一二次曲面一定射影等价于

$$x_1^2+\cdots+x_r^2=0,\qquad \text{如果 } r<n,$$
$$x_1^2+\cdots+x_r^2=1,\qquad \text{如果 } r=n.$$

前者称为退化的．因此非退化的二次曲面一定射影等价于球．

在实数域中，如果 F 是非退化的，即 F 是满秩的，那它一定等价于

$$x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_n^2=1,$$

在平面上非退化的二次曲线一定射影等价于实圆虚圆或双曲线。

§6. 定 正 型

现在实数范围内研究问题。

定义 1　对任一非 0 的矢量常有

$$xSx'>0,\quad (S'=S)$$

则 S 或其所对应的二次型称为定正的. 如果对所有的 x 常有

$$xSx'\geqslant 0$$

则 S 称为半定正的。

显然有定正的 S 一定是满秩的，因为如果 S 非满秩的，则有 $x(\neq 0)$ 使 $xS=0$，因而 $xSx'=0$.

在实相合下，定正性（或半定正性）是不变的，即如果 S 定正，而 $T=PSP'$（P 实，$|P|\neq 0$），则 T 也是定正的.

由于任一对称方阵一定实相合于

$$\begin{pmatrix} I^{(s)} & 0 & 0\\ 0 & -I^{(r-s)} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad (x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_r^2).$$

因此，半定正的条件是 $r=s$，定正的条件是 $r=s=n$. 即如果 S 是半定正，则

$$S=P\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P'.$$

在这表达式 P 的第 $r+1,\cdots,n$ 列都不起作用，如果把 P 的前 r 列写成为

$$Q=\begin{pmatrix} p_{11}, & \cdots, & p_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{n1}, & \cdots, & p_{nr}\end{pmatrix},\qquad Q=Q^{(n,r)},$$

则得

$$S=QQ'.$$

有两个有用的特例:

1）如果 $r=1$，则

$$S=u'u.$$

这儿 u 是一个 n 维实矢量.

2）如果 $r=n$，则任一定正的方阵可以表成为

$$S=PP'$$

的形式，这儿 P 是满秩方阵.

反之也十分明显，因为 $y=xP$，则

$$xSx'=yy'=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=0.$$

即得 $y_1=\cdots=y_n=0$. 因而 $x_1=\cdots=x_n=0$.

定理 1 半定正方阵的主子方阵也是半定正的.

证明十分容易. 因为不妨假定主子方阵就是第 1, 2⋯, l 行列的元素所成的方阵, 即

$$S=\begin{pmatrix} S_1 & L \\ L' & S_2 \end{pmatrix}, \qquad S_1=S_1^{(l)}$$

中的 S_1 · 矢量 $x=(x_1,\cdots,x_l, 0,\cdots,0)$ 使

$$xSx'=(x_1,\cdots,x_l)S_1(x_1,\cdots,x_l)'$$

由于 $xSx'\geqslant 0$, 所以 S_1 是半正定的.

定理 2 半定正方阵的行列式 $\geqslant 0$.

这也是显然. 由于

$$\det(PP')=(\det P)^2\geqslant 0.$$

由此也可推出 Schwarz 不等式

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'\right|=\begin{vmatrix} xx' & xy' \\ yx' & yy' \end{vmatrix}=xx'yy'-(xy')^2\geqslant 0.$$

还有更广的不等式

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}'\right|=\begin{vmatrix} xx' & xy' & xz' \\ yx' & yy' & yz' \\ zx' & zy' & zz' \end{vmatrix}\geqslant 0$$

等等.

§7. 用凑方法求最小值

1) 假定 S 是定正的, C 是一个矢量, 研究函数

$$F(x_1,\cdots,x_n)=xSx'+2xC'+\gamma \tag{1}$$

的最小值,

由

$$xSx'+2xC'+\gamma=(x+CS^{-1})S(x+CS^{-1})'+\gamma-CS^{-1}C'\geqslant\gamma-CS^{-1}C'$$

可知 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 的最小值等于

$$\gamma-CS^{-1}C', \tag{2}$$

而且当且仅当 $x=-CS^{-1}$ 时, 取此最小值.

如果 S 是定负的, 则(1)有最大值. 如果 S 的标不等于 $\pm n$, 则(1)无最大最小值. 因为 $S=P[1,1,\cdots,1,-1,\cdots,-1]P'$, 命 $xP=y$, 则

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{s}y_i^2-\sum_{i=s+1}^{n}y_i^2+\cdots.$$

因之, 当 $y_1\to\infty$ 时 $F\to\infty$, 而 $y_n\to\infty$ 时 $F\to-\infty$ (其他变数取常数可也).

2) 条件极值.

在条件

$$xC'=\alpha$$

下求

$$xSx'$$

的最小值。考虑

$$xSx' + 2\lambda(xC' - \alpha)$$

的最小值，λ 是任一实数，由 1) 可知

$$xSx' + 2\lambda xC' - 2\lambda\alpha \geqslant -2\lambda\alpha - \lambda^2 CS^{-1}C' = \frac{\alpha^2}{CS^{-1}C'} - \left(\lambda + \frac{\alpha}{CS^{-1}C'}\right)^2 CS^{-1}C'.$$

当且仅当 $x = -\lambda CS^{-1}$ 时取等号．利用约束条件 $xC' = \alpha$，即 $-\lambda CS^{-1}C' = \alpha$ 可知 $xsx' \geqslant \frac{\alpha^2}{CS^{-1}C'}$，且仅当 $x = \frac{\alpha CS^{-1}}{CS^{-1}C'}$ 时取等号。

由此即得，对任一定正的 S 常有不等式

$$(xC')^2(=\alpha^2) \leqslant (xSx')(CS^{-1}C')$$

这又是 Schwarz 不等式的推广．因为如果 $S = I$ 这就是 Schwarz 不等式，读者试由 Schwarz 不等式来推出这不等式。

3）如果约束条件不止一个，即在条件

$$xC = \alpha$$

下求

$$xSx'$$

的最小值，此处 $C = C^{(n,l)}$，α 是一个 l 维的矢量．考虑函数

$$xSx' + 2(xC - \alpha)\lambda' = xSx' + 2xC\lambda' - 2\alpha\lambda'$$

这儿 λ 是一个 l 维的矢量．由 1) 可知

$$xSx' + 2(xC - \alpha)\lambda' \geqslant -2\alpha\lambda' - \lambda C'S^{-1}C\lambda'$$

且仅当 $x = -\lambda C'S^{-1}$ 时取等号．由约束条件

$$xC = -\lambda C'S^{-1}C = \alpha, \lambda = -\alpha(C'S^{-1}C)^{-1}$$

可得

$$xSx' \geqslant -\alpha\lambda' = \alpha(C'S^{-1}C)^{-1}\alpha'.$$

§ 8. Hessian

一个函数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ 的 Hessian 是方阵

$$H(x_1, \cdots, x_n, F) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n},$$

经变换

$$x_i = f_i(y_1, \cdots, y_n)$$

后

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

即得

$$H(x_1, \cdots, x_n, F) = \left(\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right)' H(y_1, \cdots, y_n, F) \left(\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_k}H(x_1,\cdots,x_n;\ y_k).$$

如果变换是线性的，

$$x_i=\sum_{i=1}^{n}y_ja_{ji},\qquad x=yA,$$

则

$$H(x_1,\cdots,x_n)=(A^{-1})'H(y_1,\cdots,y_n)A^{-1}.$$

定义．在区域D内，如果 $H(x_1,\cdots,x_n)$ 定正，函数F称为向下凹（成锅形），如果 $H(x_1,\cdots,x_n)$ 定负，则向上凸（成帽形）．

由上可知，线性变换使上凸或下凹的性质不变．

§9. 常系数二级偏微分方程分类

我们现在考虑常系数线性二级偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=0,\quad a_{ij}=a_{ji}\tag{1}$$

经变换

$$x_s=\sum_{t=1}^{n}y_tp_{ts},\quad x=yP\tag{2}$$

方程(1)变为

$$\sum_{s,t=1}^{n}a^*_{st}\frac{\partial^2 u}{\partial y_s\partial y_t}+2\sum_{t=1}^{n}b^*_t\frac{\partial u}{\partial y_t}+c^*u=0.\tag{3}$$

我们现在看其系数间的关系．

$$\frac{\partial u}{\partial y_t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}p_{ti}$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_s\partial y_t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}p_{ti}p_{sj},$$

因此

$$\sum_{s,t=1}^{n}a^*_{st}\frac{\partial^2 u}{\partial y_s\partial y_t}+2\sum_{s=1}^{n}b^*_s\frac{\partial u}{\partial y_s}+c^*u$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\sum_{s,t=1}^{n}p_{ti}a^*_{st}p_{sj}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\sum_{s=1}^{n}b^*_sp_{si}+c^*u$$

即得

$$a_{ij}=\sum_{s,t=1}^{n}p_{ti}a^*_{st}p_{sj},$$
$$b_i=\sum_{s=1}^{n}b^*_sp_{si},$$
$$c=c^*,$$

即

$$A = P'A^*P, \quad b = b^*P,$$

而

$$A^* = P'^{-1}AP^{-1}, \quad b^* = bP^{-1}.$$

即 A^* 与 A 相合，所以在实数范围内，有 P 使

$$(P')^{-1}AP^{-1} = \begin{pmatrix} I^{(p)} & 0 & 0 \\ 0 & -I^{(r-p)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，(1)可以化为

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0. \tag{4}$$

命

$$u = ve^{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r},$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} + \alpha_i v\right) e^{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + 2\alpha_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \alpha_i^2 v\right) e^{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r},$$

代入(5)得

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^{r} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + b_i) \frac{\partial v}{\partial x_i} + 2\sum_{i=p+1}^{r} (-\alpha_i + b_i) \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$+ 2\sum_{i=r+1}^{n} b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + c_0 v = 0,$$

可取 $\alpha_i = -b_i (i = 1, 2, \cdots, p)$，$\alpha_i = b_i (i = p+1, \cdots, n)$.

再取 P 使

$$(b_{r+1}, \cdots, b_n)P^{-1} = (1, 0, \cdots, 0).$$

因此得出标准型

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^{r} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_{r+1}} + cv = 0, \quad \varepsilon = 0 \text{ 或 } 1. \tag{5}$$

如果 $\varepsilon = 1$，可取 $v = we^{-cx_{r+1}}$ 因而可把 c 化为 0. 如果 $\varepsilon = 0$，可用 $x_i \to |c|^{-\frac{1}{2}} y_i$，而把 c 变为 ±1 因此我们有以下的几种标准型

(i) $$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^{r} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = 0,$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^{r} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \pm v = 0,$$

(iii) $$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^{r} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \frac{\partial v}{\partial x_{r+1}} = 0.$$

§ 10. Hermitian 型

现在考虑复数域，$\bar{a}$ 表示 a 的共轭复数。Hermitian 型是指以下的代数式。

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i \bar{z}_j, \quad a_{ij} = \bar{a}_{ji}.$$

所对应的方阵

$$H(a_{ij})$$

称为 Hermite 方阵．它适合于

$$H = \bar{H}'.$$

如果 $K = -\bar{H}'$ 则K称为斜 Hermite 方阵．显然可见iK是 Hermite 方阵．因此与对称方阵斜对称方阵的情况不同．斜 Hermite 方阵的研究并无什么新鲜之处的．

Hermitian 型可以写作

$$zH\bar{z}'.$$

经过变化

$$z = wP,$$

则得 Hermitian 型

$$wPH\bar{P}'\bar{w}$$

关系

$$H_1 = PH\bar{P}^1$$

是一个等价关系，称为相联 (Conjunctive) 或称为H相合．用

$$H_1 \underset{=}{H} H$$

表之．

显然如果A是 Hermite 方阵，而 $B\underset{=}{H}A$，则B也是，并有等价三性质：i) $A\underset{=}{H}A$，ii) 由 $A\underset{=}{H}B$ 得 $B\underset{=}{H}A$，iii) 由 $A\underset{=}{H}B$，$B\underset{=}{H}C$ 得 $A\underset{=}{H}C$．

与实域中对称方阵类似可以证明以下的定理．

定理 1 任意一个 Hermite 方阵一定H相合于

$$[1,1,\cdots,1-1,\cdots,-1,0,\cdots,0]$$

这儿有 p 个$+1$，q 个-1，$p+q=r$ 是H的秩，$p-q$ 也称为H的标．

由此推得

定理 2 两个 Hermite 方阵H相合的必要且充分条件是他们的秩相同，标相同．

定义 如果除 $z=0$ 以外常有

$$zH\bar{z}' > 0$$

则H称为定正．如果常有

$$zH\bar{z}' \geqslant 0$$

则H称为半定正．

定正的必要且充分的条件是阶等于秩等于标．

§ 11. Hermitian 型的实形式

把z写成为 $x+iy$．把H写成为

$$S + iK,$$

这儿S是实对称方阵，K是实斜对称方阵．这样

$$z H \bar{z}' = (x+yi)(S+iK)(x'-iy') = (xS - yK + i(yS+xK))(x'-iy')$$
$$= (xS-yK)x' + (yS+xK)y' - [(xS-yK)y' - (yS+xK)x']i.$$

由于

$$yKy' = 0, \qquad xKx' = 0$$

及

$$xSy' = ySx'$$

虚数部分等于 0，因此

$$zH\bar{z}' = xSx' + 2xKy' + ySy' = (x, y)\begin{pmatrix} S & K \\ -K & S \end{pmatrix}(x,y)'.$$

因此 n 行列的 Hermite 方阵可以看成为 $2n$ 行列的特殊对称方阵

$$\begin{pmatrix} S & K \\ -K & S \end{pmatrix}.$$

而变形

$$z = wP$$

也可以写成为 $w = u + iv$, $P = A + iB$, 因此

$$x + iy = (u+iv)(A+iB) = uA - vB + i(vA + uB)$$
$$(x,y) = (u,v)\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

方阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -A & B \end{pmatrix} \tag{1}$$

可以用以下的方法来刻划，任意一个与

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

可交换的方阵一定是形式 (1). 即由

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

可得 $B = -C$, $A = D$.

因此 Hermite 方阵的理论可以说成为：在特殊变换下研究特殊对称方阵的性质的理论. 所谓特殊就是指形如 (1) 的方阵.

第七章　正交群与二次型对

§1. 正　交　群

我们现在考虑实矢量空间使矢量长度不变的线性变换，称为正交变换.

即

$$y = x\Gamma, \tag{1}$$

使

$$xx' = yy'. \tag{2}$$

以 (1) 代入 (2) 得恒等式

$$x\Gamma\Gamma'x' = xx',$$

即得

$$\Gamma\Gamma' = I. \tag{3}$$

适合于 (3) 的方阵 Γ 称为正交方阵，显然连续运用两次正交变换仍得一正交变换，也就是两个正交方阵的乘积仍然是正交方阵. 所有的 n 行列的正交变换(或方阵)称为正交群. 由 (3) 可见 $|\Gamma| = \pm 1$.

我们现在在正交群下研究问题. 正交变换使矢量的长度不变，也使二矢量的夹角余弦不变，即如果二矢量 $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ 同时变为 $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, 则

$$L(x^{(1)}, x^{(2)}) = \frac{x^{(1)}x^{(2)'}}{\sqrt{x^{(1)}x^{(1)'}x^{(2)}x^{(2)'}}}.$$

显然变为

$$\frac{y^{(1)}y^{(2)'}}{\sqrt{y^{(1)}y^{(1)'}y^{(2)}y^{(2)'}}}$$

正交条件 (3) 也可以改写成为：命 $\Gamma = (c_{ij})$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}. \tag{4}$$

这儿若 $j \neq k$, 则 $\delta_{jk} = 0$, 而 $\delta_{ii} = 1$, 由

$$\Gamma'\Gamma = I$$

可知 Γ' 也是正交的，因此还有一组与列有关的方程. 由 (4) 也可以推得一个正交方阵是由 n 个两两正交的单位矢量所组成的：即

$$c^{(j)} = (c_{1j}, \cdots, c_{nj}).$$

再看 $n = 2$ 的情况，由

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1$$

可以取 $c_{11} = \cos\theta$, 如此则 $c_{12} = \pm\sin\theta$, 并不妨假定 $c_{12} = \sin\theta$ (若不然换 θ 为 $-\theta$ 即得). 由

$$c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}=0$$

可知 $c_{21}=-\rho\sin\theta$，$c_{22}=\rho\cos\theta$ 再由

$$c_{21}^2+c_{22}^2=1$$

可知 $\rho=\pm1$. 因此二维的正交方阵一定可以表成为

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

前者是旋转，行列式=1，后者是反射，它的平方等于单位方阵，即

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

而行列式等于-1，反射是一个旋转乘以一个特殊反射

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

而成的.

一般的讲来，考虑由

$$\begin{aligned}a_{ii}&=\cos\theta,\\ a_{ij}&=\sin\theta,\\ a_{ji}&=-\sin\theta,\\ a_{jj}&=\cos\theta\end{aligned}$$

及其他的

$$a_{st}=\delta_{st}$$

所定义的方阵是 (i,j) 平面上的旋转.

考虑

$$\begin{pmatrix}c_{11}, & \cdots, & c_{1n}\\ c_{21}, & \cdots, & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1}, & \cdots, & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & \cdots & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

可以取θ使 $(2,1)$ 地位的元素等于 0（即解 $c_{21}\cos\theta-c_{22}\sin\theta=0$ 即得）. 再乘以

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

可使 $(3,1)$ 地位的元素等于 0，连续运用，可得一方阵其中 $c_{21}=\cdots=c_{n1}=0$，因此 $c_{11}=\pm1$. 由于正交性质，$c_{12}=\cdots=c_{1n}=0$.

再乘以

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1\end{pmatrix}$$

可以使 $(3,2)$ 地位的元素为 0 等. 因此，任一正交方阵可以乘以平面旋转方阵使它变为

$$[\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1] \tag{5}$$

的形式.

又取 $\theta = \pi$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

在 (5) 上乘以平面旋转的方阵可以得到

$$[1, 1, \cdots 1] \text{ 或 } [1, 1, \cdots, -1]$$

视其行列式是 +1 或 −1 而定.

总之，任何一个行列式为 1 的正交方阵可以表为平面旋转的乘积. 而行列式为 −1 的正交方阵可以表为以上的乘积外再乘以一个反射 $[1, 1, \cdots, -1]$.

定理 1 给了任意 m 个互相正交的单位矢量 $u^{(1)}, \cdots, u^{(m)}$，我们一定可以找到 $n-m$ 个矢量 $u^{(m+1)}, \cdots, u^{(n)}$ 使

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix}$$

成一正交方阵.

证明 1) 先证，任一单位矢量 u 有正交方阵 Γ 使

$$u\Gamma = e_1.$$

这一点的证明极易. 因为可以定出 θ，使

$$(u_1, u_2, \cdots, u_n)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的第二个支量 = 0，续行此法可得所证.

2) 假定已知 $u^{(1)}\Gamma_1 = e_1$，则

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m)} \end{pmatrix}\Gamma_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ v^{(2)} \\ \vdots \\ v^{(m)} \end{pmatrix}.$$

由于 $v^{(2)}, \cdots, v^{(m)}$ 与 e_1 正交，其第一支量皆等于 0，再行此法可得

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m)} \end{pmatrix}\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_m = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$$

而

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}\Gamma_m'\cdots\Gamma_2'\Gamma_1' = \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(n)} \end{pmatrix}$$

即得所求.

我们推广正交群之定义。

定义 命 S 是一定正对称方阵．凡适合于

$$TST' = S$$

的方阵 T 称为 S 正交方阵．显然 S 正交方阵乘积仍然是 S 正交方阵。

由于任何一个定正方阵可以表成为 $S = PP'$，因此

$$TPP'T' = PP',$$

即

$$(P^{-1}TP)(P^{-1}TP)' = I,$$

即 $P^{-1}TP$ 是正交方阵。

因此 S 正交方阵的研究并没有什么特别之处．可由普通正交方阵的结果推得之。

但如果 S 非定正，则情况大有不同，其中如 S 仅有一个负号，就是所谓 Lorentz 群．这儿不谈。

§2. 定正二次型的平方根作为距离函数

在普通几何中，两点

$$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$$

的距离等于

$$d(x,y) = \sqrt{(x-y)(x-y)'} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

这函数 $d(x,y)$ 适合于以下的四个条件：

i) 定正性，$d(x,y) \geqslant 0$，且仅当 $x = y$ 时取等号，

ii) 对称性：$d(x,y) = d(y,x)$，

iii) 等比性：$d(\lambda_x, \lambda_y) = |\lambda| d(x,y)$，

iv) 三角不等式

$$d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z) \tag{1}$$

而且仅当三点共线时取等号。

三角不等式的代数证明是：命 $x_i - y_i = a_i$，$y_i - z_i = b_i$，(1) 式等价于

$$\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} \geqslant \sqrt{(a+b)(a+b)'}.$$

平方之，它又等价于

$$aa'bb' \geqslant (ab')^2,$$

这就是 Буняковский-Schwarz 不等式。

余弦定律给与

$$d(x,z)^2 = d(x,y)^2 + d(y,z)^2 + 2d(x,y)d(y,z)\cos\theta,$$

即

$$\cos\theta = \frac{(x-y)(y-z)'}{\sqrt{(x-y)(x-y)'(y-z)(y-z)'}}, \tag{2}$$

这儿 θ 是 (x, y) 边与 (y, z) 边的夹角。

问题 是否还有其他的两点 x, y 的函数仍然有性质 i), ii), iii), iv). 这样的函数很多，最显然的例子是:

命 S 是一定正对称方阵，则

$$d(x,y)=\sqrt{(x-y)S(x-y)'} .$$

也适合于 i), ii), iii), iv), 这些性质的证明并不难. 只要写成 $S=PP'$, 命 $\xi=xP$, $\eta=yP$, $\zeta=zP$, 则立刻可由以上的 (1) 结果推出新性质来.

再举一个例子，当 $p\geqslant 1$ 时，

$$d(x,y)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p} .$$

§3. 空间的度量

在上节的研究中，不难看出 xSy' 起着十分重要的作用，这引出了以下的概念.

命 R 是实的 n 维矢量空间，我们定义其两个矢量 x, y 的内积(或称无向积). (x, y): 它是适合于以下性质的函数

1) $(x,y)=(y,x)$,

2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$, λ 是任意实数,

3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

由此立刻推出

2') $(x,\lambda y)=\lambda(x,y)$,

3') $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$, 函数 (x,x) 定义为 x 的范数，用 $N(x)$ 表之. 如果

4) $N(x)\geqslant 0$, 而且仅当 $x=0$ 时，$N(x)=0$, 这样的函数称为矢量空间的欧几里得度量.

有欧几里得度量的实矢量空间 R 称为欧几里得空间.

$\sqrt{(x,x)}$ 称为矢量的长度，长度等于 1 的矢量称为单位矢量或称为就范矢量. 任一矢量 x 可以化为单位矢量 $\dfrac{x}{\sqrt{(x,x)}}$.

如果 $(x,y)=0$, 则称二矢量 x 与 y 互相正交，用 $x\perp y$ 表之.

如果 $(x,y)=0$, 则由 1), 2), 3), 立刻推出

$$N(x+y,x+y)=(x+y,x+y)=(x,x)+(y,y)$$
$$=N(x,x)+N(y,y).$$

这就是商高定理.

这是 n 维的实矢量空间. 假定 $a^{(1)},\cdots\cdots,a^{(n)}$, 是 n 个线性无关的矢量，则

$$x=\sum_{i=1}^{n}x_ia^{(i)},\quad y=\sum_{i=1}^{n}y_ia^{(i)}.$$

由 2), 3), 2') 与 3') 可知

$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_ia^{(i)},\sum_{j=1}^{n}y_ja^{(j)}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(a^{(i)},\sum_{j=1}^{n}y_ja^{(j)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (a^{(i)}, a^{(j)}) = \sum_{i,j=1}^{n} S_{ij} x_i y_j,$$

此处 $(a^{(i)}, a^{(j)}) = S_{ij}$，而

$$N(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_i x_j.$$

性质 4) 的意义为 $S = (S_{ij})$ 是定正的，因此这个抽象的处理所包含的具体内容，与定义

$$(x, y) = xSy'$$

无异. 虽然如此，这样的抽象定义却有很多的启发性.

定义　如果 $e_1, \cdots\cdots, e_m$，适合于

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ 当 } i \neq j \\ 1 \text{ 当 } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \cdots, m.$$

这 m 个矢量称为相互正交的单位矢量或称就范正交矢量，当 $m = n$ 时，称为就范正交基底.

由于 $S = PP'$，作

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}' = I,$$

即 $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$，因此 $e_1, \cdots, e_n$ 就是一组正交就范的基底.

§4. Gram-Schmidt 法

命 $x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}$ 是 m 个任意线性无关的矢量. Gram-Schmidt 法是指从这 m 个矢量怎样求出这子空间的 m 个两两正交的单位矢量.

首先，取

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{(x^{(1)}, x^{(1)})}} x^{(1)}$$

是一个单位矢量. 其次，作

$$u^{(2)} = \alpha u^{(1)} + \beta x^{(2)}.$$

如果它正交于 $u^{(1)}$，则得

$$0 = \alpha + \beta(x^{(2)}, u^{(1)}) = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{(x^{(1)}, x^{(1)})}} (x^{(2)}, x^{(1)}).$$

取

$$\alpha = -\beta \frac{(x^{(2)}, x^{(1)})}{\sqrt{(x^{(1)}, x^{(1)})}},$$

再则如果 $u^{(2)}$ 是单位矢量，则

$$
\begin{aligned}
1 &= (u^{(2)}, u^{(2)}) = (\alpha u^{(1)} + \beta x^{(2)}, \alpha u^{(1)} + \beta x^{(2)}) \\
&= \alpha^2 + 2\alpha\beta(u^{(1)}, x^{(2)}) + \beta^2(x^{(2)}, x^{(2)}) \\
&= \beta^2\left(-\frac{(x^{(1)}, x^{(2)})^2}{(x^{(1)}, x^{(1)})} + (x^{(2)}, x^{(2)})\right) \\
&= \beta^2\,\frac{(x^{(1)}, x^{(1)})(x^{(2)}, x^{(2)}) - (x^{(1)}, x^{(2)})^2}{(x^{(1)}, x^{(1)})},
\end{aligned}
$$

即得

$$
\beta = \frac{\sqrt{(x^{(1)}, x^{(1)})}}{\sqrt{(x^{(1)}, x^{(1)})(x^{(2)}, x^{(2)}) - (x^{(1)}, x^{(2)})^2}},
$$

$$
\alpha = -\frac{(x^{(2)}, x^{(1)})}{\sqrt{(x^{(1)}, x^{(1)})(x^{(2)}, x^{(2)}) - (x^{(1)}, x^{(2)})^2}},
$$

然后再取

$$
u^{(3)} = \alpha u^{(1)} + \beta u^{(2)} + \gamma x^{(3)},
$$

而从 $u^{(1)}u^{(3)\prime} = u^{(2)}u^{(3)\prime} = 0$, $u^{(3)}u^{(3)\prime} = 1$ 中定出 α, β, γ 来. 继行之,最后得出

$$
\begin{aligned}
u^{(1)} &= \alpha_{11}x^{(1)}, \\
u^{(2)} &= \alpha_{21}x^{(1)} + \alpha_{22}x^{(2)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u^{(m)} &= \alpha_{m1}x^{(1)} + \alpha_{m2}x^{(m)} + \cdots\cdots + \alpha_{mm}x^{(m)}.
\end{aligned}
$$

这是m个两两正交的单位矢量. 也就是

$$
\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix}.
$$

由

$$
\begin{aligned}
I^{(m)} &= \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m)} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(m)} \end{pmatrix}' \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}',
\end{aligned}
$$

可知以上的问题一变而为先作定正对称方阵

$$
\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix}'.
$$

再用"凑方法"把它化为单位方阵;因此 α_{ij} 的数值在上一章中已经算出了!

这儿还须补充一点:

定理 1 (Gram). M个矢量 $x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}$ 线性独立必要且充分条件是

$$
\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix}'
$$

是定正的.

证明 首先这样形式的方阵总是半定正的. 原由是:

$$(u_1,\cdots,u_m)\begin{pmatrix}x^{(1)}\\ \vdots\\ x^{(m)}\end{pmatrix}S\begin{pmatrix}x^{(1)}\\ \vdots\\ x^{(m)}\end{pmatrix}'(u,\cdots u_m)'$$

$$=(u_1x^{(1)}+\cdots+u_mx^{(m)})S(u_1x^{(1)}\cdots+u_mx^{(m)})'.$$

如果这m个矢量是线性相关,则有非全为零的$u_1,\cdots u_m$使$u_1x^{(1)}+\cdots+u_mx^{(m)}=0$即方阵是半定正(而非定正的),反之,如果方阵是半定正的,则有非全为零的$(u_1,\cdots,u_m)$使$(u_1x^{(1)}+\cdots+u_mx^{(m)})S(u_1x^{(1)}+\cdots\cdots+u_mx^{(m)})'=0$。由$S$是定正推得

$$u_1x^{(1)}+\cdots+u_mx^{(m)}=0.$$

所以$x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$是线性相关的,定理证完.

§5. 正 投 影

假定R是欧几里得空间,假定S是一个子空间,这个子空间的基底是$x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$.我们要证明,任一矢量x可以表为

$$x=x_S+x_N,\quad x_S\in S,\quad x_N\perp S. \tag{1}$$

而x_S称为矢量x在子空间S上的正投影,而x_N称为射出矢量.

例如: R是三维空间, S是通过0的平面. 所有的矢量都是以原点为起点, x_S是矢量在S平面上的正投影,而x_N是从矢量末端到平面S上的垂线. 而$|x_N|$就是矢量末端到平面S的距离.

把x_S表成为

$$x_S=c_1x^{(1)}+\cdots+c_mx^{(m)},$$

此处c是实数.

从正交性出发

$$(x-x_S,x^{(k)})=0,\qquad(k=1,2,\cdots,m).$$

即

$$\begin{aligned}&(x^{(1)},x^{(1)})c_1+\cdots+(x^{(1)},x^{(m)})c_m+(x,x^{(1)})(-1)=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(x^{(m)},x^{(1)})c_1+\cdots+(x^{(m)},x^{(m)})c_m+(x,x^{(m)})(-1)=0,\\&x^{(1)}c_1+\cdots+x^{(m)}c_m+x_S(-1)=0.\end{aligned}$$

由此推得

$$\begin{vmatrix}(x^{(1)},x^{(1)}),\cdots,(x^{(1)},x^{(m)}), x^{(1)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (x^{(m)},x^{(1)}),\cdots,(x^{(m)},x^{(m)}),x^{(m)}\\ (x,x^{(1)}),\cdots,(x,x^{(m)}),x_S\end{vmatrix}=0,$$

即解得

$$x_S=-\frac{\begin{vmatrix}\Gamma & \begin{matrix}x^{(1)}\\ \vdots\\ x^{(m)}\end{matrix}\\ (x,x^{(1)}),\cdots,(x,x^{(m)}), & 0\end{vmatrix}}{\Gamma},$$

其中 $\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$ 是矢量 $x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$ 的 Gram 行列式. 而

$$x_N = x - x_S = \frac{\begin{vmatrix} & & x^{(1)} \\ & \Gamma & \vdots \\ & & x^{(m)} \\ (x,x^{(1)}),\cdots,(x,x^{(m)}) & & x \end{vmatrix}}{\Gamma}.$$

命 h 表矢量 x_N 的长度,则

$$h^2 = (x_N,x_N) = (x_N, x) = \frac{\begin{vmatrix} & & (x^{(1)}, x) \\ & \Gamma & \vdots \\ & & (x^{(m)},x) \\ (x,x^{(1)}),\cdots,(x,x^{(m)}), & & (x,x) \end{vmatrix}}{\Gamma} = \frac{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x)}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})}.$$

这 h 有以下的几何意义:

$(m+1)$ 个矢量 $x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x$ 作成一个 $(m+1)$ 维的单纯形,把由 $x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$ 所成的 m 维单纯形作为底, 由 x 的末端到这个底的高就等于 h.

假定 y 是 S 中的任一矢量, x 是 R 中的任一矢量,都是由原点引出的矢量. 由

$$N(x-y) = N(x_N + x_S - y) = N(x_N) + N(x_S - y) \geqslant N(x_N) = h^2,$$

可知

$$|x-y| \geqslant |x-x_S| = h,$$

即高不大于斜高,因此,在 S 中的所有的 y 中, 用矢量 x_S 逼近的 x 的偏差最小. 而 $h = \sqrt{N(x-x_S)}$ 可以作为近似 $x \approx x_S$ 的测差平方.

引进 $\Gamma_p = \Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(p)})$, $p = 1, 2,\cdots, m$.

则

$$\sqrt{\Gamma_1} = |x^{(1)}| = V_1$$

是 $x^{(1)}$ 矢量的长度.

$$\sqrt{\Gamma_2} = V_1 h_1 = V_2$$

是由 $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ 所构成的平行四边形的面积,又

$$\sqrt{\Gamma_3} = V_2 h_2 = V_3$$

是 $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ 为边所构成的平行六面体的体积. 继续定义

$$\sqrt{\Gamma_4} = V_3 h_3 = V_4,$$

一般有

$$\sqrt{\Gamma_m} = V_{m-1} h_{m-1} = V_m.$$

很自然地,称 V_m 为由 $x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$ 为边所构成的 m 维平行体的体积.

R 中取一正交就范基底, 写

$$x^{(i)} = (x_{1i},\cdots,x_{ni}),\quad X = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m)} \end{pmatrix},$$

则

$$\Gamma_m = |XX'|.$$

因而得

$$V_m^2 = \Gamma_m = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n} \begin{vmatrix} x_{i_1 1}, & x_{i_1 2}, & \cdots, & x_{i_1 m} \\ x_{i_2 1}, & x_{i_2 2}, & \cdots, & x_{i_2 m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_m 1}, & x_{i_m 2}, & \cdots, & x_{i_m m} \end{vmatrix}^2.$$

因此得出以下的几何性质:

定理 1 平行多面积的体积的平方等于在所有 m 维坐标空间上射影的体积的平方和.

特别是 $m = n$,

$$V_n = \begin{vmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \cdots, & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22}, & \cdots, & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \cdots, & x_{nn} \end{vmatrix} \text{ 的绝对值,}$$

再回到投影分解式

$$(x,x) = (x_S + x_N, x_S + x_N) = (x_S, x_S) + (x_N, x_N) \geqslant (x_N, x_N) = h^2.$$

即得

$$\frac{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x)}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})} = h_m^2 \leqslant (x,x) = \Gamma(x),$$

而且等号成立时的必要且充分的条件是 x 与 $x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$ 正交. 由此立得 Hadamard 不等式

$$\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)}) \leqslant \Gamma(x^{(1)})\Gamma(x^{(2)})\cdots\Gamma(x^{(m)}).$$

其中当且仅当 $x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$ 两两正交时取等号,这等式的几何意义是:

平行多面体的体积不超过其边长的乘积,而且仅当其为长方形时等于这一乘积.

Hadamard 不等式的普通形式是:

$$\begin{vmatrix} x_{11}, & \cdots, & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}, & \cdots, & x_{nn} \end{vmatrix}^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 \sum_{i=1}^n x_{i2}^2 \cdots \sum_{i=1}^n x_{in}^2.$$

另证如次:

1) 如果 S, T 是定正,则 $S+T$ 也是定正,而 $|S+T| \geqslant |S|$. (化为 $S = I$, $T = [\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$)

2) $$\begin{vmatrix} S_1 & L \\ L' & S_2 \end{vmatrix} = |S_1|\,|S_2 - L S_1^{-1} L'| \leqslant |S_1|\,|S_2|,$$

Hadamard 不等式乃其特例.

§6. 酉 空 间

在复矢量空间中,我们定义两个矢量 u, v 的内积为

$$u\overline{v'}.$$

使 $u\overline{u'}$ 不变的线性变换称为酉变换,即

$$v = uU, \quad U\overline{U'} = I.$$

而U也称为酉方阵.

当$n=1$时,酉方阵就是$e^{i\theta}$. 在n维空间

$$[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]$$

是酉方阵. 实正交方阵显然是酉方阵.

$U=(u_{ij})$有次之条件

$$\sum_{j=1}^{n}u_{ij}\bar{u}_{kj}=\delta_{ik}.$$

由$\bar{U}'U=I$可知$\bar{U}',U',\bar{U}$都是酉方阵.

命

$$u_{11}=\rho_{11}e^{i\theta_1},\cdots,u_{1n}=\rho_{1n}e^{i\theta_n}.$$

则

$$U[e^{-i\theta_1},\cdots,e^{-i\theta_n}]$$

的第一行是实数,即得一个方阵,其

$$\begin{pmatrix}u_{11}&\cdots&u_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix},\quad u_{11}^2+\cdots+u_{1n}^2=1,$$

而且$u_{11},\cdots,u_{1n}$是实的. 由上节已知有正交方阵Γ使

$$\begin{pmatrix}u_{11}&\cdots&u_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}\Gamma$$

的第一行是e_1,依此续行可知:酉方阵可以表为形如$[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]$的酉方阵与正交方阵的乘积. 如果称$[e^{i\theta_1},1,\cdots,1],\cdots[1,\cdots,e^{i\theta_i},1,\cdots,1]\cdots$为一维酉方阵,则可知

定理1 任一酉方阵可以表为平面旋转及一维酉方阵之积.

注意 1. $[-1,1]$是一个一维酉方阵.

2. 酉方阵的行列式是绝对值等于1的数. $|U\bar{U}'|=1,|U||\bar{U}|=1$,故云.

定理2 (Gram),m个复矢量

$$u^{(1)},\cdots,u^{(m)}$$

线性无关的必要且充分条件是 Hermite 方阵

$$(u^{(i)}\bar{u}^{(j)'})_{i,j=1,2,\cdots,m}$$

是定正的.

证法与前原则同,从略. 读者自己推广 Gram-Schmidt 方法.

同样不难证明,如果有了m个矢量适合于

$$u^{(i)}\bar{u}^{(j)'}=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,m$$

则可以补充$n-m$个使

$$\begin{pmatrix}u^{(1)}\\ \vdots\\ u^{(n)}\end{pmatrix}$$

成为酉方阵.

把以上的结果作一些不难的推广.

在复矢量空间中定义内积(u,v). 它适合于以下的一些性质

1) $(x,y)=(y,x)$,

2) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$,

3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

由此推得

2') $(x,\alpha y)=\bar{\alpha}(x,y)$,

3') $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$,

4) $Nx=(x,\ x)\geqslant 0$ 而且仅当 $x=0$ 时取等号．这样的空间称为酉空间．试推广以上所得的全部结果．

§7. 函数内积空间引

我们现在考虑在区间 (a,b) 上所有的可平方求积的实函数 $f(x)$ 类，称为 L^2 空间．我们定义

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

为二函数 $f(x),g(x)$ 的内积，如果内积等于 0，此二函数称为正交．如果

$$\int_a^b f(x)^2dx=1,$$

则称为就范(或正常)．而

$$N(f)^{1/2}=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

称为函数空间的度量．

如果有一组不全为零的实数 $c_1,\cdots,c_n$ 使

$$c_1f_1(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$$

几乎处处等于 0，则 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 称为线性相关，不然称为线性独立．

定理 1 (Gram) n 个函数 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 线性独立的必要且充分条件是对称方阵是

$$((f_i,f_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

是定正的．

证明　考虑

$$(u_1,\cdots,u_n)\begin{pmatrix}\int_a^b f_1f_1dx, & \cdots, & \int_a^b f_1f_ndx\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \int_a^b f_nf_1dx, & \cdots, & \int_a^b f_nf_ndx\end{pmatrix}(u_1,\cdots,u_n)'$$

$$=\left(\int_a^b(u_1f_1+\cdots+u_nf_n)f_1dx,\cdots\int_a^b(u_1f_1+\cdots+u_nf_n)f_ndx\right)\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$$

$$=\int_a^b(u_1f_1+\cdots+u_nf_n)^2dx.$$

如果 $f_1,\cdots,f_n$ 是线性相关，则有非全为 0 的 $u_1,\cdots,u_n$ 使

$$\int_a^b(u_1f_1+\cdots+u_nf_n)^2dx=0.$$

反之，由此得出 $u_1f_1+\cdots+u_nf_n$ 几乎处处为 0。

方阵

$$(f_i,f_j)_{1\leq i,j\leq n}$$

称为 gramian。

用凑方法有三角方阵使

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 & \cdots\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}(f_i,f_j)_{1\leq i,j\leq n}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 & \cdots\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}'=1,$$

如此得出一组函数

$$\begin{aligned}&g_1=\alpha_{11}f_1,\\ &g_2=\alpha_{21}f_1+\alpha_{22}f_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &g_m=\alpha_{m1}f_1+\alpha_{m2}f_2+\cdots+\alpha_{mm}f_m,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

它们是正交而且就范的。

例 取 $a=-1,\ b=1$。

函数 $1,x,x^2,x^3,\cdots$ 的 gramian 等于

$$\int_{-1}^{1}(1,x,x^2,x^3,\cdots)'(1,x,x^2,x^3,\cdots)dx$$

$$=2\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \cdots\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & \cdots\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix},$$

由于

$$1=1.1',\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}',$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}',$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{5} & 0 & \frac{2}{5\sqrt{7}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{5}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{5} & 0 & \frac{2}{5\sqrt{7}}\end{pmatrix}',$$

因此得经 Gram-Schmidt 法所得出的正交就范函数是:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,x,x^2,\cdots)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{5}} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{5} & 0 & \frac{2}{5\sqrt{7}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}^{-1},$$

以上的概念显然可作多种的推广:

1) 用 Lebesgue-Stieltje 积分的概念，命 $\alpha(x)$ 是 $[a,b]$ 中不递减的实函数，而且不是常数,则可以定义内积分

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x).$$

2) 考虑复函数,而定义

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}d\alpha(x).$$

3) 多维积分

$$(f,g)=\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)g(x_1,\cdots,x_n)d\alpha(x_1,\cdots,x_n).$$

4) 在 n 维空间的 m 维流形 S 上

$$(f,g)=\int\cdots\int_{\xi} f(x_1,\cdots,x_n)g(x_1,\cdots,x_n)d\sigma,$$

这儿 $d\sigma$ 是 ξ 上的测度.

5) 更抽象的所谓"内积空间".

但一般说来,主要的方法的纲要就是从以上所讲的开始的.

以后我们还将择要介绍.

§8. 特征根

定理 1 任一方阵 A 可以唯一地表为

$$A=H+K,\quad H=\overline{H}',\quad K=-\overline{K}'.$$

命 a,h,k 代表 A,H,K 中元素的最大绝对值. 若 $\sigma=\alpha+\beta i$ 是 A 的特征根,则

$$|\sigma|\leqslant na,\quad |\alpha|\leqslant nh,\quad |\beta|\leqslant nk.$$

证明　由于 σ 是特征根，所以有一个非 0 矢量 z 使

$$zA=\sigma z.$$

由此可推出

$$\sigma z\bar{z}'=zA\bar{z}',$$
$$\bar{\sigma}z\bar{z}'=z\bar{A}'\bar{z}',$$

相加及相减得

$$\alpha z\bar{z}'=\frac{1}{2}z(A+\bar{A}')\bar{z}'=\sum_{i,j}\frac{1}{2}(a_{ij}+\bar{a}_{ji})z_i\bar{z}_j,$$

$$\beta z\bar{z}' = z\left(\frac{A-\bar{A}'}{2i}\right)\bar{z}' = \sum_{i,j}\frac{1}{2i}(a_{ij}-\bar{a}_{ji})z_i\bar{z}_j.$$

因此

$$|\sigma|z\bar{z}' \leqslant \sum_{i,j}|a_{ij}||z_i||z_j| \leqslant a\sum|z_i||z_j| = a\left(\sum_i |z_i|\right)^2$$
$$\leqslant an\sum|z_i|^2 = anz\bar{z}'.$$

所以

$$|\sigma| \leqslant an.$$

同法

$$|\alpha|zz' \leqslant \sum_{i,j}|h_{ij}||z_i||\bar{z}_j| \leqslant h(\sum|z_i|)^2 \leqslant nhz\bar{z}'$$

及

$$|\beta|z\bar{z}' \leqslant nkz\bar{z}'.$$

这定理有以下的一些推理:

定理 2 Hermite 方阵的特征根是实的.

证明 $K=0$，所以 $k=0$，因此 $\beta=0$.

定理 3 实对称方阵的特征根是实的.

定理 4 斜对称方阵的特征根是纯虚的.

定理 5 如果定理 1 中的K是实的，则

$$|\beta| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}n(n-1)}\,k.$$

证明 我们有

$$\beta z\bar{z}' = z\frac{A-\bar{A}'}{2i}\bar{z}' = \frac{1}{i}zK\bar{z}'$$

由于K是实的，所以K是实的斜对称方阵. 因此

$$\beta z\bar{z}' = \sum_{i<j}k_{ij}\frac{\bar{z}_iz_j - z_i\bar{z}_j}{i},$$

即

$$|\beta|z\bar{z}' \leqslant k\sum_{i<j}\left|\frac{\bar{z}_iz_j - z_i\bar{z}_j}{i}\right|.$$

再用 Schwarz 不等式

$$\left(\sum_{i<j}\left|\frac{\bar{z}_iz_j - z_i\bar{z}_j}{i}\right|\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}n(n-1)\sum_{i<j}\left|\frac{\bar{z}_iz_j - z_i\bar{z}_j}{i}\right|^2$$
$$= -\frac{1}{2}n(n-1)\sum_{i<j}(\bar{z}_iz_j - z_i\bar{z}_j)^2$$
$$= \frac{n}{2}(n-1)((\sum z_i\bar{z}_i)^2 - \sum z_i^2\sum\bar{z}_i^2)$$
$$< \frac{n(n-1)}{2}(z\bar{z}')^2,$$

因此得

$$|\beta| \leqslant \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}k.$$

附记 这定理给出斜对称方阵特征根的较优上界.

定理 6 命 $\sigma=\alpha+i\beta$ 表示 $A=H+K$ 的特征根. 则有

$$m \leqslant \alpha \leqslant M,$$

这儿m是H的最小特征根,而M是最大特征根.

证明 命 $H=(h_{ij})$, 及 z 是对应于σ的A的特征矢量,则有

$$\alpha z\bar{z}' = zH\bar{z}',$$

即

$$\alpha = \frac{zH\bar{z}'}{z\bar{z}'}.$$

把 $zH\bar{z}'/z\bar{z}'$ 看为一个函数 $f(z)$. 则显然有

$$\min f(z) \leqslant \alpha \leqslant \max f(z).$$

现在只须证明 $\min f(z)$ 与 $\max f(z)$ 都是H的特征根即是,命 $z_j=x_j+iy_j$. 从

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial y_j}=0$$

立刻推得

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=0$$

及

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}=\frac{e_jH\bar{z}'}{z\bar{z}'}-\frac{e_j\bar{z}'}{(z\bar{z}')^2}zH\bar{z}'=0,$$

极值 $\lambda(=zH\bar{z}'/z\bar{z}')$ 适合于

$$e_j(H-\lambda I)\bar{z}'=0,$$

即

$$(H-\lambda I)\bar{z}'=0.$$

即 $|H-\lambda I|=0$.

由此也顺带地证明了.

定理 7 如果S是实对称,则最小(大)的特征根等于

$$\frac{xSx'}{xx'}$$

的最小(大)值. 也就是在球 $xx'=1$ 上, xSx' 的最小(大值).

几何语言, $xSx'=\lambda$ 是一个椭球,而球 $xx'=1$ 与椭球相切的情况是λ是S的特征根. 如果λ小于最小的特征根,则球全部在椭球之内. 如果λ大于最大的特征根,则球包有椭球.

定理 8 酉方阵的特征根的绝对值等于 1.

证明 如果x是U的特征根,则 $x+\frac{1}{x}$ 是Hermite 方阵 $U+U^{-1}=U+\bar{U}'$ 的特征根,而 $\frac{1}{i}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{i}(U-\bar{U}')$ 的特征根, 都是实的. 即

$$x+\frac{1}{x}=2r,\ x-\frac{1}{x}=2is\ (r, s \text{ 实数}),$$

则

$$x = r + is, \quad \frac{1}{x} = r - is.$$

因此 $r^2 + s^2 = 1$. 即得所证.

由此推得

定理 9 实正交方阵的复特征根成对出现.

§9. 积分方程的特征根

我们再把实对称的情况更简化地说一下：如果 α 是实对称方阵的特征根，则有一矢量 z 使

$$zS = \alpha z,$$

由此得

$$zS\bar{z}' = \alpha z\bar{z}'.$$

由于 $zS\bar{z}' = \bar{z}S\bar{z}'$ 是实数,所以 α 是实数.

用这个原则来处理积分方程的特征值问题.

假定 $K(x, y) = K(y, x)$ 是一个实连续函数. 其范围是 $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. 求特征值 λ 使

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

有解 $f(x)$.

定理 1 特征值是实的.

证明 乘以 $\overline{f(x)}$ 而积分之得

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \lambda \int_a^b \overline{f(x)}\, dx \int_a^b K(x, y) f(y) dy,$$

由于

$$\int_a^b \int_a^b \overline{K(x, y)\overline{f(x)} f(y)}\, dx\, dy = \int_a^b \int_a^b K(x, y) f(x) \overline{f(y)}\, dx\, dy$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(y, x) \overline{f(x)} f(y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_a^b K(x, y) \overline{f(x)} f(y)\, dx\, dy$$

是实的,因此 λ 也是实的.

习题 1 把本定理推广到复函数空间.

习题 2 试研究 $K(x, y) \neq K(y, x)$ 的情况,参考 §5 之法.

§10. 对称方阵的正交分类

定理 1 在正交变换下，一个二次型可以变为

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

的形式,也就是任何一个对称 S 有正交方阵 Γ 使

$$\Gamma S \Gamma' = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n],$$

这儿 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是实数,是 S 的特征根.

证明. 对应于特征根 λ_1，有一特征矢量 x，不妨假定它就是单位矢量，即 $xx'=1$.

$$xS=\lambda_1 x.$$

有正交阵 Γ 化 x 为第一行，因此，$e_1\Gamma=x$，

$$e_1\Gamma S\Gamma'=\lambda_1 e_1,$$

所以 $\Gamma S\Gamma'$ 的形状是

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & S_1\end{pmatrix}, \quad S_1=S_1^{(n-1)}.$$

这证明了本定理。

由此定理可知

$$xSx'=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\alpha_{i1}x_1+\cdots+\alpha_{in}x_n)^2,$$

此处 $\Gamma=(\alpha_{ij})$，即

$$S=\Gamma[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]\Gamma',$$

而 $e_1\Gamma'$ 是 S 的特征矢量，即 $(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{n1})$ 是 S 的特征根 λ_1 的特征矢量。

定理 2 对应于不相等特征根的特征矢量是正交的

证明 如果

$$x^{(1)}S=\lambda_1 x^{(1)}, \quad x^{(2)}S=\lambda_2 x^{(2)}, \quad \lambda_1\neq\lambda_2,$$

则

$$\lambda_1 x^{(1)}x^{(2)\prime}=x^{(1)}Sx^{(2)\prime}=\lambda_2 x^{(1)}x^{(2)\prime}.$$

由此推得 $x^{(1)}x^{(2)\prime}=0$.

由定理 1 不难立刻推得：把 λ_i 排成为

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n,$$

则显然有

$$\frac{\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2}{x_1^2+\cdots+x_n^2}\geqslant\lambda_1.$$

即

$$\min\frac{\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2}{x_1^2+\cdots+x_n^2}=\lambda_1,$$

$$\min_{x_1=0}\frac{\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2}{x_1^2+\cdots x_n^2}=\lambda_2.$$

换符号得：

定理 3 我们有

$$\min\frac{xSx'}{xx'}=\lambda_1,$$

当 $x=z^{(1)}$ 时取等号而

$$\min_{x\perp z^{(1)}}\frac{xSx'}{xx'}=\lambda_2,$$

且当 $x=z^{(2)}$ 时取等号；再

$$\min_{x\perp z^{(1)},z^{(2)}}\frac{xSx'}{xx'}=\lambda_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

§ 11. 二次曲面的欧几里得分类

变换

$$y = x\Gamma + c$$

称为欧几里得变换，此处 Γ 是实正交方阵，c 是一实矢量．在旋转，反射之外，还有平移 $y = x + c$．所有的欧几里得变换成一欧几里得群．欧几里得几何学就是研究欧几里得群下的几何性质．不变性质．

首先是两点 $x^{(1)}, x^{(2)}$ 的距离是不变的；其理由是：

$$\begin{aligned}(y^{(1)} - y^{(2)})(y^{(1)} - y^{(2)})' &= (x^{(1)} - x^{(2)})\Gamma\Gamma'(x^{(1)} - x^{(2)})' \\ &= (x^{(1)} - x^{(2)})(x^{(1)} - x^{(2)})'.\end{aligned}$$

又任一超平面 $ax' = \lambda$ 经过欧几里得变换一定可以变为 $ax' = 0$．

现在看二次曲面

$$xAx' + 2xb' + \gamma = 0$$

的分类．

可以取得 Γ 使 $\Gamma A\Gamma' = (i_1, \cdots, i_n)$．即经过 $x = y\Gamma$ 可变为

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i y_i + \gamma = 0,$$

如果诸 λ_i 皆不等于 0，则由

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(y_i + \frac{b_i}{\lambda_i}\right)^2 + \gamma - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{\lambda_i} = 0,$$

可知一般的二次曲面可以变为

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \lambda.$$

如果 $\lambda \neq 0$，则可以变为

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1$$

的形式．

如果 $\lambda = 0$，即得退化二次曲面

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 0.$$

如果有些 $\lambda_i = 0$，不妨取

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} b_i y_i + \gamma = 0, \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_r \neq 0.$$

如果非所有的 b_i 都等于0，我们可以把它再变为

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + y_{r+1} = 0.$$

总之，先看

$$\begin{pmatrix} A & b' \\ b & \gamma \end{pmatrix}.$$

如果是奇异的，则原二次曲面称为退化的，非退化的二次曲面一定欧几里得等价于以下的标准型

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2-\sum_{i=p+1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2=1. \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2-\sum_{i=p+1}^{n-1}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2+x_n=0. \tag{2}$$

当 $p=n$ 时，所得出的曲面是椭球，而 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是其主轴的长度。

读者试自己写出退化二次曲面的标准型。

§12. 方 阵 对

先复习一下方阵对的相抵关系。

方阵对 A_1, A_2 与 B_1, B_2 称为相抵，如果有二满秩方阵 P, Q 使

$$A_1=PB_1Q,\quad A_2=PB_2Q$$

有如下的重要结果。

定理 1 如果 A_1, B_1 是满秩的，则方阵对相抵的必要且充分条件是 $A_1\lambda+A_2$ 与 $B_1\lambda+B_2$ 有相同的不变因子（或初等因子）。

此定理已经证过了。

我们现在研究 A_1, A_2 可能非满秩的情况。由较对称的形式

$$\lambda A_1+\mu A_2\quad -\infty<\lambda,\mu<\infty$$

较为方便。如果有 λ,μ 使 $|\lambda A_1+\mu A_2|\neq 0$，则这些方阵称为非奇异方阵束。显然定理 1 可以推广到任意的非奇异束。

我们现在回来考虑对称方阵。

定理 2 如果

$$A=PBQ$$

及 A 与 B 都是对称的（或都是斜对称的）。P 与 Q 都是满秩的，则有一满秩方阵 R，与 P, Q 有关，但与 A, B 无关，使 $A=R'BR$。

证明 1）由 $A=PBQ$，可知

$$A=Q'BP'=PBQ.$$

命 $U=Q'^{-1}P$，则

$$UB=BU'.$$

又 U 的任一多项式常有

$$f(U)B=B(f(U))'.$$

2）满秩方阵 U 的平方根。我们现在证明有一多项式 $f(x)$ 存在，使

$$(f(U))^2=U.$$

如果这个对了，则命 $X=f(U)$，而

$$XB=BX',$$

取 $R=X'Q$，即得

$$R'BR=Q'XBX'Q=Q'X^2BQ=Q'UBQ=PBQ=A$$

即得所求.

命 $g(\lambda)$ 是U的特征多项式,如果能证明有 $f(\lambda)$ 存在使

$$f(\lambda)^2 \equiv \lambda(\mathrm{mod}\, g(\lambda))$$

也就证明了 2) 所提出的结论.

3) 将 $g(x)$ 分解为

$$g(x) = (x-a)^r(x-b)^s(x-c)^t\cdots$$

此处 $a, b, c, \cdots$两两不相等,且不为零.

把 $\sqrt{x}$ 展开成 $(x-a)$ 的幂级数

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{2a}(x-a) - \frac{(x-a)^2}{8a^2} + \cdots$$

命 $F(x)$ 为展开式的前 r 项之和. 则$\sqrt{x} - F(x)$可被 $(x-a)^r$ 所整除. 同样将 $\sqrt{x}$ 展开成 $(x-b)$ 的幂级数. $G(x)$ 为这一幂级数的前 s 项. 则 $\sqrt{x} - G(x)$ 可以被 $(x-b)^s$ 整除. 如此等等.

把 $\dfrac{F(x)}{g(x)}$ 展开成部份分式得:

$$\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^r} + \cdots + \frac{A_{r-1}}{x-a} + R(x) = \frac{A(x)}{(x-a)^r} + R(x)$$

同样由 $G(x)$ 定义 $B(x)$ 等等,命

$$f(x) = g(x)\left(\frac{A(x)}{(x-a)^r} + \frac{B(x)}{(x-b)^s} + \cdots\right)$$

易知 $\sqrt{x} - f(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除. 即

$$x \equiv f(x)^2(\mathrm{mod}\, g(x))$$

由此极易推得

定理 3 如果

$$PAQ = A_1, \quad PBQ = B_1,$$

而A与A_1且都是对称的或斜对称的,B与B_1都是对称的或斜对称的,则有满秩的R使

$$R'AR = A_1, \quad R'BR = B_1.$$

定理 4 假定 $|A| \neq 0$, 有满秩的P使

$$A = PBP'$$

的必要且充分条件是

$$\lambda A + \mu A' \text{ 与 } \lambda B + \mu B'$$

有相同的不变因子.

证明 1) 若 $A = PBP'$, 则

$$A' = PB'P',$$

所以

$$(\lambda A + \mu A') = P(\lambda B + \mu B')P'.$$

满足条件.

2) 如果条件适合, 则有

$$(\lambda A + \mu A') = P(\lambda B + \mu B')Q,$$

而
$$A+A'=P(B+B')Q,\ A-A'=P(B-B')Q,$$
$A+A'$ 与 $B+B'$ 都是对称的，$A-A'$ 与 $B-B'$ 都是斜对称的，因此有 R 使
$$A+A'=R(B+B')R', A-A'=R(B-B')R'.$$
附记　当 $|A|=0$ 时，本定理仍正确，但证明较长不录.

§13. 斜对称方阵的正交分类

在实数范围内一对对称方阵的相合性，是并不简单的问题．我们已经讨论过的在正交群下二次型的分类就是这问题的一个特例．也就是方阵对
$$(I,S),\ (I,T)$$
的相合问题．可以稍加推广；如果方阵对中有一个是定正的，则可以化为
$$(I,[\lambda_1,\cdots,\lambda_n])$$
的标准形式．如果方阵束内有一个定正的，也可以同时化为对角线形式．这些推广是不难的．但如果没有定正的存在．问题变为很复杂．这儿不讨论了．

同样的情况对 Hermite 对也存在．有些书上错误地处理 Hermite 对的问题．

如果一个是对称 A_1，一个是斜对称 A_2，我们也只准备着重地讲一下 A_1 是定正的情况，也就不妨假定 $A_1=I$，即在正交群下，斜对称方阵 $A_2=K$ 的分类问题．

当 $n=2$ 时
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}'=(ad-bc)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
因此，任一二行二列的斜对称方阵一定正交等价于
$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix},\quad k>0.$$

定理 1　任何一个斜对称方阵一定正交等价于
$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ -k_1 & 0 \end{pmatrix}\dotplus\begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}\dotplus\cdots\dotplus\begin{pmatrix} 0 & k_v \\ -k_v & 0 \end{pmatrix}\dotplus 0\dotplus\cdots\dotplus 0$$
而 $k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_v>0$.

由前已知，斜对称方阵的特征根是纯虚的，即有一矢量 w 使
$$wK=ikw,$$
这儿 w 是复矢量．命 $w=u+iv$，则得
$$uK=-kv,\quad vK=ku$$
由 $uKu'=0$，可以推得 $uv'=0$，即 u 与 v 正交．

若 $k<0$，则由此推出
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}K=\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
又
$$kuu'=vKu'=-uKv'=kvv',$$
所以 $uu'=vv'$ 命 $u_1=u/\sqrt{uu'}$，$v_1=v/\sqrt{vv'}$，则得

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix},$$

而 $u_1u_1' = v_1v_1' = 1$，$u_1v_1' = 0$. 把 $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ 补充成为正交方阵 Γ，则得

$$\Gamma K \Gamma' = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \\ & 0 & K_1 \end{pmatrix}.$$

同样可以处理 $k > 0$ 的情况，依此续行，可以推出定理来.

§14. 辛群与辛分类

定义　使一个满秩斜对称方阵不变的方阵称为辛方阵，即如果 $K = -K'$，$|K| \neq 0$，使

$$PKP' = K$$

的方阵 P 称为辛方阵.

为了简单起见，我们可以固定

$$K = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}, \quad I = I^{(\nu)}, \quad O = O^{(\nu)}.$$

把 P 写成为

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

则由

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$$

可得

$$AB' = BA', \quad CD' = DC', \quad AD' - BC' = I.$$

立刻可以看出

$$\begin{pmatrix} I & S \\ O & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & O \\ O & A'^{-1} \end{pmatrix}, \ S' = S, |A| \neq 0$$

都是辛方阵. 命 $J^2 = J$，而且是对角线方阵，即 J 的对角线上若干是 1 若干是 0. 则

$$\begin{pmatrix} J & I - J \\ -(I - J) & J \end{pmatrix}$$

也是辛方阵.

不难证明任一辛方阵也可以表为这些方阵之积.

§15. 各式分类

我们有了一批群：正交群，辛群，酉群. 我们有了一批被分类的对象.

对称方阵，斜对称方阵，Hermite 方阵，正交方阵，辛方阵，酉方阵。

因此出现了一系列的问题，在某一个特定群下，把每种特定的方阵分类。例如：对称方阵的辛分类，酉分类等等。如果再加上"数的范围"就出现了种种的问题。关于这些问题的专门研究，我不在此一一列举了。

但是我们必须指出，这样的问题中有不少是有实际意义的，而且是互相相关的。

例如：斜对称方阵的正交分类。就可以用来处理正交方阵的正交分类，即求出正交方阵的标准型。也就是给了一个正交方阵 Γ，我们一定有一个正交方阵 T 使

$$T\Gamma T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} \cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu \\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu \end{pmatrix} \dotplus I.$$

证明　使

$$\Gamma = (I-K)(I+K)^{-1}.$$

由 $\Gamma\Gamma' = I$，可得 $K = -K'$.

由前已知有正交方阵 T 使

$$TKT' = \begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ -k_1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix} 0 & k_\nu \\ -k_\nu & 0 \end{pmatrix} \dotplus 0 \dotplus \cdots,$$

由此得出

$$T\Gamma T' = M_1^{(2)} \dotplus M_2^{(2)} \dotplus \cdots,$$

此处

$$M_i^{(2)} = \frac{I - \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}}{I + \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}^2 \Big/ (1+k^2) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-k^2}{1+k^2} & -\dfrac{2k}{1+k^2} \\ \dfrac{2k}{1+k^2} & \dfrac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}.$$

即得所求。

§16. 分子振动

在质点系的经典力学处理时，动能等于

$$2T = \sum_{i,j=1}^{n} \dot{q}_i a_{ij} \dot{q}_j \quad a_{ij} = a_{ji},$$

位能等于

$$2V = \sum_{i,j=1}^{n} q_i b_{ij} q_j \quad b_{ij} = b_{ji},$$

这儿 q 是广义坐标，而 a, b 是与时间 t 及 q 无关的函数，这都是实数；$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.

命
$$A = (a_{ij}),\quad B = (b_{ij})$$

及 $q=(q_1,\cdots,q_n)$，如此则得

$$2T=\dot{q}A\dot{q}' \tag{1}$$

$$2V=qBq'. \tag{2}$$

由于动能决不会是负的，而是仅当不动时才能为0，即仅当 $\dot{q}=0$ 时才能为0，因此 A 是一定正方阵。

我们已知有 P 使

$$PAP'=I, \tag{3}$$

$$PBP'=\Lambda.$$

再来考虑质点系的运动方程。这系的 Lagrangian 是

$$2L=2T-2V=\dot{q}A\dot{q}'-qBq',$$

因此运动方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,$$

写成方阵形式

$$\ddot{q}A+qB=0$$

命 $q=\theta P$，则得

$$\ddot{\theta}PAP'+\theta PBP'=0,$$

即

$$\ddot{\theta}+\theta\Lambda=0.$$

单开来写，就是

$$\frac{d^2\theta_i}{dt^2}+\lambda_i\theta_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

如果是周期振动(或这系统的平衡位置是固定的)，这样 $\lambda_i>0$。即 B 也是定正的。

命 $\lambda_i=p_i^2$，如此得出

$$\theta_i=A_i\sin(p_it+\alpha_i).$$

再由 $q=\theta P$，我们得出

$$q_i=\sum_{k=1}^{n}A_k\sin(p_kt+\alpha_k)v_{ki}.$$

例　两个连在一起的调和振动。

命 x_1 代表质量 m_1 的物体从平衡位置向右移动的距离，而 x_2 是 m_2 移动后的距离，根据三弹簧的 Hooke 定理

$$\begin{aligned}2T&=m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2,\\2V&=k_1'x_1^2+k_2'x_2^2+k_3(x_1-x_2)^2\\&=k_1x_1^2+k_2x_2^2-2k_3x_1x_2.\end{aligned}$$

现在

$$A=\begin{pmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}k_1&-k_3\\-k_3&k_2\end{pmatrix}.$$

运动方程是

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+k_1x_1-k_3x_2=0,\qquad m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}-k_3x_1+k_2x_2=0.$$

现在

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{m_1}}\cos\theta & \frac{1}{\sqrt{m_2}}\sin\theta\\ -\frac{1}{\sqrt{m_1}}\sin\theta & \frac{1}{\sqrt{m_2}}\cos\theta\end{pmatrix}.$$

这儿

$$\operatorname{tg}2\theta=\frac{2k_3/\sqrt{m_1m_2}}{k_2/m_2-k_1/m_1}.$$

因此

$$x_1=\frac{\theta_1}{\sqrt{m_1}}\cos\theta-\frac{\theta_2}{\sqrt{m_2}}\sin\theta,$$

$$x_2=\frac{\theta_1}{\sqrt{m_2}}\sin\theta+\frac{\theta_2}{\sqrt{m_1}}\cos\theta.$$

而

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+\lambda_1\theta_1=0,\quad \frac{d^2\theta_2}{dt^2}+\lambda_2\theta_2=0.$$

此处

$$\lambda_1=\omega_1^2=\frac{k_1}{m_1}\cos^2\theta-\frac{2k_3}{\sqrt{m_1m_2}}\cos\theta\sin\theta+\frac{k_2}{m_2}\sin^2\theta,$$

$$\lambda_2=\omega_2^2=\frac{k_1}{m_1}\sin^2\theta+\frac{2k_3}{\sqrt{m_1m_2}}\cos\theta\sin\theta+\frac{k_2}{m_2}\cos^2\theta.$$

第八章 体 积

§1. m维流形的体积元素

在n维空间取m个以原点为始点的矢量

$$a^{(1)},\cdots,a^{(m)}.$$

以这m个矢量为边作出m维的平行$2m$面体，前已算出，它的体积等于

$$|G|^{\frac{1}{2}}$$

这儿G是行列式（*Gramian*）

$$G=\left|\begin{pmatrix}a^{(1)}\\ \vdots\\ a^{(m)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{(1)}\\ \vdots\\ a^{(m)}\end{pmatrix}'\right| \tag{1}$$

的数值。

说得更清楚些，这个平行$2m$面体有以下的参变数的表达式：

$$x=\lambda_1a^{(1)}+\cdots+\lambda_ma^{(m)},\quad 0\leqslant\lambda_\nu\leqslant 1. \tag{2}$$

而G就是由距离

$$xx'=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\begin{pmatrix}a^{(1)}\\ \vdots\\ a^{(m)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{(1)}\\ \vdots\\ a^{(m)}\end{pmatrix}'(\lambda_1,\cdots\lambda_n)'$$

所导出的二次型的行列式的数值。

更一般地说，在n维空间有一m维的流形

$$x_i=x_i(\lambda_1,\cdots,\lambda_m),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

并假定其有连续微商，在一点有微分矢量

$$dx_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial\lambda_j}d\lambda_j,$$

即

$$dx=d\lambda\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}.$$

所以在一点附近，这个m维流形的体积元素等于二次型

$$dxdx'=d\lambda\left(\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\right)\left(\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\right)'d\lambda'$$

的行列式的平方根，即

$$\left|\left(\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\right)\left(\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\right)'\right|^{\frac{1}{2}}.$$

用$d\sigma$表这m维流形的体积元素，则

$$d\sigma=\left|\left(\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\right)\left(\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\right)'\right|^{\frac{1}{2}}d\lambda_1\cdots d\lambda_m.$$

因此，如果要求出 m 维流形 D^* 的体积，而当 $t\in D^*$ 时刻划出这块流形来，则体积等于

$$\int\cdots\int_{D^*}\left|\left(\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\right)\left(\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\right)'\right|^{\frac{1}{2}}d\lambda_1\cdots d\lambda_m. \tag{4}$$

换变数

$$\lambda_j=\lambda_j(t_1,\cdots,t_m),$$

则得

$$\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\frac{\partial(\lambda)}{\partial(t)}=\frac{\partial(x)}{\partial(t)}.$$

因此得出

$$\left|\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\left(\frac{\partial(x)}{\partial(\lambda)}\right)'\right|^{\frac{1}{2}}d\lambda_1\cdots d\lambda_m=\left|\frac{\partial(x)}{\partial(t)}\left(\frac{\partial(x)}{\partial(t)}\right)'\right|^{\frac{1}{2}}dt_1\cdots dt_m.$$

当然以上的叙述有不少需要严格化的地方，首先是 m 维流形的定义，我们必须引进所谓"区域坐标"．因为，这个流形可能在某一范围内可以表为一种形式，而另一范围内另一种形式(不一定有统一的表示式)．其次必须定义"体积向"，如果以对 λ 的微分矢量作为基础，而改为变数 t 的时候，$\dfrac{\partial(\lambda)}{\partial(t)}$ 的正负号必须注意，如果是正号，体积是同向，不然是异向，也就是如果固定了：$e_1,\cdots,e_m$ 所成的平行 $2m$ 体的体积是正的，则

$$a_i^{(j)}=\sum_{j=1}^{m}p_{ij}e_j.$$

m 个矢量所成的平行 $2m$ 面体的体积．当 $|p_{ij}|>0$ 时为正，而当 $|p_{ij}|<0$ 时为负．

我们还是先举些例子：

例 1　求 n 维球的表面积，即求

$$xx'=r^2$$

的表面积，微分之，使

$$xdx'=0$$

解出

$$x_1dx_1=-x_2dx_2-\cdots-x_ndx_n=-XdX'.$$

此处 $X=(x_2,\cdots,x_n)$．因此

$$dxdx'=\left(\frac{XdX'}{x_1}\right)^2+dXdX'=dX\left(I+\frac{X'X}{x_1^2}\right)dX'.$$

这个二次型的行列式等于

$$\left|I+\frac{1}{x_1^2}X'X\right|=1+\frac{XX'}{x_1^2}=\frac{xx'}{x_1^2}=\frac{1}{x_1^2}.$$

(这儿用了 $|I+u'v|=1+uv'$.)　因此表面积等于

$$r\int\cdots\int_{r^2-XX'>0}\frac{dx_2\cdots dx_n}{|x_1|}=2^n r\int\cdots\int_{\substack{r^2-x_2^2\cdots-x_n^2>0\\x_\nu\geqslant0}}\frac{dx_2\cdots dx_n}{\sqrt{r^2-x_2^2\cdots-x_n^2}}.$$

这是一个 Dirichlet 积分，在下节中我们将算出它的数值等于

$$2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}r^{n-1}.$$

它等于 n 维球的体积

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} r^n$$

对半径的微商，读者思考一下，怎样的图形有此性质。

例 2　n 维空间的曲线

$$x_i = x_i(t),\quad a \leqslant t \leqslant b$$

的长度等于

$$\int_a^b \sqrt{dx \cdot dx'} = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}\, dt.$$

例 3　球坐标系：

$$x = \rho u,\quad uu' = 1,$$

$$dx = d\rho u + \rho du'.$$

所以

$$dxdx' = d\rho^2 + 2\rho d\rho u du' + \rho^2 du du' = d\rho^2 + \rho^2 du du'.$$

球坐标：

$$u_1 = \cos\theta_1,$$
$$u_2 = \sin\theta_1 \cos\theta_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n-1} = \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1},$$
$$u_n = \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1},$$
$$0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi (i = 1, \cdots, n-2),\quad 0 \leqslant \theta_{n-1} \leqslant 2\pi.$$

因此

$$dxdx' = d\rho^2 + \rho^2(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2 d\theta_3^2 + \cdots + \sin^2\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{n-2} d\theta_{n-1}^2).$$

所以球坐标的体积元素等于

$$\rho^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} d\rho d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}.$$

球表面的体积元素等于（$\rho =$ 常数）

$$\rho^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}.$$

（用此来回答例 1 所提出的问题）。

求球面上两点间的最短距离，不妨考虑单位球，而两点是

$$(1, 0, \cdots, 0),\ (\cos\alpha, \sin\alpha, 0, \cdots, 0)\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

因为经过旋转后任何球面上的两点一定可以达到这个地位，球面上任一曲线可以写成为 $\theta_\nu = \theta_\nu(t)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，由于过这二点，所以

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) = \cdots = \theta_{n-1}(0) = 0,$$
$$\theta_1(1) = \alpha, \theta_2(1) = \cdots = \theta_{n-1}(1) = 0.$$

而这曲线的长度

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta_1\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + \cdots + \sin^2\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{n-2}\left(\frac{d\theta_{n-1}}{dt}\right)^2}\, dt \geqslant \int_0^1 \frac{d\theta_1}{dt} dt = \alpha.$$

而且仅当 $\theta_2 = 0$ 时取等号，即在（$\cos\theta_1$，$\sin\theta_1$，$0, \cdots, 0$）的平面上，因此，证明了，球面

上两点的距离以这两点与球心作平面交此球于“大弧”最短。

§2. Dirichlet 积 分

考虑 n 重积分

$$I=\int\cdots\int f(t_1+\cdots+t_n)t_1^{\alpha_1-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}dt_1\cdots dt_n.$$

求积分的范围是

$$t_\nu\geqslant 0,\quad t_1+\cdots+t_n\leqslant 1.$$

如果 f 是连续函数，而且 $\alpha_\nu>0(\nu=1,2,\cdots,n)$，则积分 I 可以化为单积分。

先简化积分

$$F(\lambda)=\int_0^{1-\lambda}\int_0^{1-\lambda-T}f(t+T+\lambda)t^{\alpha-1}T^{\beta-1}dtdT,$$

命 $t=T(1-v)/v$，则

$$F(\lambda)=\int_0^{1-\lambda}\int_{T/(1-\lambda)}^1 f\left(\lambda+\frac{T}{v}\right)(1-v)^{\alpha-1}v^{-\alpha-1}T^{\alpha+\beta-1}dvdT$$

$$=\int_0^1\int_0^{(1-\lambda)v}f\left(\lambda+\frac{T}{v}\right)(1-v)^{\alpha-1}v^{-\alpha-1}T^{\alpha+\beta-1}dTdv$$

(换积分次序)。

再命 $T=v\tau_2$，则得

$$F(\lambda)=\int_0^1\int_0^{1-\lambda}f(\lambda+\tau_2)(1-v)^{\alpha-1}\tau_2^{\alpha+\beta-1}v^{-\alpha-1+(\alpha+\beta-1)+1}d\tau_2dv$$

$$=\int_0^{1-\lambda}f(\lambda+\tau_2)\tau_2^{\alpha+\beta-1}d\tau_2\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}dv$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{1-\lambda}f(\lambda+\tau_2)\tau_2^{\alpha+\beta-1}d\tau_2.$$

因此，

$$I=\underset{\substack{t_3+\cdots+t_n\leqslant 1\\ t_\nu\geqslant 0}}{\int\cdots\int}t_3^{\alpha_3-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}dt_3\cdots dt_n$$

$$\times\int_0^{1-t_3-\cdots-t_n}\int_0^{1-t_2-\cdots-t_n}f(t_1+\cdots+t_n)t_1^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}dt_1dt_2$$

$$=\underset{\substack{t_3+\cdots+t_n\leqslant 1\\ t_\nu\geqslant 0}}{\int\cdots\int}t_3^{\alpha_3-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}dt_3\cdots dt_n$$

$$\times\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int_0^{1-t_3-\cdots-t_n}f(t_3+\cdots+t_n+\tau_2)\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}d\tau_2$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\underset{\substack{\tau_2+t_3+\cdots+t_n\leqslant 1\\ t_\nu\geqslant 0,\tau_2\geqslant 0}}{\int\cdots\int}f(\tau_2+t_3+\cdots+t_n)\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}t_3^{\alpha_3-1}\cdots t_n^{\alpha_n-1}d\tau_2dt_3\cdots dt_n$$

仿此续行，最后得

$$I=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}\int_0^1 f(\tau)\tau^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n-1}d\tau,$$

这就是 Dirichlet 积分。

例 1　求单纯形

$$x = \lambda_1 a^{(1)} + \cdots + \lambda_m a^{(m)},$$
$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_m \leqslant 1, \quad \lambda_\nu \geqslant 0$$

的体积.

$$dx dx' = d\lambda \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}' d\lambda'.$$

因此

$$\int_{\substack{\lambda_1+\cdots+\lambda_m \leqslant 1 \\ \lambda_\nu \geqslant 0}} \cdots \int \left| \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}' \right|^{\frac{1}{2}} d\lambda_1 \cdots d\lambda_m = |G|^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1)^m}{\Gamma(m)} \int_0^1 \tau^{m-1} d\tau$$

$$= |G|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(m+1)} = \frac{1}{m!} |G|^{\frac{1}{2}}.$$

即得m维单纯形的体积等于张此形的m个矢量的 ganmian 的平方根，再除以$m!$

另证提示：

$$1 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 dx_1 \cdots dx_m = m! \int_{0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_m \leqslant 1} \cdots \int dx_1 \cdots dx_m = m! \int_{\substack{t_1+\cdots+t_m \leqslant 1 \\ t_\nu \geqslant 0}} \cdots \int dt_1 \cdots dt_m.$$

$$(x_1 = t_1, x_2 = x_1 + t_2, \quad x_3 = x_2 + t_3, \cdots)$$

例 2

$$J = \int_{\sum_{i=1}^n |x_i|^p \leqslant r^p} \cdots \int dx_1 \cdots dx_n = \frac{(2r)^n \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)}.$$

把此积分分为 2^n 块，其每一块的积分等于

$$\int_{\substack{\sum_{\nu=1}^n x_\nu^p \leqslant r^p \\ x_\nu \geqslant 0}} \cdots \int dx_1 \cdots dx_n = r^n \int_{\substack{\sum_{\nu=1}^n x_\nu^p \leqslant 1 \\ x_\nu \geqslant 0}} \cdots \int dx_1 \cdots dx_n,$$

换变数 $x_\nu^p = y_\nu$，则

$$\frac{1}{2^n} J = r^n \int_{\substack{\sum_{\nu=1}^n y_\nu \leqslant 1 \\ y_\nu \geqslant 0}} \cdots \int \left(\frac{1}{p}\right)^n y_1^{\frac{1}{p}-1} \cdots y_n^{\frac{1}{p}-1} dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \frac{r^n \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^n}{p^n \Gamma\left(\frac{n}{p}\right)} \int_0^1 \tau^{\frac{n}{p}-1} d\tau = \frac{r^n \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)},$$

特别取 $p = 2$，则 r 为半径的 n 维球的体积等于

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} = \vartheta_n r^n.$$

例 3

$$\int\cdots\int_{xx'\leqslant r^2} x'x\,dx_1\cdots dx_n = \frac{9_n}{n+2}\,r^{n+2}I.$$

如果 $i \neq j$，易证

$$\int\cdots\int_{xx'\leqslant r^2} x_i x_j\,dx_1\cdots dx_n = 0$$

(即换 $x_i \to -x_i$ 即得)，另一方面

$$\int\cdots\int_{xx'\leqslant r^2} x_1^2\,dx_1\cdots dx_n = r^{n+2}2^{-n}\int\cdots\int_{\substack{y_1+\cdots+y_n\leqslant 1\\ y_\nu\geqslant 0}} y_1^{\frac{1}{2}}y_2^{-\frac{1}{2}}\cdots y_n^{-\frac{1}{2}}\,dy_1\cdots dy_n$$

$$= r^{n+2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 \tau^{\frac{n}{2}}\,d\tau = r^{n+2}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\,\frac{1}{n+2}.$$

即得所求。

§3. 正态分布积分

定理 1 如果 S 是定正的，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int e^{itx'-\frac{1}{2}xSx'}\,dx_1\cdots dx_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|S|}}\,e^{-\frac{1}{2}tS^{-1}t'}.$$

证明　当 $S = I$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int e^{itx'-\frac{1}{2}xx'}\,dx_1\cdots dx_n = \prod_{\nu=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_\nu x_\nu-\frac{1}{2}x_\nu^2}\,dx_\nu$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n}\left(\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}t_\nu^2}\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}tt'}.$$

在一般情况下，命

$$S = TT', \quad y = xT; \quad t = uT'^{-1},$$

则得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int e^{itx'-\frac{1}{2}xSx'}\,dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{|T|}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int e^{iuy'-\frac{1}{2}yy'}\,dy_1\cdots dy_n$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|S|^{\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2}uu'} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{|S|}}\,e^{-\frac{1}{2}tS^{-1}t'}.$$

定理 2 S 仍然假定是定正的，u 与 v 是两个线性无关的矢量，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{\substack{ux'\geqslant 0\\ vx'\geqslant 0}} e^{-\frac{1}{2}xSx'}\,dx_1\cdots dx_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{|S|}}\cos^{-1}\frac{-uS^{-1}v'}{\sqrt{uS^{-1}u'vSv'}}.$$

证明　把 S 写成为 $S = TT'$，$xT \to x$，$uT'^{-1} \to u$，$vT'^{-1} \to v$，则原等式一变而为

$$\int_{\substack{-\infty \\ ux'\geqslant 0 \\ vx'\geqslant 0}}^{\infty}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}xx'}dx_1\cdots dx_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}-1}u\wedge v, \tag{1}$$

这儿 $u\wedge v$ 表示二矢量 u, v 的夹角.

显然可见,不妨假定 u, v 都是单位矢量,有正交方阵 Γ 使

$$u\Gamma = e_1, \quad v\Gamma = (\cos\alpha, \ \sin\alpha, \ 0, \cdots, 0).$$

这儿 $\alpha = u\wedge v$. 命 $x = y\Gamma'$, 则得

$$\int_{\substack{-\infty \\ ux'\geqslant 0 \\ vx'\geqslant 0}}^{\infty}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}xx'}dx_1\cdots dx_n = \int_{\substack{-\infty \\ y_1\geqslant 0 \\ \cos\alpha y_1+\sin\alpha y_2\geqslant 0}}^{\infty}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}yy'}dy_1\cdots dy_n$$

$$= \int_{\substack{-\infty \\ y_1\geqslant 0 \\ \cos\alpha y_1+\sin\alpha y_2\geqslant 0}}^{\infty}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)}dy_1dy_2(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-2)}.$$

命 $y_1 = \rho\sin\theta$, $y_2 = \rho\cos\theta$, 则

$$\int_{\substack{-\infty \\ y_1\geqslant 0 \\ -\cos\alpha y_1+\sin\alpha y_2\geqslant 0}}^{\infty}\int e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)}dy_1dy_2 = \int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho d\rho\int_0^{\alpha}d\theta = \alpha.$$

即得所求, 即得 (1).

(1) 式的几何说明是函数 $e^{-\frac{1}{2}xx'}$ 在过原点两平面间的积分,与这两平面的夹角成比例.立刻可有以下的推广,求过原点三平面间积分,我们可以猜测一定与"立体角"成比例,这是事实,切实些说.

$$\int_{\substack{-\infty \\ ux'>0 \\ vx'>0 \\ wx'>0}}^{\infty}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}xx'}dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}(\alpha+\beta+\gamma-\pi),$$

这儿 α, β, γ 是这三矢量的夹角,更一般些.

$$\int_{\substack{-\infty \\ ux'>0 \\ vx'>0 \\ wx'>0}}^{\infty}\cdots\int e^{-\frac{1}{2}xSx'}dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{2}(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}|S|^{-1/2}\left(\cos^{-1}\frac{-uS^{-1}v'}{\sqrt{uS^{-1}u'vS^{-1}v'}}\right.$$

$$\left.+\cos^{-1}\frac{-vS^{-1}w'}{\sqrt{vS^{-1}v'wS^{-1}w'}}+\cos^{-1}\frac{-wS^{-1}u'}{\sqrt{wS^{-1}w'uS^{-1}u'}}-\pi\right).$$

§4. 正态 Parent 分布

在研究正态 Parent 分布时用到以下的积分, 对称方阵 $X = (x_{ij})$ 可以看成为 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维空间的一点. 所有的定正方阵 X 所成的区域以 $X > 0$ 表之.

定理 1 假定 $k > n$, 对任一 $A > 0$ 常有

$$\int_{X>0}\cdots\int |X|^{\frac{1}{2}(k-n-2)} e^{-\sigma(AX)}\dot{X}$$
$$= \pi^{\frac{1}{4}n(n-1)}\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-1)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-2)\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-n)\right)|A|^{-\frac{1}{2}(k-1)},$$

此处 $\dot{X} = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} dx_{ij}$.

证明 命 $A = TT'$，命 $T'XT = Y$，则由

$$|T|^{n+1}\dot{X} = \dot{Y}$$

（证明见 § 5）可知

$$\int_{X>0}\cdots\int |X|^{\frac{1}{2}(k-n-2)} e^{-\sigma(AX)}\dot{X} = \int_{Y>0}\cdots\int |Y|^{\frac{1}{2}(k-n-2)}|T|^{-(k-n-2)}\times e^{-\sigma}(Y)|T|^{-(n+1)}\dot{Y}$$
$$= |A|^{-\frac{1}{2}(k-1)}\int_{Y>0}\cdots\int |Y|^{\frac{1}{2}(k-n-2)}e^{-\sigma(Y)}\dot{Y}.$$

即不妨假定 $A = I$ 时进行研究. 即待证: 命

$$\int_{X>0}\cdots\int |X|^{\frac{1}{2}(k-n-2)}e^{-\sigma(X)}\dot{X} = C_{n,k},$$

则

$$C_{n,k} = \pi^{\frac{1}{4}n(n-1)}\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-1)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-2)\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-n)\right).$$

换变数 $x_{ij} = y_{ij}\sqrt{x_{ii}x_{jj}}$，命

$$Y = \begin{pmatrix} 1, & y_{12}, & \cdots, & y_{1n} \\ y_{21}, & 1, & \cdots, & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \cdots, & 1 \end{pmatrix}, \quad y_{ij} = y_{ji},$$

则

$$X = DYD, \quad D = [\sqrt{x_{11}}, \sqrt{x_{22}}, \cdots, \sqrt{x_{nn}}].$$

由此得 $|X| = |Y|x_{11}\cdots x_{nn}$; 而 Jacobian 等于

$$(x_{11}\cdots x_{nn})^{\frac{1}{2}(n-1)}.$$

因此

$$C_{k,n} = \int_0^\infty\cdots\int_0^\infty (x_{11}\cdots x_{nn})^{\frac{1}{2}(k-3)} e^{-\sum_{i=1}^n x_{ii}} dx_{11}\cdots dx_{nn}$$
$$\times \int_{Y>0}\cdots\int |Y|^{\frac{1}{2}(n-k-2)} dy_{12}\cdots dy_{n-1n}$$
$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}(k-1)\right)^n J_n.$$

此处

$$J_n = \int_{Y>0}\cdots\int |Y|^{\frac{1}{2}(k-n-2)} dy_{12}\cdots dy_{n-1,n}. \quad (2 \leqslant n < k).$$

用归纳法来算出此积分的数值．显然有

$$J_2=\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\frac{1}{2}(k-4)}dy=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-2)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-1)\right)}.$$

用行列式的展开可知

$$\begin{vmatrix} 1, & y_{12} & \cdots, & y_{1n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n+11}, & \cdots & \cdots, & 1 \end{vmatrix}=|Y|-\sum_{ij=1}^{n}Y_{ij}y_{i,n+1}y_{j,n+1}.$$

此处 Y_{ij} 表示 y_{ij} 在 Y 中的余子式，因此

$$J_{n+1}=\int\cdots\int dy_{12}\cdots dy_{n-1,n}\int\left(|Y|-\sum_{i,j=1}^{n}Y_{ij}y_{in+1}y_{jn+1}\right)^{\frac{1}{2}(k-n-3)}dy_{1,n+1}\cdots dy_{n,n+1}.$$

此处内积分过所有的适合于

$$|Y|-\sum_{i,j=1}^{n}Y_{ij}y_{i,n+1}y_{j,n+1}>0$$

的 $y_{1,n+1},\cdots,y_{n,n+1}$．这个积分是可以用 Dirichlet 积分算出的，从而得出

$$J_{n+1}=J_n\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-n-1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(k-1)\right)}\pi^{\frac{n}{2}}.$$

因此得出本定理．

由于定理 1 中表达出来的是 A 的整函数． 把 a_{ij} 换为 $a_{ij}-i\varepsilon_{ij}t_{ij}$ 也对，此处 $\varepsilon_{ij}=1$ 若 $i=j$，而 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}$ 若 $i\neq j$．因而得出：

定理 2 命

$$f_k(X)=\begin{cases} C_{n,k}|A|^{\frac{1}{2}(k-1)}|X|^{\frac{1}{2}(k-n-2)}e^{-\sigma(AX)}, & X>0, \\ 0, & \text{不然}. \end{cases}$$

则 $f_k(X)$ 的 Fourier transform 等于

$$\varphi_n(T)=\int\cdots\int f_k(X)e^{i\sum_{i\leqslant j}x_{ij}t_{ij}}f_k(X)\cdot dx_{11}dx_{12}\cdots dx_{nn}=\left(\frac{|A|}{|A-iT|}\right)^{\frac{1}{2}(k-1)}.$$

这儿 $T=(\varepsilon_{ij}t_{ij})$．

§5. 矩阵变换的行列式

一个 $m\times n$ 矩阵可以看成为 mn 维空间的一点．两个 $m\times n$ 矩阵 X,Y 间的关系

$$X=PYQ,\ P=P^{(m)},\ Q=Q^{(n)} \tag{1}$$

可以看成为这个 mn 维空间的一个线性变换，现在算出这个线性变换的行列式．这个变换是由以下的两个变换而合成的

$$X=ZQ \tag{2}$$

$$Z=PY. \tag{3}$$

把 (2) 分行写出，得

$$(x_{11},\cdots,x_{1n})=(z_{11},\cdots,z_{1n})Q,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(y_{m1},\cdots,x_{mn})=(z_{m1},\cdots,z_{mn})Q.$$

因此,线性变换 (2) 的行列式等于 $|Q|^m$. 同法,将 (3) 分列写出,得线性变换 (3) 的行列式等于 $|P|^n$. 因此(1)所定义的线性变换的行列式是

$$|P|^n|Q|^m. \tag{4}$$

特别当 $m=n$ 时,变换

$$X=PY\bar{P}'$$

的行列式等于 $|P\bar{P}'|^n=\text{abs}|P|^{2n}$.

再考虑 Hermitian 方阵,一个 Hernrtian 方阵

$$H=(h_{ij}),\quad h_{ii}=k_{ii},\quad h_{ij}=k_{ij}+ik_{ji},\quad i<j, \tag{5}$$

可以看成为 n^2 维空间的一点. 从 h_{ij} 变为 k_{ij} 的变形

$$h_{ii}=k_{ii},\quad \begin{matrix} h_{ij}=k_{ij}+ik_{ji}, \\ h_{ji}=k_{ij}-ik_{ji}, \end{matrix}\quad i<j,$$

的行列式等于

$$\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}n(n-1)}=(-2i)^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

因此由 Hermitian 关系

$$H_1=PH\bar{P}' \tag{6}$$

所定义出的线性变换的行列式等于

$$\text{abs}|P|^{2n}. \tag{7}$$

又 n 行列的对称方阵 S 成一 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 维的空间. 而由

$$S=PTP' \tag{8}$$

所得的 S 与 T 的元素间的关系也成一线性变换,这变换的行列式等于

$$|P|^{n+1}. \tag{9}$$

这结果的证明简述如次,如果 P 是平延,不难证明所求的行列式的值等于 1. 如果

$$P=[\lambda,1,\cdots,1],$$

则由

$$s_{11}=\lambda^2 t_{11},\ s_{12}=\lambda t_{12},\cdots,s_{1n}=\lambda t_{1n},$$

(其它不变)可得所求的行列式之值等于 λ^{n+1}. 因而得出本结论.

斜对称方阵 K 成一 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 维空间. 由

$$K=PQP' \tag{10}$$

所得的线性变换的行列式等于

$$|P|^{n-1}. \tag{11}$$

读者自证之,(读者考虑由 $X=PYP'$ 也推出

$$X+X'=P(Y+Y')P',\ X-X'=P(Y-Y')P',$$

因而看出 (9) 乘 (11) 等于$|P|^{2n}$的道理).

附记 1) 把(1)中的X的元素排成为

$$x_{11},\cdots,x_{1m},x_{21},\cdots,x_{2m},\cdots,x_{m1},\cdots,x_{mn},$$

同样排好Y的元素,所得出的方阵用

$$P'\cdot\times Q$$

来表之,而 $R\cdot\times Q$ 定义为 mn 行列的方阵

$$\begin{pmatrix} r_{11}Q, & \cdots, & r_{1m}Q \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1}Q, & \cdots, & r_{mm}Q \end{pmatrix}$$

称为R与Q的直乘积. 公式 (4) 也可以写成为 $|P'\cdot\times Q| = |P|^n|Q|^m$.

2) 把 (8) 中 S 的元素写成为

$$S_{11},S_{12},\cdots,S_{1n},S_{22},S_{23},\cdots,S_{2n},\cdots,S_{n-1n},S_{nn}$$

并相仿地排好T的元素. 这样 (8) 所定义的方阵用$P^{[2]}$表之. (9) 说明了

$$|P^{[2]}| = |P|^{n+1}.$$

同样由斜对称定义所得的方阵用$P^{(2)}$表之, (11) 说明了

$$|P^{(2)}| = |P|^{n-1}.$$

3) $P'\cdot\times P, P^{[2]}, P^{(2)}$ 有次之性质

$$P^{[2]}Q^{(2)} = (PQ)^{[2]},\ P^{(2)}Q^{(2)} = (PQ)^{(2)}$$

及

$$(P'\cdot\times P)(Q'\cdot\times Q) = (PQ)'\cdot\times PQ.$$

这些性质是群表示论中最原始的例子.

§6. 酉群上的积分元素

把n行列的复元素方阵Z看成为$2n^2$维实空间的一点,并且有 Euclid 度量

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(dx_{ij}^2+dy_{ij}^2),\quad z_{ij}=x_{ij}+iy_{ij}. \tag{1}$$

以上的 Euclid 度量也可以写成为

$$\sigma(dZ\,\overline{dZ'}) \tag{2}$$

的形式,这儿$\sigma(A)$表示方阵A之迹.

所有的酉方阵成为这空间的一个流形,现在先证明它的维数是n^2,作 Cayley 变换

$$U=(I+iH)^{-1}(I-iH), \tag{3}$$

可以解得

$$iH=(I-U)(I+U)^{-1}. \tag{4}$$

酉方阵所适合的条件一变而为

$$I=U\overline{U}'=(I+iH)^{-1}(I-iH)(I+i\overline{H}')(I-i\overline{H}')^{-1}$$

即

$$(I-iH)(I+i\overline{H}')=(I+iH)(I-i\overline{H}'),$$

即

$$H = \bar{H}'. \tag{5}$$

由此可知，一个使$|I+U| \neq 0$的酉方阵对应于一个 Hermite 方阵H. H中有n^2个自变数，因此酉方阵所成的流形是n^2维的，但须注意，适合$|I+U|=0$的酉方阵成一较低维的流形.

H可以看成酉方阵所成流形的参变数. 反过来，酉群流形也可以看为"Hermitian"方阵所成的空间的扩张空间，即加上一无穷远点的流形所成的空间.

酉群流形上的度量当然是

$$\sigma(dU\overline{dU'}).$$

微分

$$U\bar{U}' = I$$

得

$$dU\bar{U}' + Ud\bar{U}' = 0.$$

命 $\delta U = U^{-1}dU$，则 $\delta U = -\overline{\delta U'}$. 因而

$$\sigma(dUd\bar{U}') = -\sigma(\delta U\overline{\delta U'}). \tag{6}$$

另一方面由 Cayley 表达式

$$\begin{aligned} dU &= -(I+iH)^{-1}idH - i(I+iH)^{-1}dH(I+iH)^{-1}(I-iH) \\ &= -i(I+iH)^{-1}dH[I+(I+iH)^{-1}(I-iH)] \\ &= -2i(I+iH)^{-1}dH(I+iH)^{-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

由此得出

$$\begin{aligned} \sigma(dUd\bar{U}') &= 4\sigma((I+iH)^{-1}dH(I+iH)^{-1} \times (I-iH)^{-1}dH(I-iH)^{-1}) \\ &= 4\sigma(dH(I+H^2)^{-1}dH(I+H^2)^{-1}). \end{aligned} \tag{8}$$

命 $(I+H^2)^{-1} = P\bar{P}'$ 及 $X = \bar{P}'dHP$，则得

$$\sigma(dUd\bar{U}') = 4\sigma(X^2) = 4\sum_{i,j=1}^{n}|x_{ij}|^2.$$

由于 $\bar{x}_{ij} = x_{ji}$，命 $x_{ij} = y_{ij} + iz_{ij}$，$|x_{ij}|^2 + |x_{ji}|^2 = 2(y_{ij}^2 + z_{ij}^2)$，因此二次型

$$4\sum_{i,j=1}^{n}|x_{ij}|^2$$

的行列式等于

$$4^{n^2}\cdot 2^{n(n-1)} = 2^{n(3n-1)}.$$

由于 $X = \bar{P}'dHP$ 及上节(6)，(7)可知由X变为dH的线性变换的行列式等于

$$|P\bar{P}'|^n = |I+H^2|^{-n}.$$

因此，(8)式的行列式等于

$$2^{n(3n-1)}\cdot|I+H^2|^{-2n}.$$

因此酉群上的体积元素等于

$$\dot{U} = 2^{n^2}\cdot 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}|I+H^2|^{-n}\prod_{j=1}^{n}dh_j\prod_{j<k}dh'_{jk}dh''_{jk}.$$

这儿 $H=(h_{jk})$，$h_{jj}=h_j$，$h_{jk}=h'_{jk}+ih''_{jk}$，整个酉群的积分范围是

$$-\infty < h_j < \infty,\ -\infty < h'_{jk},\ h''_{jk} < \infty.$$

定理 1 酉群的体积等于

$$\vartheta_n = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{1!2!\cdots(n-1)!}.$$

由以上的推导可知

$$\vartheta_n = \int\cdots\int_U \dot{U} = 2^{n^2}\cdot 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int |I+H^2|^{-n}\prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j<k} dh'_{jk}dh''_{jk}$$

这个积分的算出见下节。

§7. (续)

在算出上节所要求的积分之前，先算出以下的定积分。

定理 1 命 $a>0$，$b^2-ac<0$，$\alpha>\frac{1}{2}$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha} = a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(v)}.$$

证明 命

$$y = \frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{a}\right),$$

则

$$dx = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}dy$$

及

$$ax^2+2bx+c = \frac{ac-b^2}{a}(y^2+1).$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha} = a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^\alpha}$$

$$= a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}.$$

定理 2 设 $\alpha>n-\frac{1}{2}$，H 表 n 行列的 Hermite 方阵，则

$$\Pi_n(\alpha) = \int\cdots\int_H \frac{\dot{H}}{(\det(I+H^2))^\alpha}$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\pi^{\frac{1}{2}n^2}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\alpha-j-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-j)}\prod_{k=0}^{n-2}\frac{\Gamma(2\alpha-n-k)}{\Gamma(2\alpha-2k-1)},$$

此处 $H=(h_{jk})$，$h_{jj}=h_j$，$h_{jk}=h'_{jk}+ih''_{jk}(j<k)$，

$$\dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}dh_j\prod_{j<k}dh'_{jk}dh''_{jk}.$$

证明　命
$$H=\begin{pmatrix}H_1 & \bar{v}'\\ v & h\end{pmatrix},\quad (h=h_n)$$
其中 H_1 为一 $n-1$ 行列的 Hermite 方阵，v 为一 $n-1$ 维矢量，h 为一实数，则
$$I+H^2=\begin{pmatrix}I+H_1^2+\bar{v}'v & H_1\bar{v}'+\bar{v}'h\\ vH_1+hv & 1+h^2+v\bar{v}'\end{pmatrix}.$$
利用等式
$$\begin{pmatrix}I & 0\\ -pA^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & p'\\ p & l\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}I & 0\\ -pA^{-1} & 1\end{pmatrix}}'=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & l-pA^{-1}\bar{p}'\end{pmatrix},\quad (A=\bar{A}')$$
可得
$$\det(I+H^2)=(ah^2+2bh+c)\det(I+H_1^2+\bar{v}'v),$$
此处
$$a=1-v(I+H_1^2+\bar{v}'v)^{-1}\bar{v}',$$
$$2b=-vH_1(I+H_1^2+\bar{v}'v)^{-1}\bar{v}'-v(I+H_1^2+\bar{v}'v)^{-1}H_1\bar{v}',$$
$$c=1+v\bar{v}'-vH_1(I+H_1^2+\bar{v}'v)^{-1}H_1\bar{v}'.$$
因 H_1 为 Hermite 方阵，故存在一酉方阵 U 使
$$H_1=U[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]\bar{U}'.$$
命
$$T\doteq U[\sqrt{1+\lambda_1^2},\sqrt{1+\lambda_2^2},\cdots,\sqrt{1+\lambda_n^2}]\bar{U}',$$
则
$$T=\bar{T}',\quad TH_1=H_1T,\quad I+H_1^2=T^2.$$
再作变换
$$v=uT,$$
则
$$\dot{v}=|\det T|^2\dot{u}=\det(I+H_1^2)\dot{u},$$
$$I+H_1^2+\bar{v}'v=T(I+\bar{u}'u)T.$$
又因为
$$(I+\bar{u}'u)^{-1}\bar{u}'=\frac{\bar{u}'}{1+u\bar{u}'},\quad w(I+\bar{u}'u)^{-1}\bar{w}'=w\bar{w}'-\frac{|w\bar{u}'|^2}{1+u\bar{u}'},$$
此处 w 为一 n 维矢量，故可知
$$a=1-u(I+\bar{u}'u)^{-1}\bar{u}'=\frac{1}{1+u\bar{u}'}\quad(>0),$$
$$b=-uH_1(I+\bar{u}'u)^{-1}\bar{u}'=-\frac{uH_1\bar{u}'}{1+u\bar{u}'},$$
$$c=1+uT^2\bar{u}'-uH_1(I+\bar{u}'u)^{-1}H_1\bar{u}'=1+u\bar{u}'+\frac{|uH_1\bar{u}'|^2}{1+u\bar{u}'}.$$
由于 $uH_1\bar{u}'$ 是实数，故得
$$ac-b^2=1.$$
由定理 1 可得

$$
\begin{aligned}
H_n(\alpha) &= \int_H \cdots \int \frac{\dot{H}}{(\det(I+H^2))^\alpha} \\
&= 2^{n-1} \int_{u,H_1} \cdots \int (\det(I+H_1^2))^{1-\alpha}(1+u\bar{u}')^{-\alpha}\dot{u}\dot{H}_1 \int_{-\infty}^{\infty} (ah^2+2bh+c)^{-\alpha} dh \\
&= 2^{n-1} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_u \cdots \int (1+u\bar{u}')^{1-2\alpha}\dot{u} \int_{H_1} \cdots \int (\det(I+H_1^2))^{1-\alpha}\dot{H}_1 \\
&= 2^{n-1}\pi^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha-n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha-1)} H_{n-1}(\alpha-1).
\end{aligned}
$$

继续应用此式，并直接算出

$$
H_1(\alpha-n+1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\alpha-n+1}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\alpha-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-n+1)}, \quad \left(\alpha > n-\frac{1}{2}\right)
$$

即得定理.

附记 1) 上节所定义的酉积分元素 $\dot{U}$ 有它的不变性，即如果

$$
U_1 = VUW, \quad V,W\text{是酉方阵},
$$

则

$$
\sigma(dU_1\overline{dU_1'}) = \sigma(dU\overline{dU'}).
$$

因而 $\dot{U}_1 = \dot{U}$.

这是不变积分的一个例子.

§8. 实正交方阵的体积元素

我们现在叙述一下实正交群的积分元素及其体积.

现在先研究 n 行列的实正交群 O_n，即适合以下关系的 n 行列的实方阵 T：

$$
T'T = I. \tag{1}
$$

显然有 $\det T = \pm 1$. 行列式为 $+1$ 的正交方阵所成的群用 O_n^+ 表示. 对应于一个 T 可以做一个方阵

$$
K = (I-T)(I+T)^{-1}, \tag{2}
$$

但 $\det(I+T)=0$ 的情形必须除外. 现在对 $\det(I+T)=0$ 的情形我们不能说"一般说来不成立". 因为任一行列式为-1 的 T，一定使 $\det(I+T)=0$（此点可由 $\det(I+T)=\det(TT'+T)=\det T\det(T'+I)=-\det(I+T)$ 得知)，所以现在限定 T 属于 O_n^+. 由 (1) 立得

$$
K = -K'; \tag{3}
$$

解 (2) 立得

$$
T = (I-K)(I+K)^{-1}; \tag{4}
$$

由于 $\det(I-K)=\det(I-K')=\det(I+K)$，也可知 $\det T = +1$.

微分 (4) 可得

$$dT = -2(I+K)^{-1}dK(I+K)^{-1},$$

因此

$$\sigma(dTdT') = -4\sigma(dK(I-K^2)^{-1}dK(I-K^2)^{-1}). \tag{5}$$

把 dK 写成 (dk_{ij})，其中 $dk_{ij}=-dk_{ji}$；把 $(I-K^2)^{-1}$ 写成 (u_{st})，其中 $u_{st}=u_{ts}$，则 (5) 变成为

$$8\sum_{i<j}\sum_{s<t}(u_{js}u_{it}-u_{is}u_{jt})dk_{ij}dk_{st},$$

故得出积分元素

$$\dot{T} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\det(I-K^2)^{-\frac{1}{2}(n-1)}\dot{K}, \tag{6}$$

此处 $\dot{K}=2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{i<j}dk_{ij}$.

§9. 实正交群的总体积

定理 1 命 $n\geqslant 2$. 若 $\alpha>\frac{1}{4}(2n-3)$，则

$$J_n(\alpha)=\int\cdots\int_K\frac{\dot{K}}{(\det(I+KK'))^{\alpha}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\pi^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{\nu=2}^{n}\frac{\Gamma\left(2\alpha-n+\frac{1}{2}(\nu+1)\right)}{\Gamma(2\alpha-n+\nu)}.$$

此处 K 过所有的 n 行列的实斜对称方阵，$K=(k_{ij})$，$\dot{K}=2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{i<j}dk_{ij}$.

证明　把 K 写成

$$K=\begin{pmatrix}K_1 & -t'\\ t & 0\end{pmatrix},$$

此处 K_1 为一 $n-1$ 行列的实斜对称方阵，t 为一 $n-1$ 维矢量，于是

$$I+KK'=\begin{pmatrix}I+K_1K_1'+t't & K_1t'\\ tK_1' & 1+tt'\end{pmatrix}.$$

不难证明

$$\det(I+KK')=(1+tt'-tK_1'(I+K_1K_1'+t't)^{-1}K_1t')\det(I+K_1K_1'+t't).$$

有一正交方阵 Γ 使

$$K_1=\Gamma\left(\begin{pmatrix}0 & \lambda_1\\ -\lambda_1 & 0\end{pmatrix}\dotplus\begin{pmatrix}0 & \lambda_2\\ -\lambda_2 & 0\end{pmatrix}\dotplus\cdots\right)\Gamma',$$

括弧中最后一项或为 $\begin{pmatrix}0 & \lambda_{\frac{n}{2}}\\ -\lambda_{\frac{n}{2}} & 0\end{pmatrix}$ 或为 $\begin{pmatrix}0 & \lambda_{\frac{n-1}{2}}\\ -\lambda_{\frac{n-1}{2}} & 0\end{pmatrix}\dotplus 0$，各视 n 为偶或奇而定.

命

$$T=\Gamma[\sqrt{1+\lambda_1^2},\sqrt{1+\lambda_1^2},\sqrt{1+\lambda_2^2},\sqrt{1+\lambda_2^2},\cdots]\Gamma',$$

则

$$T=T',\ K_1T=TK_1,\ I+K_1K_1'=T^2.$$

又命 $t = wT$，则

$$\dot{t} = (\det T)\dot{w} = (\det(I + K_1K_1'))^{\frac{1}{2}}\dot{w},$$
$$I + K_1K_1' + t't = T^2 + Tw'wT = T(I + w'w)T.$$

所以

$$\begin{aligned}
&1 + tt' - tK_1'(I + K_1K_1' + t't)^{-1}K_1t' \\
&\quad = 1 + wT^2w' - wTK_1'T^{-1}(I + w'w)^{-1}T^{-1}K_1Tw' \\
&\quad = 1 + wT^2w' - wK_1'(I + w'w)^{-1}K_1w' \\
&\quad = 1 + ww' - \frac{(wK_1w')^2}{1 + ww'} = 1 + ww'.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
J_n(\alpha) &= \int\cdots\int_K \frac{\dot{K}}{(\det(I + KK'))^\alpha} \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}}\int\cdots\int_{K_1} \frac{\dot{K}_1}{\det(I + K_1K_1')^{\alpha-\frac{1}{2}}}\int\cdots\int_w (1 + ww')^{-2\alpha}\dot{w} \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{1}{2}(n-1)\right)}{\Gamma(2\alpha)}J_{n-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

连续应用此式并最后算出

$$J_2\left(\alpha - \frac{n-2}{2}\right) = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1 + t^2)^{2\alpha-n+2}} = \sqrt{2}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(2\alpha - n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha - n + 2)},$$
$$\left(\alpha > \frac{1}{4}(2n-3)\right)$$

即得定理。所以有

定理 2 正交群 O_n^+ 的总体积是

$$\int\dot{\Gamma} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}\int\cdots\int_K \det(I - K^2)^{-\frac{1}{2}(n-1)}\dot{K}$$
$$= 2^{\frac{3}{4}n(n-1)}\pi^{\frac{1}{4}n(n-1)}\prod_{\nu=2}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu-1)\right)}{\Gamma(\nu-1)}.$$

习题 1 试算出辛酉群的总体积.

习题 2 试算出对称酉方阵所成的流形的总体积.

习题 3 试算出斜对称酉方阵所成的流形的总体积.

第九章 非负方阵

§1. 非负方阵的相似性

定义1 如果一个方阵 Q，其中每行每列只有一个正元素，其他的元素都是0，则称 Q 为广义换位方阵.

例如：对角线方阵 $A=[\lambda_1,\cdots\lambda_n]$ $(\lambda_i>0)$ 即为广义换位方阵，又如换位方阵 P，它的每行中与每列中只有一个元素为1，其他元素都是0，也是广义换位方阵，PA 也是广义换位方阵. 不难看出，此外没有其他广义换位方阵了.

定义2 命 A，B 是两个非负方阵，如果有一个广义换位方阵 Q 使

$$QAQ^{-1}=B,$$

则 A 与 B 称为相似，用符号 $A\sim B$ 表它.

显然有以下的性质.

1) $A\sim A$.

2) 如果 $A\sim B$，则 $B\sim A$.

3) 如果 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

引进符号 $A\geqslant 0$，表示矩阵 A 的元素都是非负的而 $A>0$ 表示 A 的元素都是正的，同样定义矢量 $x\geqslant 0$ 及 $x>0$. 进一步引伸，$A\geqslant B$ 表示 $A-B\geqslant 0$ 等等. 如此则显然有

4) $A\geqslant B$，$B\geqslant C$ 则 $A\geqslant C$.

5) $A\geqslant 0$，$B\geqslant C$ 则 $AB\geqslant AC$ 及 $BA\geqslant CA$.

6) 如果 $A\sim B$，$A\geqslant 0$ (或>0)，则 $B\geqslant 0$ (或>0).

这一性质的证明依赖于广义换位方阵和其逆方阵都是非负的. 反之，有

定理1 如果一个可逆非负方阵的逆方阵也是非负的，那末它一定是广义换位方阵.

证明 命

$$B=(b_{ij}),\quad b_{ij}\geqslant 0$$

是

$$A=(a_{ij}),\quad a_{ij}\geqslant 0$$

的逆方阵，则当 $i\neq k$ 时，

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}=0.$$

由此得出，当 $i\neq k$ 时，对任一 j 常有

$$a_{ij}b_{jk}=0.$$

如果 A 的第 i 行中有两个元素 $a_{ij_1}\neq 0$，$a_{ij_2}\neq 0$，则对所有的 $k(\neq i)$ 常有

$$b_{j_1k}=b_{j_2k}=0,$$

也就是 B 的第 j_1，j_2 行中除去 b_{j_1i}，b_{j_2i} 二元素外都等于0，这样的 B 是奇异的，与假定相

矛盾，因此A中每一行只有一个非零元素，同样每一列中亦只有一个非零元素，定理证完.

习题 1　对任何非负方阵A，

$$TAT^{-1}$$

仍是非负方阵，则T一定是广义换位方阵.

定义 3　如果

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1^{(h)} & A_2 \\ 0 & A_3^{(n-h)} \end{pmatrix},$$

则A称为可分拆的，不然称为不可分拆的.

§2. 标 准 型

我们现在讨论不可分拆的非负方阵.

定义 1　一个不可分拆的非负方阵A如果适合于

$$A = (a_{ij}), \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = q,$$

则称为标准型，而q称为高标.

基本定理　任何一个不可拆的非负方阵一定相似于一个标准型方阵. 如果不计其重排所得的情况，标准型是唯一的.

在证明这定理之前，先介绍一个方法，这个方法是证明的源泉，但也是进行计算的好方法.

假定

$$\begin{cases} a_{11} + \cdots + a_{1n} = q_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} + \cdots + a_{nn} = q_n. \end{cases} \tag{1}$$

及 $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \cdots \geqslant q_n$，而且 $q_1 > q_n$.

取λ使

$$a_{11} + \cdots + a_{1n-1} + \frac{a_{1n}}{\lambda} = \lambda(a_{n1} + \cdots + a_{nn-1}) + a_{nn}. \tag{2}$$

$$q_1 - a_{1n} + \frac{a_{1n}}{\lambda} = \lambda(q_n - a_{nn}) + a_{nn}.$$

即

$$f(\lambda) = \lambda^2(q_n - a_{nn}) + (a_{nn} + a_{1n} - q_1)\lambda - a_{1n} = 0.$$

如果 $q_n = a_{nn}$，则 $a_{n1} = \cdots = a_{nn-1} = 0$，$A$是可分拆的方阵了，所以 $q_n > a_{nn}$. 由于$f(\pm\infty) > 0$，$f(1) = q_n - q_1 < 0$. 所以有$\lambda > 1$适合于(2). 由于$\lambda > 1$，所以方阵

$$[1,\cdots,1,\lambda]A[1,\cdots,1,\lambda]^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n-1}, & \dfrac{a_{1n}}{\lambda} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n-1}, & \dfrac{a_{2n}}{\lambda} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{n1}, & \lambda a_{n2}, & \cdots & \lambda a_{nn-1}, & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行和都$<q_1$(有例外，例如 $a_{2n}=0$，$q_2=q_1$)。

所以一般讲来，可以用这个办法来逐步减少 $\max(q_1,\cdots,q_n)$，一直到所有的行和都相等为止。

§3. 基本定理的证明

上节中所述及的计算方法，便是基本定理证明的根源，引进

$$Q(A)=\max(q_1,\cdots,q_n). \tag{1}$$

先证明如果 $q_1,\cdots,q_n$ 不全相等，我们可以取 Λ 使

$$Q(\Lambda A\Lambda^{-1})<Q(A). \tag{2}$$

假定经过重新排列，方阵 A 的行和 $q_1,\cdots,q_n$ 可以排成为

$$q_1=\cdots=q_s>q_{s+1}\geqslant q_{s+2}\geqslant\cdots\geqslant q_n.$$

我们证明可以取得 Λ 使 $\Lambda A\Lambda^{-1}$ 中和等于 q_1 的行数$<s$. 其他的行的和都小于 q_1 把方阵 A 拆成为

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix},\quad A_1=A_1^{(s)}\ 等等.$$

取

$$\Lambda=\begin{pmatrix}I^{(s)} & 0\\ 0 & \Lambda_1\end{pmatrix},\quad \Lambda_1=[\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_n],$$

如此得

$$\Lambda A\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\Lambda_1^{-1}\\ \Lambda_1A_3 & \Lambda_1A_4\Lambda_1^{-1}\end{pmatrix}.$$

由于 $A_2\neq 0$，所以有 $\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_n$ 使

$$A_2\Lambda_1^{-1}\leqslant A_2,\ 但\ A_2\Lambda_1^{-1}\neq A_2.$$

同时使 $\Lambda A\Lambda^{-1}$ 的后 $n-s$ 行的和仍然小于 q_1. 由 $A_2\Lambda_1^{-1}\leqslant A_2$ 及 $A_2\Lambda_1^{-1}\neq A_2$ 可知 $\Lambda A\Lambda^{-1}$ 的前 s 行中至少有一行之和 $<q_1$，因而 $\Lambda A\Lambda^{-1}$ 中和等于 q_1 的行数$<s$. 一直下去，一直到没有一行的和 $\geqslant q_1$. 这证明了(2)式.

其次我们考虑集合 S:

$$\Lambda=[\lambda_1,\cdots,\lambda_n],\ \lambda_1+\cdots+\lambda_n=1,\ \lambda_\nu\geqslant 0. \tag{3}$$

$\left(由于\ \Lambda A\Lambda^{-1}=\left(\frac{1}{\lambda}\Lambda\right)A\left(\frac{1}{\lambda}\Lambda\right)^{-1}\ 我们实质上已经讨论了所有的\ \Lambda\ 了\right)$，对应于每一 $\Lambda(\in S)$，有一个数值

$$Q(\Lambda A\Lambda^{-1}).$$

命 q 代表这集合的确下界，如果有 Λ 使

$$Q(\Lambda A\Lambda^{-1})=q.$$

则由(2)可知，$\Lambda A\Lambda^{-1}$ 的各行之和都等于 q，即 A 相似于一个标准型。

由 q 的定义，在 S 中有一组方阵贯

$$\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_i,\cdots \tag{4}$$

使

$$Q(\Lambda_iA\Lambda_i^{-1})<q+\frac{1}{i}. \tag{5}$$

由于 S 是闭集，所以 $\{\Lambda_i\}$ 有一极限点 Λ_0，在(4)中可以选一子贯趋于 Λ_0。不妨假定

$$\lim_{i\to\infty}\Lambda_i=\Lambda_0.$$

先证明 $\Lambda_0=[\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_n^{(0)}]>0$. 如果有些 $\lambda_j^{(0)}=0$. 但由 $\lambda_1^{(0)}+\cdots+\lambda_n^{(0)}=1$ 可知不能全部为 0. 假定其中 $\lambda_1^{(0)}=\cdots=\lambda_s^{(0)}=0$，而 $\lambda_{s+1}^{(0)},\cdots,\lambda_n^{(0)}$ 都非零，由

$$\lambda_j^{(i)}a_{j1}\lambda_1^{(i)-1}+\cdots+\lambda_j^{(i)}a_{js}\lambda_s^{(i)-1}+\cdots+\lambda_j^{(i)}a_{jn}\lambda_n^{(i)-1}<q+\frac{1}{i}$$

$$(s+1\leqslant j\leqslant n,\ i=1,2,\cdots)$$

可知 $a_{j1}=\cdots=a_{js}=0\,(s+1\leqslant j\leqslant n)$. 即 A 是可分拆的了，此为矛盾，所以 $\Lambda_0>0$.

命 $\Lambda_i=[\lambda_1^{(i)},\cdots,\lambda_n^{(i)}]$. 由 (5) 可知

$$\max[\lambda_1^{(i)}(a_{11}\lambda_1^{(i)-1}+\cdots+a_{1n}\lambda_n^{(i)-1}),\cdots,\lambda_n^{(i)}(a_{n1}\lambda_1^{(i)-1}+\cdots+a_{nn}\lambda_n^{(i)-1})]<q+\frac{1}{i}.$$

即对任一 j，有

$$\lambda_j^{(i)}(a_{j1}\lambda_1^{(i)-1}+\cdots+a_{jn}\lambda_n^{(i)-1})<q+\frac{1}{i},$$

命 $i\to\infty$. 则得

$$\lambda_j^{(0)}(a_{j1}\lambda_1^{(0)-1}+\cdots+a_{jn}\lambda_n^{(0)-1})\leqslant q.$$

即

$$Q(\Lambda_0A\Lambda_0^{-1})=q.$$

即得定理的前半部.

最后证明唯一性，假定 A 是标准型，其行和是 q，而 $\Lambda A\Lambda^{-1}$ 也是标准型，行和是 q_1，则

$$a_{i1}\lambda_1^{-1}+\cdots+a_{in}\lambda_n^{-1}=q_1\lambda_i^{-1}. \tag{6}$$

即对所有的 i 常有

$$q\min(\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1})\leqslant q_1\lambda_i^{-1}\leqslant q\max(\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}), \tag{7}$$

取 $\lambda_i^{-1}=\max(\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1})$ 及 $\min(\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1})$ 立得 $q=q_1$，代入(6)式得

$$a_{i1}\lambda_1^{-1}+\cdots+a_{in}\lambda_n^{-1}=(a_{i1}+\cdots+a_{in})\lambda_i^{-1}. \tag{8}$$

如果重新排列成为

$$\lambda_1^{-1}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_s^{-1}<\lambda_{s+1}^{-1}=\cdots=\lambda_n^{-1},$$

则由(8)可知当 $i=s+1,\cdots,n$ 时，

$$a_{i1}=\cdots=a_{is}=0.$$

这说明 A 是可分拆的，因此得出唯一性.

§4. 基本定理的另一形式

由

$$\Lambda A\Lambda^{-1}=(b_{ij}),\quad \sum_{j=1}^{n}b_{ij}=q$$

可知

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\lambda_i}{\lambda_j}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=q,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\lambda_j}=\frac{q}{\lambda_i}.$$

即得

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}\\ \vdots\\ \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}=q\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}\\ \vdots\\ \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}.$$

由此立刻推得:

定理 1 不可分拆的非负方阵，有一个正特征根 q，并且对应于它有一个正特征矢量(列).

关于正特征根 q 与正特征矢量我们还有以下一些性质.

定理 2 不可分拆的非负方阵只有一个非负特征(列)矢量(如果不计其常数因子的话)，它是正矢量而且对应的特征根是高标，其他的特征根的绝对值都不超过高标.

证明 不妨假定原来的方阵就是标准型，即

$$A=(a_{ij}),\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=q.$$

显然有$(1,1,\cdots,1)'$为其特征列矢量，它是正的. 若有另一非负特征列矢量$(x_1,\cdots,x_n)'$ $(\neq 0')$，则

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=q_1x_i,\ i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

由此推出 $q_1>0$. 因而得

$$q\min(x_1,\cdots,x_n)\leqslant q_1x_i\leqslant q\max(x_1,\cdots,x_n). \tag{2}$$

如果 x_i 中有一些为 0, 例如 $x_1=\cdots=x_s=0$, $x_{s+1}>0,\cdots,x_n>0$, 则由

$$a_{is+1}x_{s+1}+\cdots+a_{in}x_n=q_1x_i=0,\ i=1,2,\cdots,s$$

可知 $a_{is+1}=\cdots=a_{in}=0$, $1\leqslant i\leqslant s$, 即 A 是可分拆的，因此 x_i 都是正的.

由 (2) 推出 $q_1=q$，再由 (1) 得

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=(a_{i1}+\cdots+a_{in})x_i$$

可推得 $x_1=\cdots=x_n$. 因而得知非负特征矢量的唯一性，即只有一个非负特征矢量它对应于特征值为高标 q.

命 q_1 是 A 的任一特征根，它对应的列矢量是 $x'=(x_1,\cdots,x_n)'$ (可能是复虚的)，即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=q_1x_i,$$

则

$$|q_1||x_i|\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|x_j|\leqslant q\max(|x_1|,\cdots,|x_n|),$$

取 $|x_i|=\max(|x_1|,\cdots,|x_n|)$, 则得

$$|q_1|\leqslant q.$$

定理证完.

定理 3 对应于高标 q 的特征(列)矢量只有一个(如果不计一个常数因子的话).

证明 若在 $e'=(1,1,\cdots,1)'$ 之外，还有一个 x'，则 x' 是实矢量，对于充分小的 α，

$$e' + \alpha x'$$

仍然是一个非负的，而且对应于特征值 q 的特征矢量．因此 $e' + \alpha x' = \beta e'$，即 x' 是 e' 的常数倍，因而得出本定理．

§5. 标准型方阵的四则运算

定理 1 两个标准型非负方阵之和仍然是标准型，其高标等于两高标之和；其积仍为标准型，其高标等于两高标之积．

证明 如果

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = q, \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = r,$$

则

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) = q + r,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} \right) a_{ij} = qr.$$

如果暂不管非负性，则 A^{-1} 的行和等于 q^{-1}．证明此点是不难的．原因是

$$A(1,1,\cdots,1)' = q(1,1,\cdots,1)',$$

所以

$$A^{-1}(1,1,\cdots,1)' = q^{-1}(1,1,\cdots,1)'.$$

因而 A^{-1} 的行和等于 q^{-1}．

定理 2 如果 $A \geqslant 0$ 及 $(I - A)^{-1} \geqslant 0$，则 A 的高标 <1，而且 $(I - A)^{-1}$ 也与 A 同为标准型，高标是 $(1 - q)^{-1}$．

证明 从

$$A(1,1,\cdots,1)' = q(1,1,\cdots,1)'$$

得

$$(I - A)^{-1}(1,1,\cdots,1)' = (1 - q)^{-1}(1,1,\cdots,1)'.$$

如果 $(1 - A)^{-1} \geqslant 0$，则 $q < 1$．因而得出定理．

同法不难推得，如果 $A \geqslant 0$，其高标等于 q，则 e^A 的高标就是 e^q．而且 A 与 e^A 的正特征矢量相同．

以上所说的虽然是关于列特征矢量的，但同样适用于行特征矢量．

分别命一个非负不可分拆方阵 A 的一个正特征(行)矢量及一个正特征(列)矢量为 x 及 y，即

$$xA = qx, \quad Ay = yq.$$

如此则

$$z_1 = x_1 y_1, \cdots, z_n = x_n y_n.$$

是经过 $\Lambda A \Lambda^{-1}$ 的运算而不变的．

行和相等的标准型，其列特征矢量等于$(1,1,\cdots,1)'$．而行特征矢量是$(z_1,\cdots,z_n)$．同样如果研究列和相等的标准型，则其行特征矢量等于 $(1, 1,\cdots,1)$，而列特征矢量是 $(z_1,\cdots,z_n)'$．

§6. 方 阵 大 小

定理 1 命

$$C=(c_{ij})\tag{1}$$

是一个复元素方阵，如果

$$|c_{ij}|\leqslant a_{ij},\tag{2}$$

而 $A=(a_{ij})$ 是不可分拆的非负方阵，其高标等于 q，则C 的任一特征根 γ 的绝对值都不超过 q，即

$$|\gamma|\leqslant q.\tag{3}$$

如果 $\gamma=e^{i\theta}q$，则

$$C=e^{i\theta}[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]A[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]^{-1}.$$

证明

1）并不失去普遍性，我们可以假定A是标准型．命γ与$x(\neq 0)$是C的特征根及其对应的特征（列）矢量，即

$$\gamma x_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j.$$

由假定可知

$$|\gamma||x_i|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}||x_j|\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|x_j|\leqslant q\max(|x_1|,\cdots,|x_n|),\tag{4}$$

取 $|x_i|=\max(|x_1|,\cdots,|x_n|)$，即得 $|\gamma|\leqslant q$.

2）假定 $\gamma=e^{i\theta}q$，我们现在检查不等式(4)的各个环节，不失普遍性可以假定

$$|x_1|=|x_2|=\cdots=|x_s|>|x_{s+1}|\geqslant\cdots\geqslant|x_n|.$$

于是，当 $i=1,2,\cdots,s$ 时，(4)式左边等于右边，因此

$$q|x_i|=\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}||x_j|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|x_j|=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)|x_i|.$$

最后一个等式仅当

$$a_{is+1}=a_{is+2}=\cdots=a_{in}=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant s$$

时才能成立．也就是A是可分拆的，这与假定相违背．因此

$$|x_1|=|x_2|=\cdots=|x_n|.$$

并且不妨假定 $|x_i|=1$．因此

$$x_1=e^{i\theta_1},\cdots,x_n=e^{i\theta_n}.$$

方阵

$$C_1=[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]^{-1}\ C[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]$$

是以 $(1,1,\cdots,1)'$ 为其特征（列）矢量的．我们不妨假定 C_1 就是 C，即假定C 对应于特征根 $\gamma=qe^{i\theta}$，有一特征(列)矢量 $(1,1,\cdots,1)'$，因此

$$\gamma=qe^{i\theta}=\sum_{j=1}^{n}c_{ij},\quad |c_{ij}|=a_{ij},\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=q.$$

即

$$q=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}e^{-i\theta}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

由此得出

$$c_{ij}=a_{ij}e^{i\theta}.$$

即得所证.

定理 2 命 A 是一个不可分拆的非负方阵，A 的任一主子方阵的高标一定小于 A 的高标.

证明 命

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots a_{1m} & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots a_{mm} & 0\cdots 0 \\ 0\cdots & \cdots 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

显然 $A_1\leqslant A$ 而 $A_1\neq A$，由此由定理 1 可知 A_1 的高标小于 A 的高标.

定理 3 命 A 为一不可分拆的非负方阵，则它的高标不是它的特征方程的重根.

证明 特征多项式

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11}, & -a_{12}, & \cdots, & -a_{1n} \\ -a_{21}, & \lambda-a_{22}, & \cdots, & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & \cdots, & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

的微商等于

$$f'(\lambda)=\begin{vmatrix} 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ -a_{21}, & \lambda-a_{22}, & \cdots, & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & \cdots, & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda-a_{11}, & -a_{12}, & \cdots, & -a_{1n} \\ 0 & 1, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & \cdots, & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots,$$

其第一个行列式是主子方阵

$$\begin{pmatrix} a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征多项式. 由定理 2 可知它的高标小于 A 的高标 q. 也就当 $\lambda\geqslant q$ 时，它的数值是正，同样处理其它各项. 因而得出：当 $\lambda\geqslant q$ 时

$$f'(\lambda)>0.$$

也就是 q 是 $f(\lambda)$ 的单根.

定理 4 如果 A 还有绝对值等于 q 的特征根，则它们是

$$qe^{2\pi i\frac{l}{h}},\ l=0,1,2,\cdots,h-1.$$

这儿 h 是一个 $\geqslant 2$ 的正整数.

证明 取 $\gamma=qe^{i\theta}$，则由定理 1 的第二部份可知(取 $C=A$)，

$$A=e^{i\theta}[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]A[e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n}]^{-1}. \tag{5}$$

因此得出，如果 x_0 是 A 的特征根，则 $\bar{e}^{i\theta}x_0$ 也是，因而

$$x_0,\ \bar{e}^{i\theta}x_0,\ \bar{e}^{2i\theta}x_0,\cdots$$

都是，但不可能有无穷个特征根，因此有 h 使 $h\theta$ 是 2π 的倍数. 命 h 是其中的最小正数，由于无重根的性质，立刻可以推出，A 的所有的绝对值等于 q 的特征根如定理所述.

由于 A^h 出现了重根，因此

定理 5 如果 A 除 q 之外，还有绝对值等于 q 的特征根，则有正整数 h 使 A^h 是可分拆的.

再进一步考虑(5)式:

$$A = e^{\frac{2\pi i}{h}}[e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]A[e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}]^{-1}, \tag{6}$$

迭代 h 次，得

$$A = [e^{ih\theta_1}, \cdots, e^{ih\theta_n}]A[e^{ih\theta_1}, \cdots, e^{ih\theta_n}]^{-1}.$$

如果有一个 j，使 $e^{ih\theta_j} \neq 1$. 则 A 可分拆，因此 $e^{i\theta_j}$ 也都是 1 的 h 次方根. 假定 $e^{i\theta_1}, \cdots,$ $e^{i\theta_n}$ 中有 n_1 个 1，n_2 个 $e^{\frac{2\pi i}{h}}$，n_3 个 $e^{2\cdot\frac{2\pi i}{h}}$ 等等，经排列后假定

$$[e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n}] = \begin{pmatrix} I^{(n_1)} & & & \\ & e^{\frac{2\pi i}{h}}I^{(n_2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\frac{2\pi i}{h}(h-1)}I^{(n_h)} \end{pmatrix},$$

把 A 拆成为

$$\begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \cdots, & A_{1h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{h1}, & A_{h2}, & \cdots, & A_{hh} \end{pmatrix},$$

代入(6)式可知

$$A_{st} = e^{\frac{2\pi i}{h}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}(s-1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h}(t-1)} A_{st} = e^{\frac{2\pi i}{h}(1+s-t)} A_{st}.$$

即当 $t \neq 1 + s$ 时，$A_{st} = 0$. 即 A 形如

$$\begin{pmatrix} 0, & A_{12}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & A_{23}, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{h1}, & & 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix}.$$

§7. 强不可拆方阵

定义 1 一个任意幂都不能分拆的方阵称为强不可分拆的.

关于强不可分拆方阵有以下的性质:

定理 1 如果 A 是强不可分拆的非负方阵，而 q 为高标，则

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{A}{q}\right)^l = u'v, \quad vu' = 1. \tag{1}$$

这儿 u' 与 v 分别是 A 的正的列特征矢量与正的行特征矢量.

证明 由于强不可分拆，在 A 中 q 以外的其他特征根的绝对值都 $< q$. 因此 A/q 有一个特征根等于 1，而其它的都 <1. 所以

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{A}{q}\right)^l$$

是一个方阵，有一个特征根等于 1（而且是单根），其它的等于 0，因此

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{A}{q}\right)^l = u'v, \quad vu' = 1.$$

命 c 是任一矢量，命

$$v_l = c\frac{A^l}{q^l}, \tag{2}$$

则

$$\lim_{l\to\infty} v_l = (cu')v. \tag{3}$$

即不管 c 如何，v_l 的极限是 v 乘上一个常数因子，又从

$$qv_{l+1} = c\frac{A^{l+1}}{q^l} = v_l A$$

及 $l\to\infty$ 可知

$$qv = vA.$$

即 v 是行特征矢量.

同法证明

$$qu' = Au',$$

因此 u, v 都是正矢量.

由此立刻推出:

定理 2 对任一强不可分拆方阵 A，有一正整数 l 存在，使

$$A^l > 0.$$

即 A^l 的每个元数都是正的.

§8. Марков 链

定义 1 一个适合于

$$x_1 + \cdots + x_n = 1, \quad x_i \geqslant 0$$

的矢量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 称为概率矢量，一个方阵

$$P = (p_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \quad p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1,$$

称为 Марков 方阵.

Марков 方阵把概率列矢量变为概率列矢量，即 Px' 仍然是概率列矢量. 理由是由

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j,$$

可知

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

我们现在研究一个物理系统，这个系统只可能有有限种“态”，而且只可能在某些一定的时间变态.

我们用 $1, 2, \cdots, n$ 来表示这些不同的态，而当 $t = 0, 1, 2, \cdots$ 时变“态”在时间 t 这

个物理系统是态 j，而到时间 $t+1$，这个物理系统变为态 i 的可能性以概率

$$p_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

表之.

命 $x_i(t)$ 表示在时间 t，第 i 态出现的概率，如此则有

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j(t).$$

写成方阵符号则

$$x(t+1)' = Px(t)'.$$

并假定初始态是

$$x(0) = (c_1, \cdots, c_n), \quad c_1 + \cdots + c_n = 1.$$

Марков 的基本定理是:

定理 1 如果 $P > 0$，则

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = y.$$

y 仍然是一个概率矢量，它是 P 的唯一正特征矢量，而与初始态 $x(0)$ 无关.

证明 这是定理 7.1 的显然推理，由于 P 是正的，因此是强不可分拆的. 所以

$$\lim_{l\to\infty} P^l = u'v, \; vu' = 1. \tag{1}$$

由于 P 是 Марков 方阵，以 $(1,1,\cdots,1)$ 为其(行)特征矢量. 因此，$v = (1,1,\cdots,1)$.

$$\lim_{t\to\infty} x(t)' = \lim_{t\to\infty} P^t x(0)' = u'vx(0)' = u'.$$

即得

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = u.$$

以上的定理不仅对正方阵 P 正确，显然对强不可分拆的方阵也是正确的. 关于不可分拆方阵，由于 P 可能有绝对值等于 1 的特征根 $e^{2\pi ik/h}$，$k = 0,1,2,\cdots,h-1$. 因而不能得出结论(1)来. 虽然如此，我们考虑算术平均

$$\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} A^l. \tag{2}$$

由于

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} e^{2\pi ik\frac{l}{h}} = \begin{cases} 0, \text{如果 } h \text{ 除不尽 } k; \\ 1, \text{如果 } h \text{ 除得尽 } k. \end{cases}$$

因此，当 $L\to\infty$，(2) 也是一个秩等于 1，而且有 1 为特征根的方阵. 因此

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} P^l = u'v, \quad vu' = 1.$$

由此立得

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} vP^l = v.$$

因而 $vP = v$，即 $v = (1,1,\cdots,1)$. 所以

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} P^l x(0)' = u'(vx(0)') = u'.$$

即

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}x(l)=u.$$

定理 2 如果 P 是不可分拆的 Марков 方阵，则

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}x(l)=y.$$

y 仍然是一个概率矢量，它是 P 的唯一的正特征矢量，而且与初始态 $x(0)$ 无关。

§9. 连续随机过程

我们现在把上节的工作从离散的情况转化为连续变化的情况，把时间分为

$$t=0,\Delta,2\Delta,\cdots.$$

为了要使连续的过程有意义，我们假定当时间愈小时，愈接近于不变；也就是我们假定（当△是充分小时）：$a_{ij}\Delta$ 是系统 S 由时间 t 的 j 变态为时间 $t+\Delta$ 时的 i 态的概率 $(i\neq j)$ 及 $1-a_{jj}\Delta$ 是系统 S 中由时间 t 的 j 态变为时间 $t+\Delta$ 的 j 态的概率。

此处

$$a_{ij}\geqslant 0,\quad i\neq j$$
$$a_{jj}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}a_{ij}. \tag{1}$$

这样便得

$$x_i(t+\Delta)=(1-a_{ii}\Delta)x_i(t)+\Delta\sum_{j\neq i}a_{ij}x_j(t),\quad i=1,2,\cdots,n$$

及 $t=0,\ \Delta,\ 2\Delta,\cdots.$

假定

$$x_i(t+\Delta)=x_i(t)+\Delta\frac{dx_i(t)}{dt}+O(\Delta^2),$$

则当 $\Delta\to 0$ 时有

$$\frac{dx_i}{dt}=-a_{ii}x_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j,\ x_i(0)=c_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

此处 $C=(c_1,\cdots,c_n)$ 是概率矢量

$$c_i\geqslant 0\quad \sum_{i=1}^{n}c_i=1.$$

这个微分方程称为过程微分方程。命

$$M=\begin{pmatrix}-a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}\\ a_{21}, & -a_{22}, & \cdots, & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & -a_{nn}\end{pmatrix},\quad a_{jj}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}a_{ij},\ a_{ij}\geqslant 0\quad (i\neq j). \tag{3}$$

则方程 (2) 可以写成为

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1,1,\cdots,1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章§7的定理3可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明　不难证明在新添的条件（$a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$）下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于1，其他的绝对值都小于1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思　考　问　题

1. 定理2的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理2仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u=(1,1,\cdots,1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章§7的定理3可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t\to\infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij}>0$ $(i\neq j)$，则当 $t\to\infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij}>0\,(i\neq j))$ 下，$e^M>0$．因此 e^M 只有一个特征根等于1，其他的绝对值都小于1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt}=u$，可知 $up'q=u$，即 $(up')q=u$．命 $\frac{1}{up'}p=v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理2的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理2仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P=e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章§7的定理3可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于1，其他的绝对值都小于1，因此

$$\lim_{t\to\infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1．定理2的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理2仍然正确．

2．概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否?

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1．定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2．概率方阵 P 与适合于 (3) 的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件（$a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$）下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t\to\infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1．定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2．概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否?

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0 \ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1　过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2　如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明　不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思　考　问　题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进M类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于 (3) 的方阵M之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果M可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明,对任一初始概率矢量 c,x 也一定是概率矢量,要证这点十分容易. 命 $u = (1,1,\cdots,1)$. 由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵. 因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量.

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质.

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$, 则当 $t \to \infty$ 时, 过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关.

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下, $e^M > 0$. 因此 e^M 只有一个特征根等于 1, 其他的绝对值都小于 1, 因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$, 可知 $up'q = u$, 即 $(up')q = u$. 命 $\frac{1}{up'}p = v$, 则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证.

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱,例如: 我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似),及不可分拆的概念,是否对不可分拆的 M, 定理 2 仍然正确.

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外,并找出可能的条件来,如果 M 可分拆显然 P 可分拆,逆定理正确否?

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1,1,\cdots,1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章§7的定理3可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于1，其他的绝对值都小于1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理2的条件能否减弱，例如：我们引进M类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理2仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵M之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果M可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章§7的定理3可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件（$a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$）下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于1，其他的绝对值都小于1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理2的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理2仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否?

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1,1,\cdots,1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章§7的定理3可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件（$a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$）下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于1，其他的绝对值都小于1，因此

$$\lim_{t \to \infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理2的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理2仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1,1,\cdots,1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章§7的定理3可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于1，其他的绝对值都小于1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理2的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理2仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0\ (i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明　不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u=(1,1,\cdots,1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t\to\infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij}>0$ $(i\neq j)$，则当 $t\to\infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件（$a_{ij}>0\ (i\neq j)$）下，$e^M>0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt}=u$，可知 $up'q=u$，即 $(up')q=u$．命 $\frac{1}{up'}p=v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于 (3) 的方阵 M 之间能否建立关系 $P=e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章§7的定理3可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于1，其他的绝对值都小于1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理2的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理2仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章§7的定理3可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于1，其他的绝对值都小于1，因此

$$\lim_{t\to\infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1．定理2的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理2仍然正确．

2．概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于 (3) 的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 §7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件（$a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$）下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u=(1,1,\cdots,1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t\to\infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij}>0$ $(i \neq j)$，则当 $t\to\infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件 $(a_{ij}>0\ (i\neq j))$ 下，$e^M>0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt}=u$，可知 $up'q=u$，即 $(up')q=u$．命 $\frac{1}{up'}p=v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于(3)的方阵 M 之间能否建立关系 $P=e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1　过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t\to\infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2　如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t\to\infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明　不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思　考　问　题

1．定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2．概率方阵 P 与适合于 (3) 的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1　过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2　如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明　不难证明在新添的条件 $(a_{ij} > 0\ (i \neq j))$ 下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t \to \infty} (e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} ce^{M't} = \lim_{t \to \infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思　考　问　题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于 (3) 的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？

$$\frac{dx}{dt} = xM', \quad x(0) = c. \tag{4}$$

它的解答显然是

$$x = ce^{M't}. \tag{5}$$

我们现在证明，对任一初始概率矢量 c，x 也一定是概率矢量，要证这点十分容易．命 $u = (1, 1, \cdots, 1)$．由(3)可见

$$uM = 0.$$

因此

$$ue^{Mt} = u\left(I + Mt + \frac{M^2}{2!}t^2 + \cdots\right) = u$$

及

$$xu' = ce^{M't}u' = cu' = 1.$$

又由第三章 § 7 的定理 3 可知 $e^{M't}$ 是非负元素方阵．因而得出

定理 1 过程微分方程的解是概率矢量．

现在考虑 $t \to \infty$ 时过程方程的解的性质．

定理 2 如果 $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$，则当 $t \to \infty$ 时，过程方程的解所趋近的矢量与初始矢量无关．

证明 不难证明在新添的条件（$a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$）下，$e^M > 0$．因此 e^M 只有一个特征根等于 1，其他的绝对值都小于 1，因此

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = p'q, \quad pq' = 1.$$

由 $ue^{Mt} = u$，可知 $up'q = u$，即 $(up')q = u$．命 $\frac{1}{up'}p = v$，则得

$$\lim_{t\to\infty}(e^M)^t = v'u, \quad vu' = 1.$$

由此推出

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} ce^{M't} = \lim_{t\to\infty} cu'v = v.$$

即得所证．

思 考 问 题

1. 定理 2 的条件能否减弱，例如：我们引进 M 类型方阵的等价关系(即在广义换置方阵下相似)，及不可分拆的概念，是否对不可分拆的 M，定理 2 仍然正确．

2. 概率方阵 P 与适合于 (3) 的方阵 M 之间能否建立关系 $P = e^M$ 如果不能试找出例外，并找出可能的条件来，如果 M 可分拆显然 P 可分拆，逆定理正确否？